球面天文学

[美] E.W.伍拉德
G.M.克莱门斯 著

球面天文学

全和钧
朱圣源 赵君亮 译
任江平 校

测绘出版社

内 容 简 介

本书是国际上球面天文学方面重要的经典著作之一。全书共二十章。从天球和坐标系的基本概念出发，讨论了视差、大气折射、光行差、岁差、章动等引起的天体坐标变化，论述了时间的定义，并讨论了星表和参考系，最后回顾了球面天文学术语的历史演变。

本书内容完整，推导严密，具有相当的深度。适合于天文和测绘部门有关工作者，尤其是教师和研究人员阅读参考，也可作为有关研究生的教材或参考书。

球面天文学

［美］ E.W.伍拉德
G.M.克莱门斯 著

全和钧 赵君亮 朱圣源 译
任江平 校

*

测绘出版社出版
海洋出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 · 印张 15 7/8 · 字数 412 千字
1984 年 9 月第一版 · 1984 年 9 月第一次印刷
印数 1—2300 册 · 定价 2.90 元
统一书号：15039 · 新 318

译者的话

本书作者 E.W. 伍拉德曾任美国海军天文台编历室主任，G.M. 克莱门斯曾任该台业务台长和耶鲁大学天文台台长。两人在国际天文界声望都很高，在天体力学、球面天文和方位天文方面造诣很深。本书基本概念清晰，逻辑推导严谨，不愧为球面天文学的一本经典著作。

全书共二十章。前三章论述天球和坐标系的基本概念。第四章至第十三章论述恒星位置(坐标)的变化。其中有由物理效应引起的变化，如视差、大气折射、光行差；还有由坐标系运动引起的变化，如岁差、章动等等。第十四章至第十六章论述时间和有关的概念。第十七章至第十九章论述星表和参考系。最后一章是关于球面天文学术语的历史演变。

国内、国际球面天文学经典著作甚多，新著也不断问世，各有特色。有的通俗易懂，适合初读者入门。有的简明扼要，适合于实际应用中快速查阅。而本书特点则是推理深入，叙述严密，概念清晰，内容完整，用词考究。对天体测量和天文大地测量的研究工作以及教育工作，尤其是师资的提高，研究生的培养等方面具有重要的参考价值。我们深感国内需要这样一本有权威性的球面天文学经典著作，因此特向读者推荐。由于我们译者水平有限，难免有错误及疏漏之处，敬望读者批评指正。

序

本书打算为读者提供一本关于基本方位天文学原理及其最新进展的综合著作。由于这门学科的发展，使布吕诺夫 (Brünnow)、昌维纳特(Chauvenet)、德巴尔(de Ball)、奥波尔策(Oppolzer)和纽康(Newcomb)的一些球面天文学经典著作已显得过时了，但自此以后，没有再出过一本比较完整和严密的著作，而更新的资料则都是散见在浩瀚的文献中。

由于观测资料的长期累积，观测精度的不断提高，以及新的科学问题和技术应用对天文数据提出了更高的精度要求，使得以前使用的许多方法和概念不再适应。特别是数学公式的推导，过去使用第一阶近似已足够，而现在则经常需要到第二阶、第三阶近似，并且还要考虑到平太阳时的不均匀性。

我们在美国海军天文台当前所从事的工作，也促使我们感到十分需要有一本这方面的权威性著作。我们把本书内容局限于球面天文学原理和基本天文观测的理论范围内。对于特殊天文仪器的实际操作细节则不包括在内，而仅概要地提到在航海、测绘及工程天文学中所应用的方法。有些内容在某些经典著作中已被广泛论述，这里就略去了，因为这些内容放在另外的书中更为合适，而且现在已收在一些通俗的出版物中，特别是关于食、中天和掩星这样一些特殊天象的理论；最小二乘法原理及对观测数据进行平差的其它方法；数值方法以及计算技术等。

本书特别注意到对精确和细致的定义进行系统的阐述，并推导同时适用于地球南北半球的公式。通常，在推出近似的实用计算公式以前，先明确地导出完全严密的数学关系式。在应用数学中使用近似公式是重要的，但并不因此需要牺牲思路的严密性，也没有忽视去论证对直接应用而言由于采用近似所引起的误差情况。实际应用中所需的精度经常随着技术的进展和附加要求的增

加而提高，但隐含在所采用的标准方法中的近似性却往往被忽视或遗忘。公式都保持着原来的基本形式。计算机的发展使得经典著作中的对数转换式过时了，而高速电子计算机的发展则全然改变了实际的数值计算方法以及在任何特定条件下所需的变换形式。

1964年在汉堡举行的国际天文协会大会上，对于一些天文常数决定采用新的修正值❶，且即将用于美国及国际天文历书中。修正后的天文数值将略微改变一些公式中的数值系数。本书118～120页中给出由新常数导出的系数。从新的天文单位和光速值得到单位距离的光行时为 499.012^s，以此值代替由旧的光行差常数导出的 498.38^s 及由旧的光速和太阳视差值导出的 498.58^s。

第19章在讨论惯性参考系时，我们故意避开不提马赫原理，虽则对这个原理已有过许多讨论，但似乎这个原理到目前还不能得到任何运算公式。

本书原稿经美国海军天文台航海历书办公室的R.R.罗林斯(Robert R.Raw lings)全文校阅，R.L.邓库姆(Raynor L.Duncombe)、阿.托马斯（Armstrong Tomas）和丹.帕斯库（Dan Pascu)作了部分校阅。他们的校阅使我们得以对本书作出若干改进。

E.W.伍拉德(Edgar W.Woolard)
G.M.克莱门斯(Gerald M.Clemence)
1966年1月

---

❶ 1964年国际天文协会通过了新的天文常数系统，并规定在1968年开始正式应用。在这个系统中包括：（1）定义常数（用定义规定的常数，它们没有误差）；（2）基础常数（直接测定的最精确的常数）；（3）导出常数（根据它们与定义常数和基础常数的理论关系式计算的常数）；（4）行星质量系统（专门在行星运动理论中所采用的一组常数）。

1976年国际天文协会又通过一个新的天文常数系统，并规定在1984年开始正式

使用。这个新系统除了根据新的观测资料对1964年系统中的各常数值作进一步修改外、还作了下面几点改变：(1)对天文学的基本单位给出了定义，在定义了天文学的时间单位和质量单位后，用高斯引力常数 $k=0.01720209895$ 定义天文学的长度单位A，又称天文单位距离；(2)根据以上对天文学时间单位的新定义（1日=86400原子时秒），取消了关于历书时的定义常数；(3)把计算天文常数的标准历元由1900年改为2000年。新的标准历元是公元2000年1月1.5日，即儒略日2451545.0；(4)把天文单位距离的光行时由导出常数改为基础常数。另外，把引力常数 G 作为新的基础常数。——译者注

N

目　录

方位天文学

天文学，如同所有的自然科学一样，需要依赖于观测所得的事实作为它的基础。天文学需要进行两种类型的天文观测：(1)对于投影在天球上的主要天体的视位置和运动作系统的、连续的观测，以求得它们在空间实际的相互间的位置和运动，并且确定行星系和恒星世界的结构及基本动力学定律；(2)用望远镜、分光仪和其它仪器观测单个的天体，以确定它们的物理性质和获得在每一天体上所发生的现象和物理条件的详细资料。

从第一种类型的观测所得的数据，是全部天文科学的必不可少的基础和骨架。它们是理论天文学和引力天文学的直接基础，是解决星系结构和恒星动力学的基本问题及天体物理学中许多问题所必需的，是天文学应用于航海、测绘和精确测时的直接基础。这些观测和对其解释所依据的原理，以及它们应用于实际问题中的理论就是**球面天文学**的主题，本书正是致力于这个主题。

从天文的技术意义来说，**观测**不仅是通过望远镜来监视所发生的天文现象或观察一个天体，而且是为了某种专门目的对特定的数据进行精确的测定和仔细的记录——无论是为某种直接的实际需要或是为了解决那些尚未解决的问题而获取资料。天文台的常规工作就是为上述目的进行观测。对于专门目的所进行累积的观测资料的校核和处理，以及对结果的解释，通常称为对这些观测的讨论。

特别重要的是要维持对太阳、月球、行星及主要恒星的赤经和赤纬视位置进行连续测定的纲要，还要跟从前的测定无关，并且具有尽量高的精度和在长时期中保持不间断的测定。在把方位天文学作为常规工作的天文台内，实际工作是为此目的进行连续

不断的每天的子午观测。这种观测是为在天球上精确建立赤经、赤纬坐标系、建立精确的测时系统和确定主要的天文常数所必需的。应用这些观测建立的位置和时间参考系以及由之导出的基本天文常数、行星表和基本星表是整个天文学及其实际应用中所必需的。

在许多不同的天文台中安排长期的均匀观测，是为了在一段相当长时间内精确确定太阳、月球和行星的运动所需要的，也是为了确定恒星自行对恒星位置进行重复测量所需要的。为了得到不断改进的基本天文常数和行星系的诸要素，以及确定精度逐渐提高的恒星位置和自行值，必需连续维持这些观测纲要。在天文学、航海和其它应用中所需的恒星和其它天体的星历表的计算，实质上仍是一种外插过程，因为大量的常数和数值参数必须根据观测来经验地估算它们的数值，因此不可避免地带有偶然误差和系统误差，这是根本不能用科学的测量方法完全消除的。连续地外插到将来所需的自行和基本天文常数值，这将导至误差逐渐累积。而在恒星动力学和星系结构的许多问题中，则需要比已知的数量更多和系统误差更小的自行值。目前暗星的自行的精度却被它们所依据的恒星位置的偶然误差大大地淹没了。

为了得到航海及天文学的其它应用所需的精度，对于计算天文历书所用数据需要相应更高的精度，而在建立基本理论和有关用表、测时及对一些基本天文问题的研究中还需要更高的精度。如果没有对恒星、太阳、月球和行星的连续观测作为改进行星表和基本恒星表的基础，那么所用的各种标准就不能够长期维持下去。同时，观测也可对现有的各种表和历书的精度进行不断的校核。另外，观测还为精确计时和其它天文应用所必须的不能预计的不规则的地极移动和地球自转的变化提供连续的记录。

如果天文学继续以它的不懈发展了二千年的并作为自然科学完美典型的严密性和精确性作为特点的话，如果天文学的实际应用和测时不断对所需的技术提出越来越高的精度标准要求的话，

以及如果天体测量的观测纲要对解决天文学和天体物理学的许多问题还有用的话，那么，持续不断地进行这些基本天文方位观测则是非常重要的事。

第一章　天球及天文学参考系的性质

如果在地面上直接观测地球，那么看上去除了不规则的地形起伏外，就是一片辽阔的平原，上面笼罩着巨大的半球形穹顶，天空则与地球相交于圆形的地平线。不管观测者在地面上什么地方，他似乎总是处于这个半球形的中心，而所有的天体仿佛点缀在这个半球上。

天体位在圆球表面上，这是观测者产生的一种表象，因为人的视力不能够分辨出这些天体的相对距离，所以看来它们似乎都一样远。人们所能直接辨别的只是天体的**方向**，任意两个天体总是好像出现在同一球面上，而它们之间在这个球面上的弧长就等于从观测者到这两个天体的视线所夹的角度。地球本体使我们无法观测到地平线以下所有的外部物体，我们所能看到的只是整个地球表面的很小一部分，它的弯曲程度之小与平面简直看不出什么差别。

这个看上去笼罩着地球，且以观测者为中心的表观圆球面便称为**天球**。要是天体确实位于以地球为中心的一个球面上，那么这时天空的形象就同我们现在所直接观测到的情况一模一样。由于在球面上处理点和弧段比在空间处理视线和角度要简单，方便得多，因而尽管直接观测到的种种现象同它们的物理意义并不相同，但是我们在处理实际问题时可以把天球**当作**是真实的而不仅仅是假想的一个球面来加以考虑。系统的描述天体投影在这个天球上的视位置和视运动情况便是**球面天文学**的研究课题，它与**理论天文学**不同，后者所考虑的是天体在宇宙空间中的实际位置和实际运动以及它们的物理解释。根据球面天文学原理，用天文观测确定天体在天球上的视位置的学科称**天体测量学**，有关天体测量学所应用的测量仪器的原理和使用方法的学科称**实用天文学**。

天球上的视圆弧对应于观测者视线方向之间的夹角。大圆是通过观测者的平面与天球的交线，而小圆则相应于以观测者为顶点的圆锥与天球的交线。

天球的半径是任意的，它没有具体的数值，因为我们关心的只是以天球中心为顶点的角度在天球表面上所张的圆弧。不论在什么地方，任何一名观测者好象都是处在天球的中心，因此，为了正确地反映这种情况，我们可以把天球半径当作无限大或**数学上的无穷大**。这时可以认为任何观测者总是位于天球的中心，而与他所处的位置和运动情况没有任何关系。通过处于空间不同位置观测者的所有平行线和平行平面都与天球相交于相同的点和同样的大圆，但如果观测者在天体之间所处的位置发生了变化，那么在观测者看来这些天体的方向就有所改变，因而它们在天球上的位置也就不同了。

如把天球想象为一个有限大的球体，这时如要描述观测者所看到的天空形象，必须设想一旦观测者改变了它的空间位置，天球的中心也将随着观测者而移动，通过观测者的直线和平面随着观测者平行移动，始终保持在球面上交出相同的点和相同的大圆，就同无限大天球中的情况完全一样。

观测者看到的天空形象，在这两种情况下是相同的，但是把天球半径当作无穷大更方便些。然而无论哪一种情况，天球的形象总可以通过作图的方法表示在一个任意长半径的有限大的球面上，而观测者则位于这一有限球体的中心，同时，通过不同位置的观测者的所有平行线和平行平面就用经过球心的一根直线和一个平面来表示。

在本书中，所有有关天球的图形，除了明确说明的以外，都以从**天球外**所看到的形象来表示。因此，它和通常用来表示地球表面的绘图方法是很类似的。

天体的视运动及由此所定义的天球上的圈

由于地球的自转，天球就好象以同地球实际自转相反的方

向，带着所有的天体每天围绕地球转动一周。由此所产生的天体在天空中的周日运动轨迹好象是一些同轴圆的圆弧，这些同轴圆的轴线与天球相交于直径相对的两个端点。一般来说一个在地平线之上，一个在地平线之下，而这条直径便是天球的视周日自转轴，这两个端点称为**天极**。天球上与两个天极距离相等的大圆称为**天赤道**。

天极是通过地轴的直线与天球的交点，为了与数学上无穷大球的概念取得一致，观测者所看到的天球上的这两个点，同通过他本身所处位置而且和地轴平行的直线与天球的两个交点相重合。因为观测者好象是固定的，而且总是在天球中心，他可以把天体的相对周日运动解释为天球带着这些天体一起绕着通过他本身所处位置的一根轴线进行实际的转动。

只是由于天体离开观测者很远，上述设想才能成立。除极少数情况外，天体的距离都极其遥远，所以它们的视运动几乎完全是由观测者随着地球的自转所引起的，而且对所有的天体来说，它们的视运动都是非常相似的。因此，这些天体在天空中作视运动时，它们在天球上的相对位置实质上始终保持不变，就好象固定在天球上，由天球带着它们一起旋转。

实际上，相对于观测者的周日运动都是绕着位于地轴上的一个中心在转动，观测者自己同样被带着绕这个中心转动，因此他在天体之间的位置是变化着的。而对于特别靠近我们的天体来说，它们在视线方向上的变化多了一项微小的运动，它叠加在围绕平行轴的圆周运动上。但是对于这种微小的运动，不仔细地用仪器测量是觉察不到的。在所有天体的周日运动中，还存在着由于其它因素所造成的更小的不规则变化，但是用普通的直接观测同样也觉察不到。

因此，从周日运动觉察不到天体相对位置的变化，但有极少数天体，特别是月球，由于它本身在空间相对于地球的实际运动，我们很容易觉察到它们在恒星间位置的逐渐变化。因而，看

起来这些天体除了随着天球的旋转与恒星一起转动外，本身也还在天球表面上移动。恒星非常遥远，甚至使用高精度的仪器，也需很长时期才能发现它们本身在空间相对于地球运动的任何效应。在一般人的感觉中，它们好象永远固定在天球上，所以过去通常称为**固定的星**，但这个名词现在几乎已经不用了。行星这个名词的起源原来系指徘徊的星，最早人们把所有在旋转的天球上不断移动的天体一概称为行星。

行星在空间相对于地球的运动，造成它们在旋转天球上相对于恒星的视运动，其中一部分原因是地球绕太阳公转造成的。具体来说，因为地球的这种周年轨道运动，太阳一方面参与天球的周日旋转，同时又在天球上向东缓慢地移动，每年在天球上绕过完整的一周。太阳在恒星之间的周年视运动轨迹称为**黄道**。在古代，人们认为这种周年运动就是太阳绕着静止的地球的实际运动；现在，在许多实际应用中，上述观点常常从形式上保留了下来，这一点同对于周日运动的处理是一样的。

黄道、天赤道和地平圈都是在天球上建立几何坐标系的有利的基础，应用这些坐标系可以把在空中看到的天体的视位置，以它们相对于天球上这些主要圈的位置精确地表示出来。

位置和时间的参考系

把天球分成为看得见和看不见两部分的地平圈，以及由天球的周日运动所确定的地平圈上的一些基点，组成了一个可以用来系统地描述天空形象的天然参考系。一个天体在任何特定时刻和地点的视位置，可以定量地用下列两个坐标严格地表示：（1）这天体在天空中，自地平竖直向上的高度角；（2）在地平圈上位于天体正下方的那一点对于东南西北这些基点的角距。为此，就需要用一条更精确的参考线来代替受到局部地形不规则起伏所影响的可见的地平线，这参考线称为**天文地平圈**，它是一个严格的大圆，这大圆离我们头顶上方铅垂线指向的那个点为90°，而头顶上那个点称为**天文天顶**。

可是，仅只用这个系统还不能够足以描述在旋转天球的表面上与太阳、月球和行星的视运动有关的一些现象。为了把天体的视位置同天球本身固定在一起，而与天球周日自转时相对于地平圈变化的天空形象不发生关系，一种自然的方法是把天赤道或黄道当作基本参考圈，就象用地平圈的几何表示法那样。与基本圈正交的所有大圆都通过基本圈的两个极点，并组成参考系的参考副圈。天球上任何一点的位置，可以用下面两个量表示：（1）该点到基本圈的角距，这角距在通过该点的副圈上度量；（2）通过该点的副圈与基本圈交点的位置，这位置是由基本圈上选定的基点或原点到

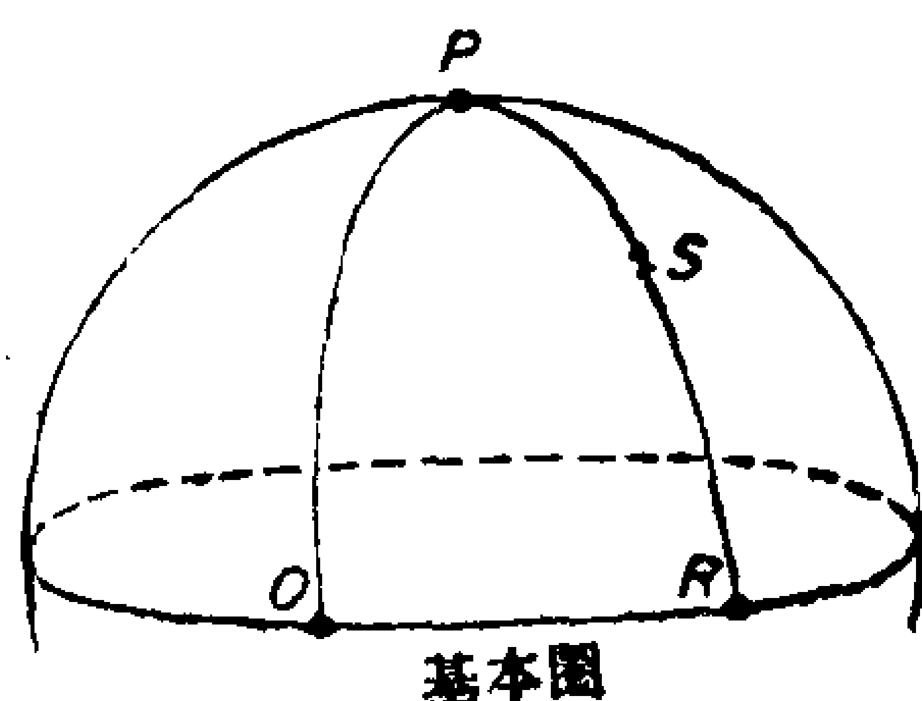


图 1

球面坐标：

P——基本圈的极；*O*——原点；*OP*——通过 *O* 点的副圈；*PR*——通过天球上 *S* 点的副圈。

S 点的坐标：*RS*——*S* 点到基本圈的角距，通常以向一个极点计量为正值，向另一个极点计量为负值；*OR*——自 *O* 到 *R* 的角距，通常自 *O* 点按规定的方向计量。

这交点的角距来表示（见图 1）。既在赤道上又在黄道上选来作为原点的那个点，是这两个圈的两个交点之一，太阳每年三月通过该点由南到北越过赤道。习惯上把这点称为春分点，另一个交点称秋分点；可是在地球的南半球，这两个名词的含义与实际季节是不相符的。

这种表示天体在天球上视位置的方法，实质上是以天球上的弧段来表明天体**对观测者的方向**，用这些弧段量度天体对于参考系中一些点和圈的视角距，而这些点和圈是对应于观测者能够识别的一些选定的**基本方向**。

对于精确描述天空形象来说，测定时间的方法同确定天体位置系统一样是重要的。有史以来，太阳、月球和恒星的视运动就被作为测量时间的天然而可行的基础。日，它是光明与黑暗循环

的标志，与太阳的周日运动相应；月，最初对应于月球相对太阳在天球上运动过程中月相变化的周期；年，它是季节循环的标志，由太阳在恒星间的周年运动确定。昼和夜是以天体在其周日运动中的进程来区分的，昼夜的流逝还可用更为细分的小时（时、分、秒）来表示，通常是由观测选定的天体在周日运动路径中的位置来确定的。同样，在古代岁月的流逝是由观测太阳在周年运动轨道上行经恒星间的位置来确定的，这可用人们在晨昏时看得到的恰在地平线上的星座来表示。

现代的测量时间方法，在原理上与古代并无不同，不过只是理论基础更严密和使用了许多精确的机械辅助手段。因为人类活动在很大程度上受到白昼和黑夜的支配，日常生活中所用时间的实际测量是以太阳的视周日运动为基础的；可是对于由天文观测的实际测量和确定时间来说，则用恒星的视运动更为方便和精确。根据直接观测恒星所确定的时间与时钟读数进行比较来校正时钟。历史上，直到钟表得到普遍应用的较近的年代以前，民间的习惯，在夜间是根据一年中不同季节人们熟悉的星群来近似估计时间，在白天则使用日晷或估计太阳在天空中的位置来确定时间。

参考系的实际建立

坐标系的几何定义以地平圈、赤道和黄道为基础，时间计量的几何定义是以太阳和恒星的视运动为基础，这两个定义均不依赖于对确定天球上的那些基本圈的观测现象作任何特别的理论解释。这些参考系是以那些引起联想的直观表象来直接定义的。对于一个观测者来说，不管他在地球上的什么地方，在他看来好象他总是在天球的中心，天球上的基点和基圈是由他所在位置上直接观测到的那些现象所确定的。天顶和地平圈由地方铅垂线和水准面确定；天极和赤道由天体周日视运动的地方形象确定，黄道和二分点则由太阳的周年视运动确定。在古代，当地心说和把太阳的周年视运动认为是自然界的真实运动的观点盛行时，这些坐

标系最初是在这个基础上由经验定义的。后来把太阳的视运动解释为地球运动的反映，才使参考系可以从力学上来定义，但在实质上没有改变几何形式的定义。

然而，对天体**视运动的直接观测**，仍继续保留下来仅用作实际确定天球上参考圈的位置；因而参考系的主要基础，在实用中本质上仍是由经验确定的。由抽象定义的点和圈所构成的几何参考系，事实上是无法用天球上看得到的点和圈来加以描述的，因而我们不能直接辨别它们，也不能直接依据它们来进行观测。实际上能被我们觉察的，只有天体本身以及它们在天球上**相互之间或相对于看得见的参考目标**，如自然地平和铅垂线的视位置。因而，实际应用时为了识别参考系和进行天文观测，必须设法完全由观测天体相互之间及天体相对于用铅垂线和水准器体现的垂线和地平的视位置和运动，来辨认天球上基点和基圈以及测量天体相对于这些基点和基圈的位置。

为达到这一目的所使用的方法是将恒星作为位置测量的直接参考点。由于恒星相互之间的位置几乎没有变化，它们在天球上组成一个可见的标记点系统，应用这个点系可以观测到由经验定义的基本圈的视运动。由于恒星的周日视运动，它们显示出天球的周日旋转，可用来确定天极和天赤道；恒星还可以在旋转的天球上作为参考点以确定太阳和其它移动的天体在天球上的视运动。在分布于天球上的恒星中选一个恒星系统作为标准参考点，测定太阳相对于参考点的视运动以及观测这些参考点的周日运动可以得到基本圈在恒星中的位置。为了确定标准恒星相互之间的位置和基本圈在标准恒星中的位置，需要长期对太阳和恒星，有时还要对行星进行系统的观测，由此可以得到这些天体的坐标。为了确定更多的恒星或其它天体的坐标，实际观测中测量的量是这些天体离参考星的角距，这些参考星是测定天体对坐标圈位置的中间媒介。

自远古时代起，人们就已应用选定的恒星所组成的网络来作

为直接参考系。在明确建立赤道和黄道的抽象几何概念以前，最早期的天文观测就是以恒星背景作为测定太阳、月球和行星视运动的自然基础。古代巴比伦的观测者早就开始系统地应用在月球和行星视运动轨迹附近明亮的单颗恒星作为参考点，天体在天球上的位置是以离这些标准恒星的角距表示的。这种做法现在仍是由天文观测确定天体位置的必要手段，不过现在不是限于应用单个恒星作为独立参考点，而是进一步应用一组标准恒星作为一个完整的系统来确定几何坐标系。在精度要求不高时，可以应用十分简单的方法来建立坐标系和根据这些坐标系进行主要的天文测量。为此，古代很早就想出了一些成功的方法。仅只是在现今要求极高精度时，才需要现代精密复杂的仪器，精心制订的观测纲要以及处理和讨论观测结果所需的严密理论和数学计算。天文学的基础，在付诸应用以前早就完全建立起来了。

下一章将根据天体在天球上直观表象的经验基础，提出坐标系的几何定义。在任意时刻任何地理位置，天球形象的表示方法以及天体的视位置和视运动是从第三章到第七章的课题。从第八章到第十三章将讨论坐标系的动力学理论以及将这种理论应用于把视位置归算到这些坐标系的方法。第十四章到第十六章中论述时间计量系统及其动力学基础。最后，在第十七章、第十八章和第十九章中叙述为建立位置和时间参考系所需的实用技术。

球面天文学的数学方法

球面天文学的理论原理以及它们在天体测量学中的实际应用，基本上取决于球面上抽象的几何学，因为直接观测到的现象，是以天球上的弧段与角度之间的关系表示的。天体测量所直接观测的，几乎完全是测量视线之间的角度，这些角度代表天体在天球上相互之间的位置或相对于可观测的参考点的位置。还需要经常测定时间，它同样是由角度表示，它代表在观测瞬间某些特定天体在其周日运动圈上的位置；实际应用时，时刻系由钟表给出，而钟表则必须经常与观测天体直接测定的时刻校核。因

此，球面天文学和天体测量学需要的主要数学手段是球面三角学。

必须仔细区别三种不同种类的角度测量。天球上两点之间的角距是观测者到这两点的视线之间的夹角在天球面上所张的弧段；因而也是通过这两点的大圆弧段。两点之间只能有一个大圆，除非另有规定，天球上的角距总是沿大圆弧量度的，但偶而需要用小圆的弧长来连接两点。第二种角度测量的是不通过天球中心的某一平面内的弧长；通过同样的两点可以作无数个不同的小圆。第三种角度测量是测量两个大圆的交角，这是通过观测者的两个大圆平面相交的两面角。

球面上，由任意三个不交于同一点的大圆构成的图形称为球面三角形。一般来说，三个大圆把球面分成八部分，每一部分都是一个球面三角形。若已知一个三角形中的任意三个部分，无疑就可以确定这三角形的其余任一部分。当某些部分超过180°时，或者如在平面几何中一样已知两条边及其中的一条边的对角时，才会有例外。在这些条件下，常有两种解，但如果已知的是小于180°的三个角，在平面几何中这三角形是不确定的，而在球面上则是易解的。

球面三角学的主要任务是：在一个球面三角形中由已知的任何三部分，求其余三部分中的一个或一个以上的部分。在天球上，三角形的边和角可以是360°以下的任何数值。各部分之间总的基本关系，对于任何边长的三角形都成立，因而可以直接应用于求解球面天文学中的三角形，但至少需要确定那些超过180°的每条边或角的正弦和余弦的代数符号，以确定其象限。如果除了已知的三个部分外，还知道了待求部分之一的正弦或余弦的代数符号，那么一般球面三角形总是确定的，否则总是可能有两个解。在球面天文学的绝大多数问题中，所求问题的条件都提供了能得到确定的解所需的资料。

为便于使用时参考，下面不加证明列出球面三角形的三个角

A、B、C以及与这些角相应的三条边a、b、c之间的基本关系式：

$$\begin{aligned}&\sin a\sin B=\sin b\sin A,\\&\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A,\\&\qquad\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A;\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\sin B\sin a=\sin A\sin b,\\&\sin B\cos a=\cos A\sin C+\sin A\cos C\cos b,\\&\qquad\cos B=\sin A\sin C\cos b-\cos A\cos C;\end{aligned}\tag{2}$$

$$\sin A\cot C=\sin b\cot c-\cos b\cos A.\tag{3}$$

原则上为了得到各部分的数值不加限制的任意球面三角形的完全解，用这些公式已足够了。但如果应用从上述公式导出的一些附加式子，在作实际数值计算时会方便得多。

特别是，若已知的三条边，用（1）式的第三式虽然可求三个角，但应用下式可得到更为满意的结果：

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$\tan^2\frac{1}{2}A=\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}.\tag{4}$$

同样，如已知三个角，不用（2）式第三式，用下式可求得三条边：

$$S=\frac{1}{2}(A+B+C),$$

$$\tan^2\frac{1}{2}a=\frac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}.\tag{5}$$

类似地，如已知两条边及其中任一边所对应的角，或两个角及其中任一角所对应的边，可用（3）式以及（1）或（2）式的第一、第三个式子求其余部分，但如应用（1）或（2）式的第一式利用纳皮尔法则，则计算可更为迅速：

$$\tan\frac{1}{2}c=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a-b),$$

$$\tan\frac{1}{2}c=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\tan\frac{1}{2}(a+b); \qquad (6)$$

$$\cot\frac{1}{2}C=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}\tan\frac{1}{2}(A-B),$$

$$\cot\frac{1}{2}C=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\tan\frac{1}{2}(A+B). \qquad (7)$$

用正弦求小角比用余弦更为准确，对于接近90°的角则用余弦比正弦准确。但用正切或余切求一个角总是比用其它函数求更为准确。

当一个球面三角形的顶点为构成另一个球面三角形的边的大圆的极点时，这两个三角形就互为极三角形。如一个三角形的三条边为a，b，c，三个角是A，B，C，则极三角形的边为$180°-A$，$180°-B$，$180°-C$，角为$180°-a$，$180°-b$，$180°-c$。

角度的值，通常既可用六十进制以度为单位（再可分为分、秒）来计量，也可用弧度为单位来计量。有些书中，采用百进制，每度是一个直角的百分之一，每度为100分，每分为100秒。在为一些特殊应用进行计算时，还使用一些其它的单位：例如，密位制，1密位是一个直角的1/1600，或是0.05625°。

在由微积分运算导出的公式或包含角度数值乘积的公式中，需要以弧度表示角度或者导入适当的转换因子。两个或两个以上

角度的乘积如果要用度分秒来表示，那么在相乘以前**除一个角度外**，应把所有其它角度都化成弧度。所需要的转换因子都是从$360^\circ = 2\pi$弧度这个严格的关系式求得的：

$$1'' = 0.000004\,8481\,36811\,09536 \text{ 弧度},$$

$$1' = 0.00029\,08882\,08666 \text{ 弧度},$$

$$1^\circ = 0.01745\,32925 \text{ 弧度} .$$

球面上的面积以平方度或平方弧度表示。设有一个截面为正方形的角锥体，其顶点在球心，其棱边相交成1°的面角。这个角锥体的四个面在球面上截出一个四边为1°的弧所围成的区域，这个区域以及任何其它形状的等面积区域的面积值就是1平方度。顶点在球心，横截面为任意形状的锥体在单位半径的球面上截出的面积，或在任意半径R的球面上截取的面积被R^2除的值称为**立体角**。立体角的单位是平方弧度，即**球面度**，球的表面积是$4\pi R^2$或4π球面度。因为大圆的圆周是$2\pi R = 360^\circ$，整个球面的面积为：

$$4\pi\left(\frac{360^\circ}{2\pi}\right)^2 = \frac{129600}{\pi} \text{ 平方度},$$

或很近于41253平方度。一个球面度为$32400/\pi^2$平方度。

在球面天文学的实际运算中，严格公式常常没有什么优点甚至没有实用价值。应用近似公式却常可以更容易更快地得到所需精度的结果。有利于数值计算的近似公式，通常是由严格公式进行级数展开，特别是应用泰勒定理而得到的，

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \Delta x + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 (\Delta x)^2 + \cdots\cdots$$

对于许多计算仅需保留右边的前两项就能得到所要求的精度。当Δx是小角时，可用上述角度相乘的规则得到第三项中因子$(\Delta x^2)/2!$的以角度为单位的数值。例如，若$\Delta x = 5''$，

$$(\Delta x^2)/2! = 5''(5 \text{ arc } 1'')/2 = 0.00006'' .$$

从正弦、正切和余弦的泰勒级数显然可知，当一个角很小

时，它的正弦和正切近于相等，它们的数值又十分接近于角度的弧度值，而余弦很近于1：

1″	0.00000 48481 36811 10
sin 1″	0.00000 48481 36811 08
tan 1″	0.00000 48481 36811 13
1′	0.00029 08882 1
sin 1′	0.00029 0882 0
tan 1′	0.00029 0882 2
5′	0.00145 44410
sin 5′	0.00145 44405
tan 5′	0.00145 44421
1°	0.01745 33
sin 1°	0.01745 24
tan 1°	0.01745 51
cos 1″	0.99999 99999 88
cos 1′05″	0.99999 9950
cos 10′50″	0.99999 50。

应用这些近似值，许多计算可以大大简化而不会显著地降低精度。

如球面三角形的所有三条边都很小可以略去它们的立方项时，这三角形可以当作平面三角形来处理，因为当用近似式 $\sin a = a$ 和 $\cos a = 1 - \frac{1}{2}a^2$ 代入及略去三阶以上的小量时，基本关系式（1）就简化成平面三角形的关系了。

当球面三角形的一个角 C 和对边 c 很小可以略去它们的平方项时，A 角和外角 $180° - B$ 近于相等。应用（2）式第二式，对字母作适当的循环互换，则

$$C \cos b = \sin(A + B)$$
$$= \sin[180° - (A + B)],$$

或 $$180°-B=A+C\cos b.$$

若 $a=b$，A 角和 B 角都很接近于 $90°$，由（1）式中第一式得

$$c=C\sin a$$
$$=C\sin b,$$

这是 A 和 B 两顶点之间的大圆弧的长度。

如只要求到第一阶近似，由球面三角形三个部分的微小变化引起的其它任一部分的变化，可以由对边和角的关系式进行微分的微分公式求得：

$$\sin C\,da=\sin b\,dA+\cos C\sin a\,dB+\sin A\cos b\,dc,$$
$$\cot a\,da=\cot A\,dA-\cot B\,dB+\cot b\,db, \tag{8}$$
$$da=\cos C\,db+\cos B\,dc+\sin C\sin b\,dA,$$
$$dA=\sin C\sin b\,da-\cos c\,dB-\cos b\,dC.$$

第二章　天球坐标系

实际观测应用中，最重要的几何坐标系是以地方天文地平作为基本参考圈的坐标系。它是表示地方天空形象的一种方法，是在旋转的天球上建立和应用坐标系必需的中间媒介。把直接观测到的天空形象用严格的几何方式系统地进行表示时，它是实用中唯一可用的坐标系。在最早的年代，它是实现上述目的的最自然的方法，因为在天球上的所有圆圈中，地平是在自然界中唯一能看得到的在天空中被近似地勾划出的圆。又因为由铅垂线所具体代表的垂线，以及由水准器所定出的水平线是在几何坐标系中唯一能容易直接观测的参考方向，所以这个参考系一直是实用中必不可少的系统。其它的基本方向和参考圈或多或少只能从对恒星和其它天体的观测加以延伸才能确定它们的位置。无论是要定出基本参考圈在标准恒星中的轨迹，或是要通过相对于这些恒星的实际位置测量，以使位置参考于旋转天球上的坐标系，这两种工作都需把地方地平系作为基本的媒介。

在进行天体测量的仪器中，配有度盘的瞄准装置是必不可少的部件，这些度盘具体代表了天球上的一些参考圈。观测的主要操作过程包括瞄准便于观测的参考点来确定度盘上的基准点，然后瞄准天体来确定它们离这些直接参考点的角距。应用仪器度盘的基准点所具体表示的直接参考方向与天文坐标系的基本方向之间的关系，可以从直接的角度测量得到天体的坐标，但这个关系的确定，直接或间接地取决于基准点方向对地平参考系的关系，地平参考系是由看得见的铅垂线所标志的地方天文垂线确定的。

地方地平坐标系

我们看到的地球表面投影到天球上的线是可见地平圈或称视

地平圈。总的来说它是不规则的，但在海洋或平原上实际上它是圆球上的一个圆，它是由与地球表面相切的视线所确定的，然而它不是一个大圆。因为如果观测者在地面以上的相当的高度处，视线构成的圆锥与地球体的切线就是一小圆。

天文地平圈　多少有点接近于视地平圈，它是一个大圆，是通过观测者且与地方重力方向正交的平面与天球的交线。这个大圆是地平坐标系的基本圈。主方向是由重力确定的铅垂线且称为**天文垂线**；天文垂线未必甚至不是经常与地球的实际表面严格正交，即使在“水平”区域内也未必精确正交，但在地势平坦的区域与地球表面很近于正交，且总是与静止的液面正交。

任何一个与天文垂线正交的平面为水平面。天文地平圈是通过观测者的水平面与天球相交的大圆。有时为了区别起见把这个圈称为**感觉地平圈**；而把通过地球中心的水平面与天球的交线称为**理想地平圈**。可是,所有与垂线正交的平面,它们在无限远处与天球的交线都是同一个大圆，因为这些平面是平行的，它们在无限远处可认为会合于同一处。通常用与地球表面相切的平面来定义地平圈，但是这个定义不能令人满意，因为显然不能采用实际的地球表面来达到这一目的。因而这种定义方法，取决于选择某些特定的假想表面来代表地球的形状。

基本圈的几何极点称为**天顶**和**天底**。真天顶或**天文天顶**是垂直向上或头顶上的点，即铅垂线向上无限延长与天球的交点；**天底**是与天顶相对的在直径另一端的点。

通过地平的副圈是通过它的极点的大圆族，即通过天顶和天底且必定与地平正交，称为**地平经圈**,这些圈的平面称为垂直面，天文垂线是这些垂直面的公共交线。平行于基本圈(地平圈)的小圆族称为**地平纬圈**或**等高圈**。

通过地平上方的天极点的特殊地平经圈为**天球子午圈**，因为它是一个大圆，它必然通过天球的两个极点，又因为它也是一个地平经圈所以它也通过天顶和天底且与地平正交。与子午圈成直

角的那个地平经圈称为**卯酉圈**。

子午圈的平面与地平圈的平面的交线为**子午线**。子午圈及卯酉圈与地平圈相交的点是地平圈上的基点——北点和南点，东点和西点。**东点**是卯酉圈与天体升起处那段地平弧段相交的点；相对的在地平圈另一端与天体落下处地平圈上弧段相交的那点是**西点**。**北点**指向东点左边90°，地平圈上方的那个天极点是北天极或南天极取决于观测者在地球表面上的位置是在北半球或南半球而定。北点和南点是卯酉圈的两个极点，东点和西点是子午圈的两个极点。

取子午圈和天文地平圈作为主要参考圈，地平圈上的一个基点作为这个参考圈上的参考零点。天球上任一点相对于这个参考系的位置，由该点的地平纬度或高度（或者它的天顶距）及地平经度或方位角来表示。

高度H是离天文地平圈的角距，沿通过该点的地平经圈量度，自地平向上量为正，向下量为负。它可用观测者到该点的视线和到通过该点的地平经圈与地平圈相交的垂足的视线之间的夹角来表示，它也可以用这两条视线在地平经圈上所截的弧段来表示。**天顶距**z是从天顶沿着地平经圈量测的角距，它是高度的余角，在天顶为0°，到地平变为90°，而在天底为180°。用代数式表示$z=90°-H$。当$z>90°$，在地平下的角距称为**俯角**，其数值是$z-90°=-H$。例如，10°的俯角其高度为－10°，或天顶距为100°。

方位角A，是在地平圈上从选定的零点到通过该点的地平经圈与地平圈的垂足之间的弧段。它也是通过该点的地平经圈与通过零点的地平经圈在天顶点所张的角度，或者是这两个地平经圈平面所夹的两面角。方位角在实用中有多种不同的量度方法，但一般常从北或南点量起，向东和向西自0°量到180°，或连续向东或向西量到360°。为避免搞错，往往需要对量度所用的方法作出说明。例如在航海学名词中，地面目标的方向以**真方位角**表

示，它是从北点量起的方位角，向东自0°连续量度到360°。

在地平圈上一个点的方向，常依据这点靠近东点或西点，而自靠近的那一点量起，并不是从北点或南点量起，在地平圈上从东点或西点量起的方位角的角距称**幅角**。

在旋转天球上的坐标系

从观测者看来，地平系的圈是**固定在天空上**的，当天球旋转通过这些圈时，它们不参与视周日运动而保持不动。为在旋转的球上用几何方法表示天体的位置，使天体不必因相对于地平系中固定的圈而不断改变它的地方形象，这就需要一种固定在天球上随天球一齐旋转的坐标系。

为此，在实用中使用以天赤道和黄道为基础的坐标系。在观测天文学中赤道系是主要的参考系，但在理论天文学的许多研究中，黄道系则更为优越。

赤道系

这种系统的基本圈是天赤道，它是由地球的自转轴确定的。赤道是一个以天极为几何极点的大圆，它的平面与天球的视运动旋转轴正交，赤道上任一点距天球的两个极点都是90°。

因为黄道和赤道都是大圆，赤道与黄道相交的两点相距180°，这两个交点为**二分点**；在黄道上离二分点90°的两个点为**二至点**。太阳在周年视运动中自赤道南部到北部经过的那个分点传统地称**春分点**，相对的一个分点称**秋分点**，因为太阳到达这两个点时分别为地球北半球的天文春季和天文秋季的开始。但这两个名称在南半球却名不符实，因此宁可用三月分点及九月分点来区分这两个交点。春分点的另一个名词为白羊宫起点，因为黄道十二宫的第一宫为白羊宫。在不引起混淆的情况下，往往就仅使用春分点这个名词。

赤道系的副圈是通过天极的大圆族。通过二分点的副圈称**二分圈**，通过二至点的副圈称**二至圈**，二分点是二至圈的极点。过

去曾有少数作者把二分（二至）圈不适当地定义为通过黄极而不是天极的大圆。二分圈和二至圈是互相正交的。

赤道和二分圈是赤道坐标系的主要参考圈，春分点是参考零点。天球上任一点离赤道的角距，在通过该点的副圈上量测，自赤道向北量为正，向南量为负，此角距称为该点的**赤纬**。春分点和通过该点的副圈与赤道的交点在赤道上所截的弧段称为该点的**赤经**，自春分点向东沿着天球连续量度，它等价于在天极上两分圈与该副圈之间的夹角。

有时用极距代替赤纬作为赤道系的一个坐标值，自 0° 计量到 180°；若用代数式表示，北极距等于 $90°-\delta$，南极距为 $90°+\delta$，这里 δ 为赤纬。在某些天文计算中，尤其是天文导航中，应用从春分点沿赤道向西计量的角距（即直接以 $360°-\alpha$ 代替赤经 α）比较方便，这种计量的坐标以前称**正向赤经**。但在国家航空历开始正规出版后不久，就采用了**恒星时角**这个名称。后来在航海历中也采用了，于是恒星时角就成了普遍采用的名称。

从赤道系基本参考圈的定义以及把天球当作数学无穷大的概念，显然可知这个坐标系不取决于观测者的地理位置。又因为它参与天球的周日旋转，因此坐标值不取决于它在周日圈上到达的位置。所以用赤道坐标来认定天球上点的位置是一种表示天体在旋转天球上的视位置的方法，这种视位置与任何时刻任何地点相应于地平圈的地方形象无关。

然而，赤道系的参考圈的位置在天球上不是绝对固定的。从古代的观测中就发现天极和赤道在恒星间缓慢地移动着，因而造成二分点沿黄道的向西移动，这就是二分点岁差，以后更精确的观测发现叠加在岁差上还有一个周期更短的振荡运动，称为章动。因为天球上的极点和赤道的位置由地球自转确定，因而岁差和章动必然是由于自转轴在空间方向的变化造成的。虽则古代从地球静止不动的假说出发，用一个缀满恒星的假想圆球的运动同样能很好地描述岁差现象，自转轴在空间的运动是由于太阳和月球对

自转地球的引力引起的。当参考圈在天球上移动时，天球上任一固定点的赤道坐标会缓慢地变化，对两个不同时刻的坐标进行比较，如果时间间隔较长，足够觉察参考圈的移动时，这种变化就必能识别出来。

时角及时间的实测

天赤道与地平圈相交于东点和西点，因为这两个点是子午圈的极点，也是地平上离天极为 90° 的点。赤道与地平倾斜相交成一固定角度，这角度取决于观测者的地理位置，等于天极高度的余角。赤道的半个圆在地平上，另外半个圆在地平下；只有当天极与天顶重合时——观测者位于地球的北极或南极——赤道才与地平重合，这是唯一的例外。

赤道以及平行于赤道的各小圆，与周日圈重合。任一瞬间天体在它的周日运动轨迹上的位置，可以应用天极上的角度方便地测量出，这个角度是子午圈与通过该天体的赤道副圈之间的夹角。这个角也等于子午圈及副圈在赤道上所截的弧段，因为根据天体的周日运动，可以用这个角测量时间，所以称它为**时角**。时角**向西**量，即沿周日视运动的方向量度时符号为正，它自子午圈与地平以上的那半个赤道的交点开始量度。天体在连续的每一周日圈中的时角运动就是测量它从这一次过子午圈到下一次过子午圈之间所经过的行程，这是用周日运动计算时间推移的一种方法。时角的运动是由天球周日自转，以及天体在旋转天球上自身的运动（即使有也很小）造成的。在任一瞬间天体的时角值，是天体过子午圈后经过的时间间隔的量度，单位是天体完成一整周周日运动所需的时间间隔。

因此为了测量时角，从子午圈开始把赤道均分为 24 段弧段，每段 15° 称为小时，以此来代替角度计量单位——度。时角通常不是以弧段而是用时间计量单位表示，以 $1° = 4^h$，$1^h = 15°$ 的相应数值从子午圈开始向西自 0^h 计到 24^h。天体在完成了每一整周的周日运动中，它的时角移动了 24^h。虽然测量时角是用与时

间单位相同的单位表示，但时角实际代表天体在周日运动轨道上相对于子午圈位置的一个几何角度。但是以时角表示的这个几何角度的数值，也是天体从过子午圈瞬间起到这个位置瞬间所经过的时间长度的一种方便的测量。作为测量**位置**的单位，1^h 的单位对于所有天体都是 15°**角度**，而作为测量**时间**的单位，1^h 的单位是天体作 15° 角度运动需要的**时间间隔**，这个间隔的长度与天体在旋转天球上的可能具有的自身运动有关。

因为这种测时方法是测量子午圈与赤道系副圈之间的角度，所以常把赤道的副圈族称为**时圈**，而赤经如同时角一样，几乎总是用时间表示而不用弧段表示。可是，赤经是从春分点向东计量，不因天球的旋转而变化，而时角却是从子午圈向西计量且随周日运动而变化。时角和赤纬组成了与赤经和赤纬不同的独立的坐标系，它部分地随地理位置而变化。严格地说，需要分清通过天极的两组性质不同的大圆族，一族对于子午圈是固定的且在天空中是不动的，另一族在天球上是固定的而随周日运动旋转。固定在天空中且指示时角的圈在逻辑上称**时圈**最适宜，而固定在旋转的天球上的圈则称为**赤经圈**比较适当，然而一般来说现在对这两者并没有注意区分，赤经圈这个名称并不常用。平行于赤道的小圆称为**赤纬圈**。

任一天体的时角 h 恒为

$$h=\tau-\alpha,$$

式中 α 是赤经，τ 为春分点的时角。当一个赤经为 α 的天体在子午圈上时 $h=0$，此时春分点的时角 $\tau=\alpha$。西方位角相应于时角自 0^h 到 $+12^h$，东方位角相应于时角自 $+12^h$ 到 $+24^h$ 或自 0^h 到 -12^h。地平上西点的时角为 $+6^h$，东点的时角为 $+18^h$ 或 -6^h。

由太阳的时角运动定义的且由精确的日晷表示的时间单位称为**视太阳时**。这种时间过去通常用于日常生活，但对现在所需要的精确守时工作来说，由太阳实际的周日运动直接测得的时间已不切实用了，因为太阳沿着黄道的周年运动的不均匀性，以及黄

道对赤道有一交角，使得在一年中太阳的时角运动速率变化相当大而且复杂。可是，使用一种与平均的太阳时角运动一致的计量方法在实际应用中是一种满意的方案，为此导入了一个假想的**平太阳**。平太阳定义为在天球赤道上的一个点，它沿着赤道作均匀的周年运动，它的速率实质上与太阳沿着黄道的周年运动平均速率相等。这个点的周日时角运动实质上等于太阳的平均周日运动，这个点的时角位置交替地落后和超前于太阳，但相差值总是小于16^m，根据平太阳周日运动测得的时间称**平太阳时**。

因为这个抽象定义的点不是一个实际可见的目标，所以不能直接测得平太阳时。实用上，平太阳时是由观测恒星的周日运动所得的时间与平太阳时的关系而定义的，且从这些关系由计算求得。观测恒星得到的时刻称**恒星时**，它是由春分点的周日视运动定义的。恒星时与平太阳时不同，因为太阳相对于恒星不断运动，所以时角运动也不同，但是太阳的平均周日运动与恒星的周日运动的关系可以从已知的太阳周年视运动推得。平太阳由采用一个表示它赤经变化的公式来定义，后面将要说明，这个公式定出平太阳在恒星间的位置，并确定了平太阳时对恒星时的关系，由这关系构成了平太阳时的精确定义。

任一瞬间恒星时的数值就是春分点的时角，自过子午圈瞬间为0^h开始计量，到下一次过子午圈为24^h。由于在每一瞬间春分点的时角τ等于子午圈的赤经，恒星时可由观测过子午圈瞬间的恒星的赤经来确定，通过计算就可得到该瞬间平太阳时的值。

黄道系

这种系统的基本平面——黄道平面，由地球绕太阳公转的轨道平面确定。在每一瞬间通过地球的向量径及速度向量所组成的平面与天球相交为一大圆，若从地球中心观测，好象太阳在这瞬间沿着大圆在运动，但是，由于地球公转运动受到其它行星和月球的引力作用，使这个平面在空间的位置不断地变化。在变化中，

瞬时轨道平面总是通过太阳中心，这种变化可用一个缓慢移动的进动（或长期）运动来表示，其上叠加了大量的不同周期和振幅的短周期变化。在任一瞬间，其位置只受长期分量作用的轨道平面是瞬时平均轨道平面，这一平均平面与天球相交而成的运动大圆为黄道。因为瞬时轨道运动平面对于平均平面作不规则的振动，因此地球一般不在平均平面上，太阳也不精确地在黄道上，但偏差很小，从地球中心来看黄道与太阳在恒星中的视周年路径十分接近。即使从地球表面上来看，太阳视周年路径与黄道之间的差异也只有通过近代精确仪器才能观测到。

黄道是天球黄道坐标系的基本圈。黄道与赤道间的夹角称为**黄赤交角** ε。黄道的两个极点在二至圈上，北黄极的赤经为 18^h，它在天龙座 ω 星附近，赤纬为 $90° - \varepsilon$。

黄道的副圈是通过黄极的大圆族，称为**黄经圈**。平行于黄道的小圆称为**黄纬圈**。

在黄道系中，天球上一点的坐标为**黄纬及黄经**。黄纬是该点到黄道的角距，它从黄道开始沿着通过该点的黄道副圈（黄经圈）量度，向北为正，向南为负，黄纬的余角为黄极距。黄经是春分点与通过该点的黄经圈对黄道的交点在黄道上所截的弧段，自春分点开始沿着黄道量度，由 0° 到 360°向东计量。

天体相对于黄道的坐标，如赤道坐标那样，给出天体在天球上的位置，而与旋转天球相对于地平的位置无关。然而，天球上固定点的黄道坐标，在不同时期略有不同，这是因为地球的轨道平面在空间的位置的长期变化造成黄道在天球上的运动，同时又因为赤道在天球上的运动造成春分点的位移。除了赤道运动引起赤道坐标的变化外，黄道运动造成的春分点的进一步的位移，也同样引起了赤道坐标的变化。

黄赤交角等于黄道平面与赤道平面之间的两面角。北（南）黄极到北（南）天极之间的大圆弧长等于黄赤交角。

二分点是黄经为 0° 和 180°，黄纬为 0° 的两个点；二至点

是黄经 90°，黄纬 $+\varepsilon$ 及黄经 270°，黄纬 $-\varepsilon$ 的两个点，也即在黄道上离赤道角距最大的两点。赤道以北的至点，习称**夏至点**，另一个至点称**冬至点**，因为太阳到达这两点时，是地球上北半球天文夏季和天文冬季的开始；但这两个名词，象春分点及秋分点一样，对于南半球是不适合的。这四个名称都具有双重意义，它们既表示黄道上的点，又表示太阳在其黄道周年运动圈上到达该四个点的时间。

北天极的黄经为 90°，南天极为 270°。

自古代开始，就把天球黄道两侧太阳、月球及行星在恒星间运动的带区，称为**黄道带**，黄道带通常又分为相等的 12 份，称**黄道十二宫**。黄道十二宫是从古希腊天文学传下来的，第一宫从黄经 0° 开始，称为白羊宫，这就是把春分点称为白羊宫起点的理由。每宫的范围为黄经 30°，直到不久以前，黄经通常还以这些宫来表示，在每宫内自 0° 计到 30°，而不是从春分点沿黄道连续计量。

现在把黄道带的宽度定为黄道两侧黄纬各 8° 的范围，但在不同历史时期规定的宽度都不相同。黄道十二宫的名称依照古代大致上所在的星座取名。因为十二宫是始终从春分点开始计量，由于岁差造成春分点的移动，各宫随着春分点向西移动，现在离开它们原来所在的星座位置已约 30°。

赤道坐标与黄道坐标之间的关系

黄道天球坐标系广泛地用于理论天文学中，但现在还没有做到从观测来直接测量黄道坐标。在应用时，是把以黄道坐标表示的理论结果转换为赤道坐标，反之如果需要被观测天体的黄经 λ 和黄纬 β 值，则可以从观测的赤经 α 和赤纬 δ 通过计算求得。

这些换算的基本公式，是从天球上由北黄极、北天极及给定点组成的球面三角形中，各要素之间的三角关系式得到的（见图 2）。在此三角形中，三条边为 $90^\circ-\beta$（对角为 $90^\circ-\alpha$），$90^\circ-\delta$（对角为 $90^\circ-\lambda$）和连接两个极点的圆弧，这弧长等于黄赤交

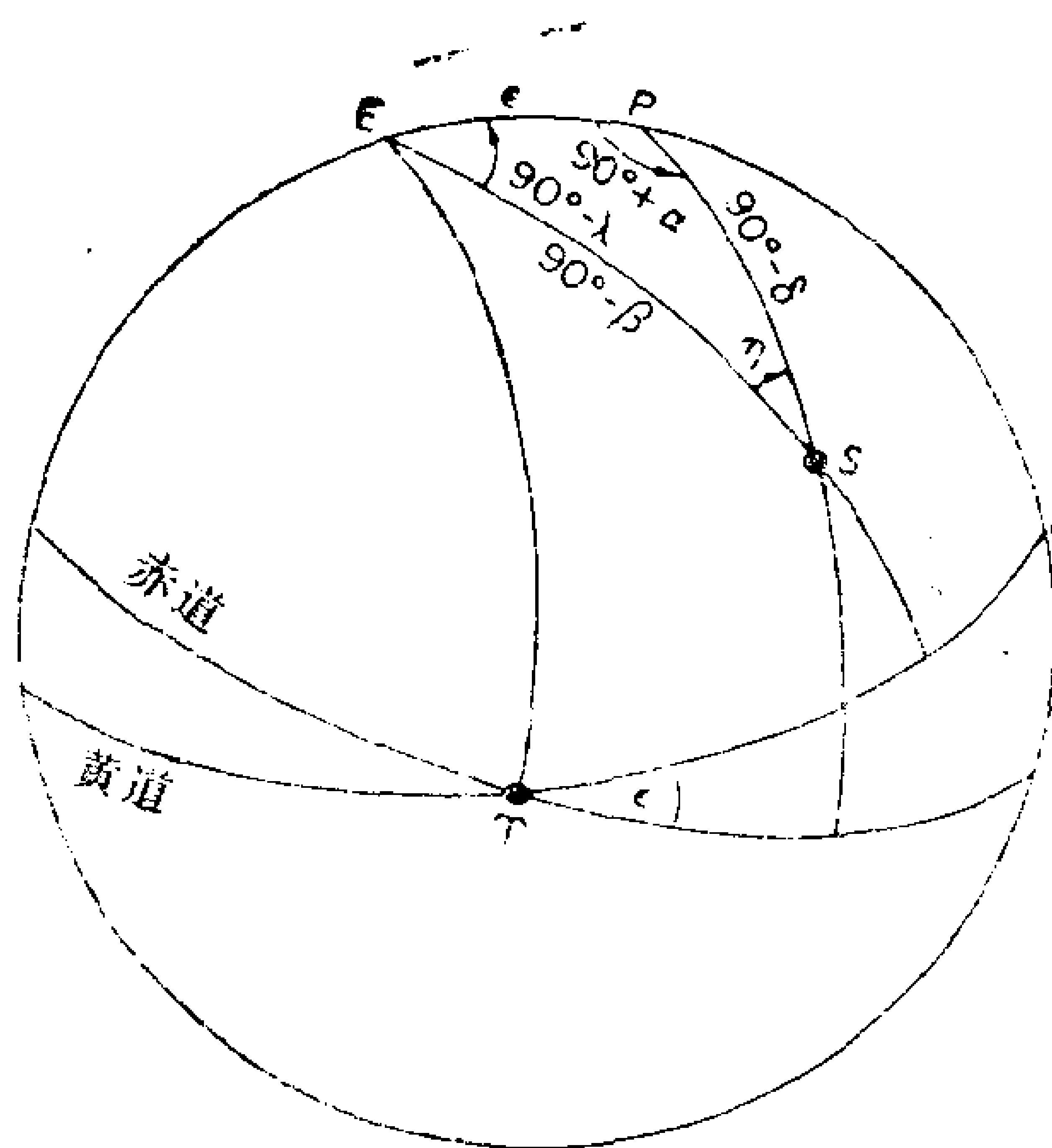


图 2　赤道及黄道坐标系

角 ε，应用第一章的球面三角公式，得到下列关系：

$$\begin{aligned}\sin\beta &= \cos\varepsilon\sin\delta - \sin\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,\\ \cos\beta\sin\lambda &= \sin\varepsilon\sin\delta + \cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha,\\ \cos\beta\cos\lambda &= \cos\delta\cos\alpha;\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\sin\delta &= \cos\varepsilon\sin\beta + \sin\varepsilon\cos\beta\sin\lambda,\\ \cos\delta\sin\alpha &= \cos\varepsilon\cos\beta\sin\lambda - \sin\varepsilon\sin\beta,\\ \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda.\end{aligned} \tag{10}$$

将 α 和 λ，δ 和 β，及 $-\varepsilon$ 和 ε 互换，就可以把上述两组转换式彼此互换。

ε 边的对角 η，可由下式得到：

$$\begin{aligned}\cos\beta\cos\eta &= \cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\delta\sin\alpha,\\ \cos\beta\sin\eta &= \sin\varepsilon\cos\alpha,\\ \cos\delta\cos\eta &= \cos\varepsilon\cos\beta - \sin\varepsilon\sin\beta\sin\lambda,\\ \cos\delta\sin\eta &= \sin\varepsilon\cos\lambda.\end{aligned} \tag{11}$$

相对坐标

对于如卫星及双星的暗伴星，这样一些天体的位置，若使用

与它们相联系的那个天体的相对位置表示，比用它们在天体上的实际坐标更为方便。当两个天体十分靠近时，如双星及许多卫星那样，常使用对参考天体的角距和方向表示其位置，若角距离不够小，因而使用这种方法不够方便时，如对一些离行星较远的卫星，则常用它们之间的赤经差和赤纬差来表示其位置。

位置角和距离

一天体对另一天体的方向用**位置角**表示，它是在参考天体上量度的，通过该参考天体的赤经圈与通过这两个天体的大圆之间的夹角，自北向东计量。同样，在太阳、月球和行星的圆面上或圆面附近的点，常用相对圆面中心的距离和位置角表示。

一点 S_2（α_2，δ_2）对于另一点 S_1（α_1，δ_1）的距离 Δ 及位置角 p_1，可以从天球上由该两点及北天极组成的球面三角形（图 3）中的三角关系得到：

$$
\begin{aligned}
\cos p_1 \sin \Delta &= \cos \delta_1 \sin \delta_2 - \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\sin \delta_1 \cos \delta_2, \\
\sin p_1 \sin \Delta &= \sin (\alpha_2 - \alpha_1)\cos \delta_2, \\
\cos \Delta &= \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\cos \delta_1 \cos \delta_2 .
\end{aligned} \tag{12}
$$

这些都是严格的公式；但当 Δ 是小量时，在应用时必会带来困难，因为这时 $\sin \Delta$ 的值很小，由 α 和 δ 的函数求出的 $\tan p_1$ 和 $\cot \Delta$ 就会失去几位有效数字。对于这种情况，有时可把 α 和 δ 的函数加上几位有效数字来处理。实用上 $\alpha_2 - \alpha_1$ 的平方及 $\delta_2 - \delta_1$ 的立方常可略去，公式可写为：

$$
\begin{aligned}
\Delta \cos p_1 &= \delta_2 - \delta_1 , \\
\Delta \sin p_1 &= (\alpha_2 - \alpha_1)\cos \delta_2 .
\end{aligned} \tag{13}
$$

右边，$\delta_2 - \delta_1$ 是在通过 S_1 的赤经圈上由通过 S_1 及 S_2 的赤纬圈所截的大圆弧；$(\alpha_2 - \alpha_1)\cos \delta_2$ 是在通过 S_2 的赤纬圈上由过 S_1 和 S_2 的赤经圈所截的小圆弧。(13)式等于是把三角形 PS_1S_2 作为平面三角形一样处理。

较差坐标

依据赤道坐标系，S_2 对 S_1 的位置是由差值 $\alpha_2-\alpha_1$，$\delta_2-\delta_1$ 表示的。利用角距和位置角可以从严格式（12）得到它们的值。从这些方程式可以导得任何一级精度要求的近似公式。达到（13）式精度的近似式为：

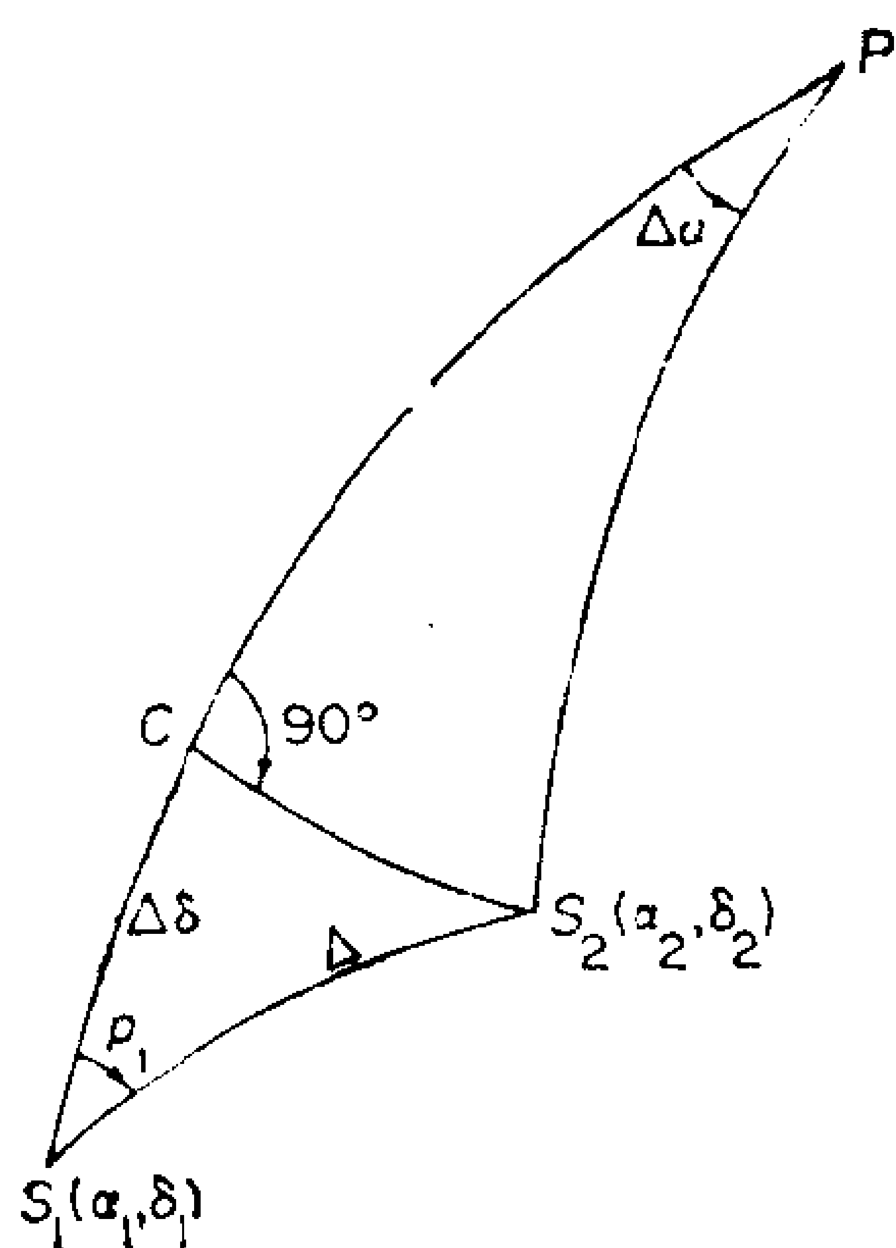


图 3 相对坐标

$$\alpha_2-\alpha_1=\Delta\sin p_1\sec\delta_2,$$
$$\delta_2-\delta_1=\Delta\cos p_1 .$$

量
$$x=\Delta\sin p_1,$$
$$y=\Delta\cos p_1$$

通常被称为是以 S_1 为原点的 S_2 的直角坐标值。

为了从黄道坐标差求赤经及赤纬差，或相反的从赤经及赤纬差求黄道坐标差，可对由天极、黄极及天球上一点构成的球面三角形的表达式进行微分，在实用上通常就能达到足够的精度。这些表达式可以用第一章中适当的微分公式得到，或对连接赤道与黄道坐标的转换公式进行微分而得，可以把这些公式写成下列形式：

$$\begin{aligned}\cos\delta\,d\alpha&=+\cos\eta\cos\beta\,d\lambda-\sin\eta\,d\beta-\sin\delta\cos\alpha\,d\varepsilon,\\ d\delta&=+\sin\eta\cos\beta\,d\lambda+\cos\eta\,d\beta+\sin\alpha\,d\varepsilon;\\ \cos\beta\,d\lambda&=+\cos\eta\cos\delta\,d\alpha+\sin\eta\,d\delta+\sin\beta\cos\lambda\,d\varepsilon,\\ d\beta&=-\sin\eta\cos\delta\,d\alpha+\cos\eta\,d\delta-\sin\lambda\,d\varepsilon;\end{aligned}\qquad(14)$$

式中的 η 角由下式给出

$$\begin{aligned}\sin\eta&=\cos\lambda\sec\delta\sin\varepsilon\\ &=\cos\alpha\sec\beta\sin\varepsilon\qquad -90^\circ\leqslant\eta\leqslant+90^\circ\end{aligned}$$

如果天球的纬度坐标变化 Δb，则点在大圆弧上的移动量也正好是 Δb，但如果经度变化 Δl，点仅仅沿纬圈发生位移，且

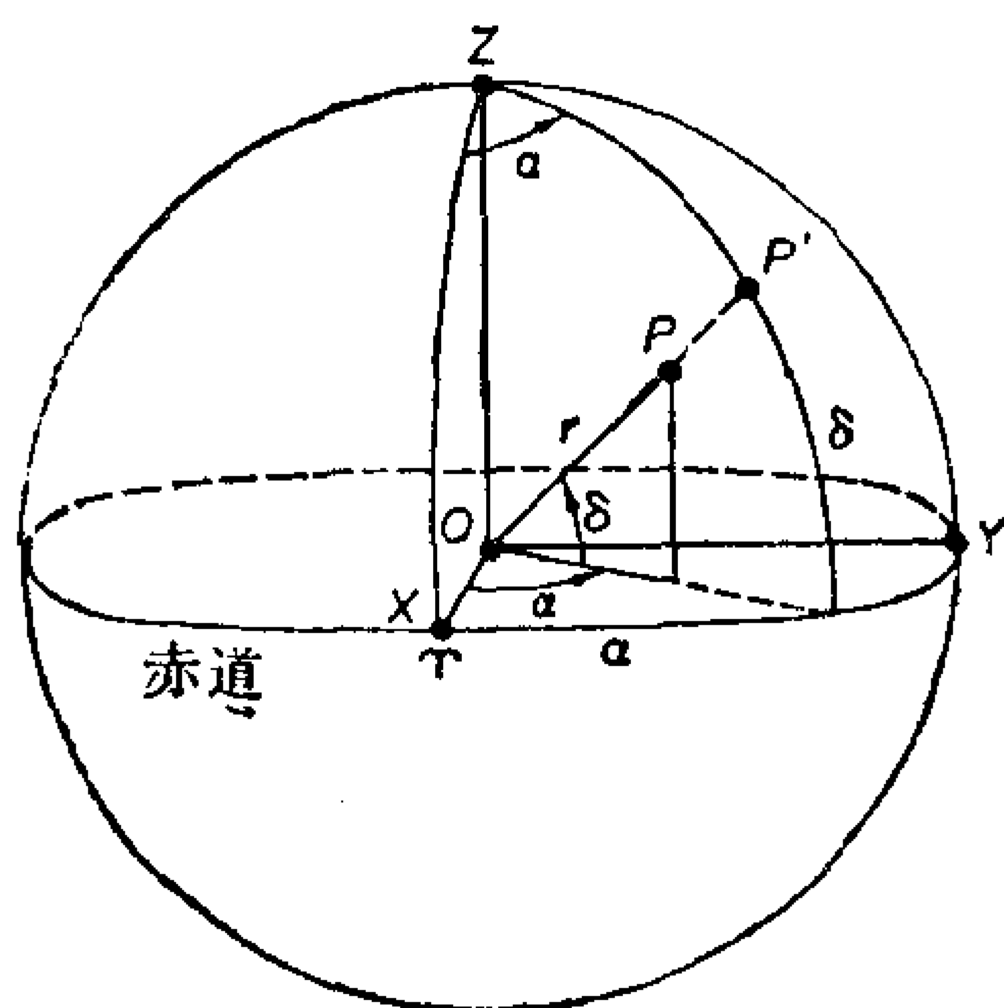
仅描绘出角长度$s=\Delta l$的小圆弧。当Δl很小时，连接s两端点的大圆弧与s相差不多；在Δl三次方范围内，如第一章所示，等价的大圆弧位移是$\cos b\Delta l$，例如，赤经变化$\Delta\alpha$在天球上产生的位移仅为$\cos\delta\,\Delta\alpha$。

空间坐标系

在球面天文学的某些问题中，要求三维直角坐标系或三维极坐标系。原点O可以是空间任意一点，取决于要解决的问题，但按照天球在数学上是无穷大的概念，原点总是天球的中心。因此空间极坐标系以及与之相联系的直角坐标系可以由任一种球面坐标系扩展而定义出，它除了O点的方向坐标外，还包括离O点的距离r。

例如，从O点到空间任一点p的直线与该直线在赤道平面上的投影之间的夹角等于赤纬δ，而这投影与从O点到春分点的直线间的夹角等于赤经α。在空间的这些角度，以及从O点到P点的距离r，组成了P点的赤道极坐标($r>\alpha>\delta$)(见图4)。与它相联系的直角坐标系是一个右手直角坐标系，其原点在O点，XY平面在赤道平面上，正X轴指向春分点，正Z轴指向北天极，P的直角坐标为：

$$x=r\cos\alpha\cos\delta,\quad y=r\sin\alpha\cos\delta,\quad z=r\sin\delta\ . \qquad (15)$$



赤道极坐标及直角坐标：

Z——北天极；♈——春分点；

P'——P在天球上的投影

图 4

在这些表达式中 r 的系数是 P 的方向余弦，可用来代替 α 及 δ 单独表示 P 点的方向。

空间坐标的变换

任何极坐标系的坐标，例如黄道极坐标 (r, λ, β)，可用与（15）式相同形式的方程式与相应的直角坐标系的坐标相联系。应用这些方程式可以把一点的极坐标变换为与极坐标具有同一原点、同一基本参考方向的直角系的坐标值。解（15）式的极坐标可以得到相反的变换。

如果直角坐标系的 XY 平面与同一原点的极坐标系的基本平面不相重合，或者正 X 轴不指向该平面内极坐标的经度起算点，那么从一个坐标系统变换到另一个系统，除用(15)式外，还要作坐标轴的旋转变换。例如，将黄道系变换到赤道系，就要求把二分点联线旋转 $-\varepsilon$ 角；反之，从赤道系变换到黄道系就需转 $+\varepsilon$ 角。从黄道直角坐标 (x', y', z') 到赤道直角坐标 (x, y, z) 的变换，以及相应的逆变换的转轴方程为：

$$\begin{aligned} x &= x', & x' &= x, \\ y &= y'\cos\varepsilon - z'\sin\varepsilon & y' &= z\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon, \\ z &= y'\sin\varepsilon + z'\cos\varepsilon; & z' &= z\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon \ . \end{aligned} \tag{16}$$

用极坐标表示上式右端的项，就得到从一种极坐标系变换到另一种直角坐标系的变换公式：

$$\begin{aligned} x &= r\cos\beta\cos\lambda, \\ y &= r\cos\beta(\cos\varepsilon\sin\lambda - \sin\varepsilon\tan\beta), \\ z &= r\cos\beta(\sin\varepsilon\sin\lambda + \cos\varepsilon\tan\beta); \\ x' &= r\cos\delta\cos\alpha, \\ y' &= r\cos\delta(\sin\varepsilon\tan\delta + \cos\varepsilon\sin\alpha), \\ z' &= r\cos\delta(\cos\varepsilon\tan\delta - \sin\varepsilon\sin\alpha) \ . \end{aligned} \tag{17}$$

同样，用极坐标表示（16）式左端各项，便得到从一种直角坐标系变换到另一种极坐标系的公式。

用极坐标同时代入（16）式两边，就得到由三角学推得的球面坐标的变换式（9）和(10)。这是通常应用直角坐标轴作适当旋移代替球面三角学方法进行球面坐标变换的一个例子。从数值运算角度看这种方法是有优点的。(16）式右端坐标值的系数是一个系统中的轴相对于另一个系统中的轴的方向余弦。

变换式（16）和（17）适用于具有**同一原点**的任一黄道和赤道系，与原点在空间的位置无关。例如，在日心天球中的黄道和赤道位置与在地心天球上的位置是相同的。

把坐标变换到**不同原点**的系统，除了需要把坐标轴对原点作转轴外，还要把坐标轴平移。直角轴系作平移时，使得每个直角坐标值都减少了与坐标原点位移相同的代数值。根据这样的关系及（15）式，就可确定对极坐标的影响。实用时常常遇到的例子是把行星的日心坐标变换到地心坐标的情况。在赤道坐标系中，地心极坐标 α，δ 和地心距 Δ，通常是通过直角坐标为媒介，应用下列关系式来求得

$$x_1 + X = \Delta\cos\alpha\cos\delta,$$
$$y_1 + Y = \Delta\sin\alpha\cos\delta,$$
$$z_1 + Z = \Delta\sin\delta,$$

式中 X，Y，Z 是太阳的地心坐标(即地球的日心坐标的负值)，x_1，y_1，z_1 为行星的日心坐标；一年中每天的太阳坐标值，在美国天文年历及其它国家天文年历中都有刊载，而行星的日心直角坐标 x_1，y_1，z_1 可应用（17）式从它的黄道极坐标求得。地心距离 Δ 可以由直角坐标求得，也可由太阳、地球及行星在空间组成的平面三角形用余弦定律求得，$\Delta^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos(r,R)$，式中 r 为行星的日心距离，R 为太阳的地心距离。

在黄道系中，从日心极坐标 (r, l, b) 到地心极坐标 (Δ,λ,β) 的变换公式是：

$$\Delta\cos\beta\cos\lambda = R\cos\beta_{\odot}\cos\lambda_{\odot} + r\cos b\cos l,$$
$$\Delta\cos\beta\sin\lambda = R\cos\beta_{\odot}\sin\lambda_{\odot} + r\cos b\sin l,$$
$$\Delta\sin\beta = R\sin\beta_{\odot} + r\sin b,$$

式中R为太阳的地心距离，$\lambda_{\odot}$，$\beta_{\odot}$是它的地心黄经和黄纬。在许多应用中，略去太阳的黄纬，精度也是足够的。

较差变化

坐标在天球上的微小变化，是由观测点的微小位移，或者是天体在空间位置的微小变化造成的，通常可以用由球面坐标对空间位置的关系推得的微分公式足够精确地表示。

例如，将（15）式微分得

$$dx = \frac{x}{r}dr - z\cos\alpha\, d\delta - y\, d\alpha,$$

$$dy = \frac{y}{r}dr - z\sin\alpha\, d\delta + x\, d\alpha,$$

$$dz = \frac{z}{r}dr + r\cos\delta\, d\delta; \qquad (18)$$

$$\cos\delta\, d\alpha = +\cos\alpha\frac{dy}{r} - \sin\alpha\frac{dx}{r},$$

$$d\delta = -\sin\delta\cos\alpha\frac{dx}{r} - \sin\delta\sin\alpha\frac{dy}{r} + \cos\delta\frac{dz}{r},$$

$$dr = \cos\delta\cos\alpha\, dx + \cos\delta\sin\alpha\, dy + \sin\delta\, dz.$$

第三章　天球的几何形象与地理位置的关系

旋转天球上坐标系的参考圈相对于地球表面上任意一点的地平系固定圈的位置是由该点的地理位置确定的。铅垂线的方向确定了天球上天文天顶和地平圈的地方位置。因而天球上的地平系的基本圈和基点，随着在弯曲的地球表面上的观测者位置的改变而移动；从而这些基点和基圈在黄道和赤道坐标系的基本圈、点之间的位置也随之而改变，天球的地方形象和周日运动也相应地改变。

显然，天球形象与地理位置的关系取决于地球的形状和大小。早在古代，当人们觉察到天空的形象在每个地理区域内都不相同时，就已注意到这些关系，并且感觉到这与地球的形状有关。

远在地球运动被人们普遍地承认以前很久，对地球的真实形状就有了认识，因为表明地球是球形的证据，比地球自转和公转的证据更明显和直接。在古代早已注意到了，由一些直接观测到的现象表明，地球的表面是弯曲的，它的形状至少很接近球形，但更为明显的证据是在地球上不同区域看到不同的天空形象，特别是天体周日运动轨迹和地平圈的关系的不同以及由此产生的昼夜长度的不同。根据在地球表面南北方向上不同地方的天球形象的变化特性，并结合其它证据，一些早期的希腊哲学家已推论地球具有圆球形状。

天球形象与观测者在地球曲面上的位置的关系是古代确定地理位置的直接基础，地理位置通常直接以一些与每个地区天球形象特征有关的现象来表示。例如，地球上沿南北方向的位置可用

一年中最长的昼长表示。然而地理位置的精确表示以及系统地阐述观测者所在位置与天球地方形象的关系，都要求在地面上建立一个几何坐标系。

用地面经纬度表示地球表面上的位置，是古希腊地理学家提出的，他们认为地球是一个严格的球体，但到17世纪后期及18世纪初期，根据重力理论和大地测量两方面的结果确定地球的真实形状是扁球体。虽则地球与圆球体偏离很小，但大多数天文学上的应用都需要考虑这一偏差。而且，从已完成的不断提高精度的范围广泛的测量工作表明，即使不考虑地形的起伏，地球的物理表面也未必与某种规律的数学面精确一致，因而要求进一步以更高的精度确定地球的形状和大小。因此，地球坐标系建立的基础与建立天球坐标系的基础多少有点不同。

地理坐标系

通常使用的在地球表面的两个坐标系是：**天文坐标系**，它与地球的形状和大小完全无关，是由天文垂线定义的；**大地坐标系**，它的基本参考基础是一个任意约定采用的近似于地球自然表面的数学表面。

地球表面上的这两个坐标系统称为**地理坐标系**，用这两个坐标系中任一个的坐标来表示的地面上一点的位置称为**地理位置**。如同天球上任何一个不同的坐标系都统称为**天球坐标系**一样，用地理位置作为地面点位置的总称是合适的，在实际应用时，常把**地理位置**当作大地位置的同义词是不恰当的。通常在这两个不同的地理坐标系统中的坐标差不超过几弧秒，因此常常不必注明某一点位的坐标究竟属于哪一个系统，然而要求高精度的坐标值时就需要分清是属于哪个坐标系了。

天文坐标

在地面坐标的天文坐标系中，地极定义为地球自转轴与地面相交的两个点，这两个点称为**地理自转极**。也就是说，根据直接

观测到的现象，地理自转极可定义为通过地心且平行于天球视自转轴的直线与地面所交的两个点。天球的这根视轴，即通过观测者，到地平以上的天极点的方向，而通过地心与视轴平行的直线与数学上无限大的天球交于同样的两点，即天极点。因而天极点也就是地球自转轴无限延长与天球相交的点，地球自转轴的这个延长线，可以认为是天球本身的轴，而地球中心可以认为是天球中心。数学上无限大的球绕这根轴自转产生的周日运动与绕通过观测者的平行轴产生的周日运动是完全同样的。

从地球的一个极上空俯看，如果地球自转方向是逆时针方向，这个极点就是北极。通过地球中心且和地球自转轴正交的平面与地球表面的交线为**地理自转赤道**，该平面与天球相交于天赤道。

因为地球不是球体，坐标系不能象天球上的赤道系一样，用直接依据地理极点和自转赤道的地面角距来定义，而必须用空间的角度来定义。为此，最实用的量是**地方天文垂线方向**相对于可观测到的基本方向的角度，因为垂线总是可以应用铅垂线具体直接得到，且可以容易地由天文观测与天极联系起来。地面上任一点，垂线对于天极方向的偏离角度确定了垂线在地球南北方向上的位置，因为对地球上所有点位来说，数学中无限大的天球的极点是在空间同一个方向上，因而这个方向标志着一个共同的基本参考方向。根据地方天球子午面对地球上任意选定的一个标准参考点的子午面的角距，可以确定垂线在地球东西方向上的位置。

应用决定垂线方向的这些角度来阐述地球表面坐标系的精确定义时，特别需要考虑这样一个事实，即确定天文垂线的重力方向，在地球表面上每一点都受到地方不规则性的影响，因此它一般并不与地球自转轴相交。

因为天球子午圈是一个通过天顶及天极的大圆，它是通过观测者、天顶和天极这三个点的平面与天球的交线，即天球子午面

通过**地方天顶**以及通过**观测者到天极的方向**或天球的视轴。由于地方垂线一般不与地球自转轴相交，子午面也就不通过自转轴，但因为子午面通过天球的视轴，所以它**平行**于地球自转轴。在数学中无限大的天球上，地方天文子午面通过天极，但在有限的地球上，一般来说，这个平面与地面的交线是一条曲线，这曲线并不通过地理极点。

然而，从一般的几何意义来说，在地方子午面内垂线与平行地轴的任一直线的夹角，就可以说是垂线与自转轴的夹角。特别是地球表面上任一点的垂线与天球视轴的夹角，从这意义上说就是垂线与地球自转轴构成的角度。它确定了该点在地面上相对于该角为零的点的位置，当该角为零时，这点的天极和天顶重合。这个角度由天球子午圈上天极到天顶的弧段来量度。

铅垂线与天球自转轴之间所夹锐角的余角称为**天文纬度**，并规定在北半球为正值，南半球为负值。在地球表面上天文纬度为0°的各点的轨迹为**天文赤道**，天文纬度为某一其它数值的轨迹称为**等纬圈**。

由于地球表面上各点铅垂线方向变化的不规则性，赤道和等纬圈都是具有双重曲率的不规则曲线，虽则它们偏离平面曲线不远。不规则的天文赤道与自转赤道不相重合，但沿天文赤道上的所有铅垂线都与地球自转轴正交，即平行于自转赤道面，因而象自转赤道面一样，这些铅垂线在数学中无限大的天球上也与天赤道相交。地球自转轴两个端点的纬度，即地理自转极的纬度，并不必然是90°，但天文纬度为90°的点可以认为是由天文定义的地理极点。

地球表面上一点的天文纬度决定了该点在地方天文子午面内的位置。天文子午面本身的位置是由它与通过地球上一个任意选定的参考点的地方子午面之间的两面角确定的，这两面角称为该点的**天文经度**。每一个地方子午面都通过地方天文垂线且与地球自转轴平行(或在特殊情况下通过该轴)。通过格林尼治天文台艾

里（Airy）中星仪老址的子午面被选为标准参考面。在大多数的应用中，天文经度从这个起始平面向东或向西自 0° 量度到 180°。东经和西经有时用代数符号表示，但不同作者所用的符号含义并不一致，在实际应用时，为避免混淆必需明确阐明符号的含义。

地球表面上具有同一天文经度的点的轨迹称为**天文子午线**。通过地球上任一点的天文子午线，是地球表面上从一个地极（或天文纬度为 90° 的点）延伸到另一个地极的连续曲线。因为地球表面各处天文垂线方向的不规则性，具有同一经度的不同点处的地方子午面一般并不相重合，而仅是平行，因而天文子午线在地面上是一条不规则的具有双曲率的曲线，而不是平面曲线。

地方天文子午面与天球相交于地方天球子午圈，不同地理位置处天球子午圈之间的交角等于地方天文经度差。然而，子午面与**地球表面**的交线不是天文子午线，因为天文学上所定义的地理子午线，不是一条由平面与地面相交所构成的曲线。在地面上任一点，地球表面与天球子午圈的地方平面的交线为该点的**地方天文子午线**或**地方南北线**；但因这个平面一般并不通过地球自转轴，它与地面相交的曲线不通过地极，一般**仅在给定点**上与通过该点的不规则天文经度子午线重合。通过给定的特殊点作一条向两极延伸的线，这条线总是**沿着每一点的地方南北方向**，它是一条不规则线，它上面的每一点都与该点的地方子午面和地面相交的曲线相切。地球上的这条连续的南北线，是地面与地方子午面族**包络**的交线，在这条线上每一点的子午面都属于这个子午面族，沿着这条不规则线上的每一点的天文经度一般都不相同。

必须仔细地区别这三条线：（1）天文子午线，它上面的所有点的地方子午面都是平行的；（2）从一个极点到另一个极点的南北曲线，这条曲线与曲线上每一点的地方子午面都相切；（3）地方南北线或子午线，它位于地方子午面内，而在这点上与从一个地理极点到另一个极点的连续的南北曲线相切。

由于地球上任意两点的天球子午圈彼此在天极上形成的角，等于这两点的天文经度差。显然当天体位于某点的子午圈上时，即地方时角为 0^h，天体用弧度计量的格林尼治时角的值等于该点的西经度数，因而天文经度可以定义为格林尼治与地方时的时刻差，不论用太阳时或恒星时都一样，这与用角度计量是相当的。因此，地面经度常用时间计量单位来代替角度计量单位。

从一观测者到地面上另一点的方向的**天文方位角**，是观测者的地方天文子午面与通过观测者及那一点的垂直平面之间的夹角，它在地平面上计量（通常从南点起按顺时针方向计量）。这两个平面都通过观测点的铅垂线，其中一个平面平行于（或通过）地轴，另一个平面通过地面上的那一点。

地球表面上任何连续的南北线，因为在线上的每一点都与地方子午面相切，所以处处都指向天文方位角 0°（或 180°），而一般来说，天文子午圈则不是这样。同样，天文等纬圈则不与处处都指向天文方位角 90°（或 270°）的曲线重合。在这两种情况下，即使铅垂线方向没有不规则性，这两个曲线族仍不相重合，除非地球表面是一个严格的旋转面。

上述定义同样能很好地适用于地球真实表面以上或以下的点，虽然一般来说，因为铅垂线方向随高度而变化，在某一地点竖直向上或向下的各点上纬度和经度值都略有不同。

这些定义都没有考虑到地球的形状，也就是说不论地球形状如何，这些定义都严格地适用。然而，地球与球体的实际差异是如此之小，以至把地球当球体来考虑，且忽略垂线的不规则性，由此而导出的近似关系式对许多实用目的来说已是足够精确了。于是，在上述定义中可以用地面上的弧段代替空间的线与面之间的角度来进行表示。

根据这些抽象的几何解释，可以容易地得到用实际测量来确定地球形状和大小的实施原理。沿地球表面任何方向的地面曲率，即地面切线方向在空间的变化率，在不顾及地形不规则性

时，对于地面上的距离而言，它就是天顶在天球上的位移速率。原则上，要确定地面上任一条曲线的三维几何形状，只需要先在天球上确定一个固定点，然后在该曲线上距离已测定的两端点测定天顶距相对天球固定点的变化就可以了。

沿南北方向，应用这一原理比较容易，可根据观测周日运动定出天极位置，作为天球上一个必要的参考点，然后只要求观测天极高度随地平面距离的变化率。沿东西方向，在天球上确定一个基点要困难得多，因为必须把周日自转与观测者在地面上的运动区别开来。直到现代还不能在这个方向上作出精确测量。然而，南北方向上铅垂线方向的变化率几乎与地面上的距离成正比，直到17世纪才确认了这有偏离。因此在南北方向的曲率近于球体，所以最合理的设想是把整个地球也看为近于球形。这个假定被早期得到的东西方向曲率的证据所证实。比如不同的地方的月食观测就提供了近似测定东西曲率的机会。

如果地球是一个精确的圆球，地球表面上任意两点间的角距就等于天顶的角位移，因此测量这两点间的线距离就能得到圆周每度的长度以及地球的大小。在古代及中世纪就以这个原理为基础进行了若干测定。总的来说，这些早期结果可看作是地球真实直径的合理近似，但有些结果误差相当大。直到18世纪初，为实施上述这些原理，使用了改进的仪器及方法后，确定了地球对圆球的偏离，并得到了相当准确的地球大小数值。

从原则上说，对于偏离圆球的情况，至少需要两条甚至更多的弧段，才能确定地球的形状和大小，实际上要得到精确结果需要大量弧段。已进行的大地测量所累积的结果说明，地球很接近于一个旋转扁球体，其极半径约3950.0英里，赤道半径约比极半径长13.3英里。

因为天文垂线的不规则性，以及子午圈和等纬圈的不规则性，并不采用地理坐标的天文系统来精确表示地球上的几何关系，而采用大地坐标系。

大地坐标

为了大地测量及地理学上的需要，人为地采用一个近似于地球表面形状及大小的严格旋转椭球作为标准参考面，真实地球的不规则自然表面是依据于它来表示的。相对于这个标准椭球，任一点的位置是由该点离椭球面的法线距离以及法线在椭球上的垂足位置来确定的。

大地极点是椭球数学旋转轴与椭球表面的交点，**大地赤道面**是生成椭圆的长轴旋转而成的平面。任一点的**大地垂线**是通过该点与标准椭球正交的直线；**大地天顶**是大地垂线指向天球上的那一点。大地子午圈都是椭圆，它是通过椭球的几何轴的平面与椭球面的交线，大地等纬圈是与轴正交的平面与椭球面相交的圆。

任一点的大地垂线都位于大地子午面内，因而与椭球的几何轴相交，但不通过椭球中心。

大地纬度是大地垂线与大地赤道面的夹角。**大地经度**是大地子午面与人为选取的初始子午面间的夹角。它可用这两个子午面在极点的交角来度量，也可用这两个子午圈在大地赤道上所截的弧段来度量。

通过一观测点到另一点的**大地方位角**，是观测者的大地子午面与通过观测者的大地垂线及另一点的平面之间的交角。

大地坐标与大地垂线间的关系完全和天文坐标与天文垂线的关系一样，但和天文垂线不一样的是大地垂线不能直接观测到。大地系统的坐标不能直接测量，而且因为参考椭球是人为选取的，大地坐标仅在特定的参考椭球内是唯一确定的。大地坐标是间接确定的，它根据大地测量测得的地球表面上的距离和角度用数学计算而得。

为此，选为参考面的旋转椭球面，数学中是由生成椭圆的长半轴的长度以及表征偏离球体的参数值决定的。这个标准参考椭球相对于地球的位置，是由已知天文坐标的一个选定的测站的大

地纬度及经度的采用值以及通过该站的一条选定的直线方位角采用值来确定的。这个采用的参数系统称为**大地基准**，那个采用大地坐标值的站称为**初始站**。还需选择更多的站组成一个网络，这个网从初始站开始延伸到任意需要的距离处，且分布在一个相当狭窄的带内，一般是沿着子午圈或等纬圈的方向布置，但不一定非要这样。这些站组成一个三角锁，只要在这锁中测量足够多的角度及距离，就能应用旋转椭球面上的几何及三角关系，根据初始站的坐标，计算出各站的大地坐标。

旋转椭球对圆球体的偏离常以**扁率** f 表示，

$$f=(a-c)/a,$$

式中 c 为极半径，a 为赤道半径，但有时应用**第二扁率** f' 更为方便，

$$f'=(a-c)/c,$$

对旋转椭球的特殊情况，也常用**偏心率**

$$e=(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}/a,$$

或有时也用**第二偏心率**

$$e'=(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}/c.$$

扁率也常称为**椭率**。但这个名词常使人联想到椭圆，最好避免使用。特别是因为有些作者专门称 f' 为椭率，以与 f 相区别，因此把扁率与椭率等同起来会造成混淆。同样，用广义的名称**椭球**来代表特定的旋转椭球也常常会引起混淆。现在在大地测量中**标准椭球**这个名词，已被广泛使用，但在其它情况下必须避免使用，以免引起混乱的可能性。扁率有时也称为**压缩率**。偏心率和扁率的关系是

$$e^2=2f-f^2$$

因为 $f<1$，这二次式的实用解为

$$f=1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4+\cdots\cdots$$

一个旋转椭球的形状和大小可由任意的两个独立参数来完全确定。因此，为避免矛盾仅能任意选用两个参数值来确定椭球，而所有其它的参数值必须根据这两个参数值计算而得。

任意形状和大小的椭球，只要它是合理地近似于地球实际自然表面，就可被选为标准参考椭球。在不同国家不同年代里曾广泛地应用过一些不同的椭球。只要完成了新的大地测量工作，就可更精确地确定代表地球形状和大小的椭球，但从大地测量工作来说，并非一定需要改变现已使用的参考椭球。可是如果不同区域的大地测量没有归到同一大地基准，那么这些区域的地图就不能互相联接，因为在不同区域中地图上点的位置是相对于不同参考系的。

天文坐标和大地坐标的关系

地理坐标的天文和大地系统是互相独立的。在这两个系统中同一点的坐标一般稍有不同，但这差别只有通过观测才能确定。这些差别主要是由于地面上各点的地方重力方向的不规则变化引起的，此外，参考椭球的轴不可能与地球自转轴严格重合，椭球的中心也未必与地球质量中心重合。因此，天文垂线一般与椭球的法线不重合。天文垂线与大地垂线所成的角称**垂线偏差**。它可用天球上天文天顶与大地天顶的角距及连接这两点弧段的方位角表示，也可用这两点间的弧段在子午圈及卯酉圈方向的分量表示。

大地坐标系是由特定的大地基准所定义的，与之相联系的垂线偏差就代表了这个系统与地理坐标的天文系统的关系。通过把三角网中各站的大地经纬度与直接观测到的天文经纬度比较，就可得到与该大地基准有关的垂线偏差。

垂线偏差θ可以分解为子午分量ξ和卯酉分量η，自大地天顶Z_g向北天极计量时ξ为正值，自大地天顶向东点方向计量时

η 为正值。在球面直角三角形 PZ_aT（图 5），经度以向东量为正

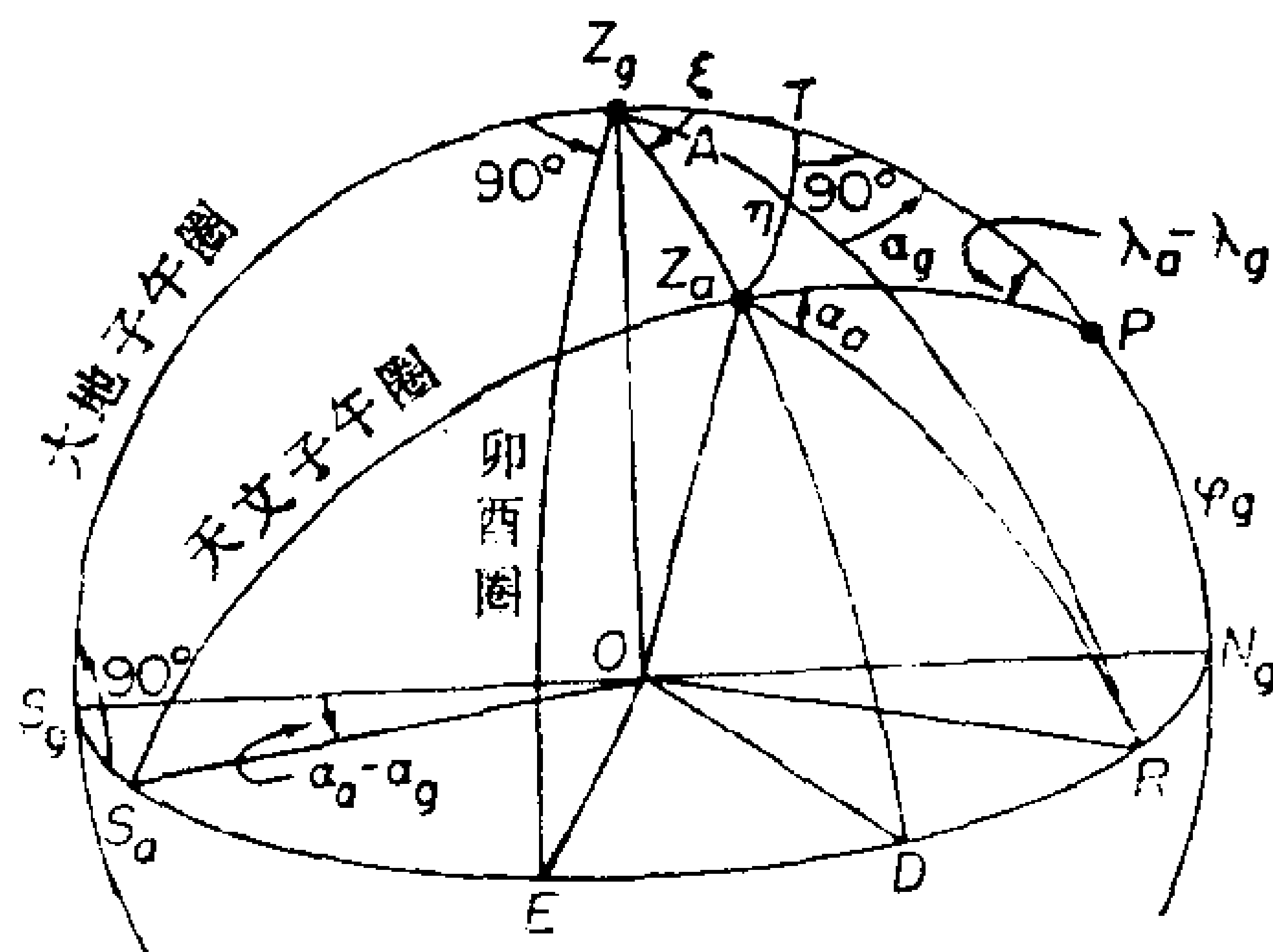


图 5　垂线偏差

$TP=90°-(\varphi_g+\xi)$；$Z_aP=90°-\varphi_a$

值，任一方向 OR 的方位角顺时针方向量度为正，则有

$$\cos(\lambda_a-\lambda_g)=\tan\varphi_a\cot(\varphi_g+\xi),$$

$$\sin\eta=\sin(\lambda_a-\lambda_g)\cos\varphi_a \ .$$

θ 的实际数值总是很小，因而上述把天文和大地经纬度差与垂线偏差联系在一起的关系式，可以足够精确地写为：

$$\varphi_a-\varphi_g=\xi,$$

$$(\lambda_a-\lambda_g)\cos\varphi_a=\eta \ .$$

严格地说，天文方位角 α_a 和大地方位角 α_g 位于不同的平面内。然而，假如这两个方位角都在天文地平面内测量，由此造成的误差，一般小于 10^{-8}，因而，在直角三角形 S_gS_aP 中，边 S_aP 可以取为 $180°-\varphi_a$，相应于前面表达式同样精度量级的关系式为：

$$\alpha_a-\alpha_g=(\lambda_a-\lambda_g)\sin\varphi_a$$

$$=\eta\tan\varphi_a \ .$$

这个关系式在大地测量学中称拉普拉斯方程●。

● 更高精度的展开式见 F. A. Vening Meinesz, Bull. Géod. №.15, 33—42 (1950).

在一些三角测站中，如果除了观测天文方位角外，还观测了天文经度，那么大地方位角就可以用拉普拉斯方程计算而得。这些测站称**拉普拉斯点**。由此算出的大地方位角数值与三角网计算所得的值之间的差异，大部分是由于在大地测量中观测的系统误差的累积效应引起的。在整个三角网中设置拉普拉斯点是为了控制测量误差。同样，在初始站不能独立地测定大地经度和大地方位角，而只能在两者中任选一个作为采用值，通过天文观测应用拉普拉斯方程求得另一个值。

天文与大地坐标之间，差5″是平常的，差10″的情况很多，甚至相差20″也不少。垂线偏差在个别情况下可达30″或40″，在纬度上的影响约为1英里。在纬度45°处，沿垂直于子午线方向测量，在经度方向上偏差1″相应于地面上72英尺。在拉丁美洲波多黎各岛北海岸，那里海水很深，铅垂线向南偏，而在南海岸则向北偏。该岛仅宽33英里，而在北岸的圣胡安和南岸的蓬塞之间的实际距离，比从天文纬度差定出的两点距离就要小1英里左右。

地球表面上准确的大地距离及方位角，显然必须从大地坐标获得，而不是从天文坐标获得。同样，在涉及与地球的有限大小以及地球上不同点的相对几何位置有关的这类天文问题时，为了达到所需的精度，有时也必须采用大地坐标，如在特别精确的蚀掩计算中，或在精确研究象月球这类近距天体的观测位置与观测点的地理位置和高度的关系时，就需要用到大地坐标。但在其它情况下，不必在天文关系式中考虑垂线偏差——在求地面上不同点相互之间的实际几何位置时，通常不需要这样的精度要求。

在较早的时期，人们就认识到精确的测量及绘制大面积地图不能仅依赖于天文纬度和经度，但在很多情况下没有其它办法可用，因此造成了许多混乱。著名的例子就是，在美国许多州的州界按法律规定是由某个子午圈或等纬圈来划分的，当用天文观测

定边界时，不仅边界偏离大地子午圈或等纬圈可达半英里，甚至呈曲折形状。例如，蒙大拿州的东边界的位置就处在依据椭球定出的位置以东半英里多的地方，而堪萨斯州沿 98° 经线处南北边界的范围，比在椭球上标定的两个等纬圈间的南北距离要宽 1/4 英里。

在把不同地区绘制在同一参考系的地图上以前，各地区的大地测量不仅必须归算到同一个椭球，而且还要归算到椭球在空间相对于地球的同一位置上。不同的大地网的初始站采用各自的大地坐标值，这就等于将椭球定在不同的位置，为了使测量结果归算到同一个大地基准，各个网的初始站必须用连续的三角测量或其它等效的方法直接联系起来。

地心坐标

除了**地球表面**上的坐标系外，还需要一个表示地面点对于**地心**位置的坐标系统。为此，通常最方便的坐标是自参考椭球中心到地面点的距离 ρ——称矢径，**地心纬度** φ'——矢径 ρ 与大地赤道面的交角，以及**地心经度**——与大地经度相同。**地心天顶**是 ρ 指向天球上的那个点。矢径 ρ 与椭球法线的夹角 $\varphi-\varphi'$ 称为垂直角或称纬度归算；在赤道和极点其值为零，而在其它地方数值上均有 $\varphi>\varphi'$。在天文学中，地心纬度有时称为**归化纬度**，但这个名词在大地测量学及制图学中有另外的意义，因此最好避免使用。

根据椭球子午截面上的几何性质可以得到地心坐标及大地坐标的关系（见图6）。生成椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1 \tag{19}$$

在椭圆上的任意一点 P（x、y）到原点的半径为 $\rho=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$，它与半长轴相交的角为 $\varphi'=\tan^{-1}(y/x)$，及 $x=\rho\cos\varphi'$，

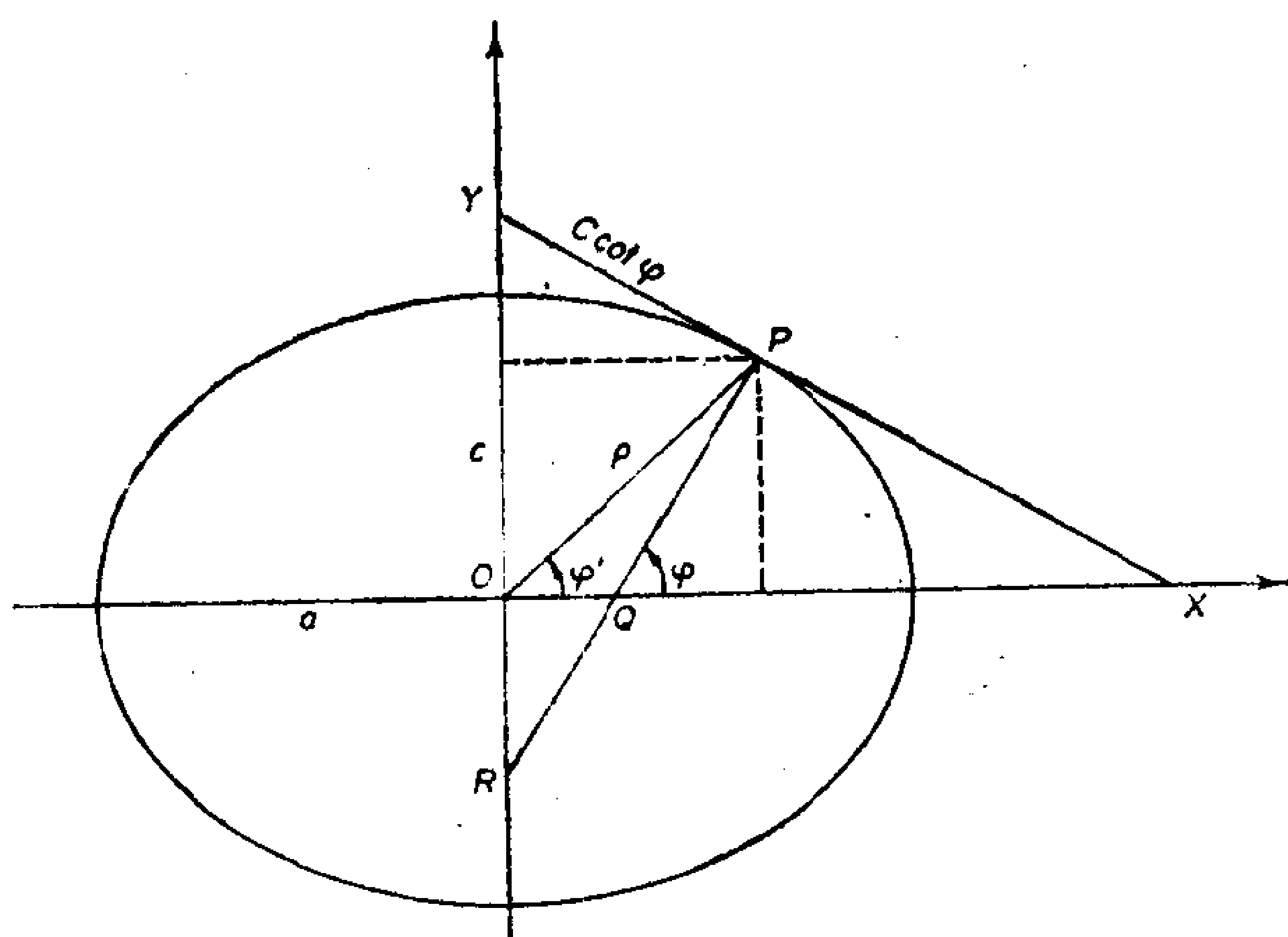


图 6　地心坐标

$PQ=S$，$PR=C$

$y=\rho\sin\varphi'$。椭圆在P点的斜率为$dy/dx=-c^2x/a^2y$，因此P点的法线对半长轴的倾角为

$$\varphi=\tan^{-1}a^2y/c^2x,$$

即

$$\frac{y}{x}=c^2/a^2\tan\varphi$$

$$=\tan\varphi' \tag{20}$$

其中

$$c^2/a^2=1-e^2=(1-f)^2$$

其中偏心率，f为扁率。

把（20）式平方，与（19）式一齐解x及y，得

$$\rho\cos\varphi'=\frac{a}{(1-e^2\sin\varphi^2)^{\frac{1}{2}}}\cos\varphi$$

$$\equiv C\cos\varphi,$$

$$\rho\sin\varphi'=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}\sin\varphi \tag{21}$$

$$\equiv S\sin\varphi$$

$$=(1-e^2)C\sin\varphi,$$

因子C及S依赖于参考椭球的形状及大小。从这两个关系式，可得到矢径及垂直角

$$\rho=C[1-e^2(2-e^2)\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin(\varphi-\varphi')=\frac{1}{2}\ \frac{C}{\rho}e^2\sin 2\varphi \tag{22}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{e^2\sin 2\varphi}{[1+(e^4-2e^2)\sin^2\varphi]^{\frac{1}{2}}}.$$

同样， $\cos(\varphi-\varphi')=\frac{C}{\rho}(1-e^2\sin^2\varphi)$

从上式及（22）式得

$$\tan(\varphi-\varphi')=\frac{e^2\sin 2\varphi}{2(1-e^2\sin^2\varphi)}$$

$$=\frac{q\sin 2\varphi}{1+q\cos 2\varphi}, \tag{23}$$

式中 $q=e^2/(2-e^2)$

同样，以φ'表示则为 $\tan(\varphi-\varphi')=\frac{q\sin 2\varphi'}{1-q\cos 2\varphi'}$,

这个式子及前面用φ表示的式子，也可以直接从（20）式，应用三角公式

$$\tan(\varphi-\varphi')=\frac{\tan\varphi-\tan\varphi'}{1+\tan\varphi\tan\varphi'}$$

导出。

在$\sin\varphi=(2-e^2)^{-\frac{1}{2}}$的纬度处垂直角取最大值，其值为$\arctan e^2/[2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}]$因为$e$为小量，因此，此处纬度约为45°。

应用（21）及（22）式，以φ及φ'表示（19）式，则有

$$\rho^2\cos^2\varphi'\{1+\tan\varphi\tan\varphi'\}=a^2,$$

及
$$\rho = a\left\{\frac{\sec^2\varphi'}{1+\tan\varphi\tan\varphi'}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= a\left\{\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'\cos(\varphi-\varphi')}\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (24)$$

在大地坐标为 (λ, φ, H) 的一点，其中H为在椭球表面上的高程，沿表面的法线量度；λ，φ 为该点法线在椭球表面上垂足的大地经度和纬度，其地心坐标为：该点到地球中心矢径的长度 r、矢径与赤道面的夹角 θ 以及角 λ；并有

$$r\cos\theta = \rho\cos\varphi' + H\cos\varphi$$
$$= (C+H)\cos\varphi,$$
$$r\sin\theta = \rho\sin\varphi' + H\sin\varphi$$
$$= (S+H)\sin\varphi,$$

式中C，S，H都必须以相同的长度单位表示。通常，在椭球表面上，即$H=0$的点，就用ρ，φ'来代替r和θ。

由（21）式所定义的量S及C具有相应的几何意义。图6中，在由椭球中心O，表面上一点P，以及P点的大地垂线与轴的交点R所构成的三角形中，由正弦定律得 $\rho\cos\varphi' = PR\cos\varphi$，因此$C$为大地垂线上由表面到它与轴的交点之间的线段$PR$的长度。同样，在由$O$、$P$及大地垂线与大地赤道面相交的$Q$所构成的三角形中，$\rho\sin\varphi' = PQ\sin\varphi$，因此$S$为$PQ$的长度。短轴上的线段$OR$为 $ae^2\sin\varphi/[(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}]$。

为了进行数值计算，把表达式展开为级数是有利的，因为$\varphi-\varphi'$是小量，而ρ与1也相差有限。以复指数表示（23）式，得

$$\exp[2i(\varphi-\varphi')] = \frac{1+q\exp(2i\varphi)}{1+q\exp(-2i\varphi)}.$$

对两边取对数，将右边以指数展开，且以三角级数表示，则有：

$$\varphi-\varphi' = q\sin 2\varphi - \frac{1}{2}q^2\sin 4\varphi$$

$$+\frac{1}{3}q^3\sin 6\varphi-\cdots\cdots \tag{25}$$

上式为以 φ 来表示 φ' 的式子，同样，以 φ' 表示 φ 的式子为

$$\exp[2i(\varphi-\varphi')]=\frac{1-q\exp(-2i\varphi')}{1-q\exp(2i\varphi')},$$

$$\varphi-\varphi'=q\sin 2\varphi'+\frac{1}{2}q^2\sin 4\varphi'$$

$$+\frac{1}{3}q^3\sin 6\varphi'+\cdots\cdots,$$

为了计算 q，可由二项式定理来展开它以 e 表示的表达式，再由关系式 $e^2=2f-f^2$，可得 f 的幂级数：

$$q=\frac{e^2}{2}\left(1-\frac{e^2}{2}\right)^{-1}$$

$$=\frac{e^2}{2}+\left(\frac{e^2}{2}\right)^2+\left(\frac{e^2}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=f+\frac{1}{2}f^2+\cdots\cdots.$$

另一个常用参数为

$$n=(a-c)/(a+c).$$

因为 $c=a(1-f)=a(1-e^2)^{1/2}$，

$$n=f/(2-f)$$

$$=\frac{1-(1-e^2)^{1/2}}{1+(1-e^2)^{1/2}},$$

得

$$n=\frac{1}{2}f+\left(\frac{1}{2}f\right)^2+\left(\frac{1}{2}f\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4+\cdots\cdots.$$

以 n 表示，

$$f=2n/(1+n)$$

$$=2n-2n^2+2n^3-2n^4+\cdots\cdots,$$

以及，因为 $e^2=(a^2-e^2)/a^2$，

$$
\begin{aligned}
q &= (a^2-c^2)/(a^2+c^2) \\
&= \frac{2(a-c)(a+c)}{(a+c)^2+(a-c)^2} \\
&= 2n/(1+n^2).
\end{aligned}
$$

以两个因子的二项式展开式相乘，就可以将矢径的表达式（22）展开为级数，对扁率展开到第三阶

$$
\begin{aligned}
\frac{\rho}{a} &= \{1-e^2(2-e^2)\sin^2\varphi\}^{1/2}\{1-e^2\sin^2\varphi)^{-1/2} \\
&= 1-\frac{1}{2}(e^2-e^4)\sin^2\varphi\frac{5}{8}e^4\sin^4\varphi+\cdots\cdots \\
&= 1-\frac{1}{2}f+\frac{5}{16}f^2+\frac{5}{32}f^3 \\
&\quad +\left(\frac{1}{2}f-\frac{13}{64}f^3\right)\cos 2\varphi-\left(\frac{5}{16}f^2\right. \\
&\quad \left.+\frac{5}{32}f^3\right)\cos 4\varphi+\frac{13}{64}f^3\cos 6\varphi+\cdots\cdots.
\end{aligned}
$$

同样，从（21）式

$$
\begin{aligned}
\frac{C}{a} &= [1-(2f-f^2)\sin^2\varphi]^{-1/2} \\
&= 1+\frac{1}{2}f+\frac{5}{16}f^2+\frac{7}{32}f^3 \\
&\quad -\left(\frac{1}{2}f+\frac{1}{2}f^2+\frac{27}{64}f^3\right)\cos 2\varphi \\
&\quad +\left(\frac{3}{16}f^2+\frac{9}{32}f^3\right)\cos 4\varphi \\
&\quad -\frac{5}{64}f^3\cos 6\varphi+\cdots\cdots;
\end{aligned}
$$

$$\frac{S}{a}=(1-2f+f^2)\frac{C}{a}$$

$$=1-\frac{3}{2}f+\frac{5}{16}f^2+\frac{3}{32}f^3$$

$$-\left(\frac{1}{2}f-\frac{1}{2}f^2-\frac{5}{64}f^3\right)\cos 2\varphi$$

$$+\left(\frac{3}{16}f^2-\frac{3}{32}f^3\right)\cos 4\varphi$$

$$-\frac{5}{64}f^3\cos 6\varphi+\cdots\cdots .$$

对于某一特定的椭球，可把这些表示式编成表来应用。特别是应用表来计算时，级数式比有限表达式可得出更精确的结果，且工作量更少●。

在天文课题中，特别是在计算食的工作中，经常用到的另一种纬向位置是**偏心纬度** Φ，它由下式定义

$$\cos\Phi=x/a.$$

它首先是由勒让德尔引入的，他把它称为**归化纬度**，这个名词在大地测量中仍经常用到，但要注意避免，因为地心纬度也称为归化纬度。偏心纬度也称**参量纬度**，有时称几何纬度，它是常用的椭圆参数方程中的偏心角(图 7)：

$$x=a\cos\Phi,\quad y=c\sin\Phi\ .$$

以地心纬度表示为

$$\cos\Phi=\frac{\rho}{a}\cos\varphi',\ \sin\Phi=\frac{\rho}{c}\sin\varphi',$$

以及由(20)式得

$$\tan\Phi=(\tan\Phi')/(1-e^2)^{1/2}=(1-e^2)^{1/2}\tan\varphi,$$

● 对于一个在椭球表面上竖直高度为 H，地心坐标为 ρ，φ' 的点位，J.Morrison 及 S.Pines 给出了以 φ'，e，ρ 表示的 φ 的级数，以及求 H 的公式，见 Astr·Jour.66，15—16(1961)。

图 7　参量纬度

式中$(1-e^2)^{1/2}=1-f$，类似于(25)式有，

$$\varphi-\Phi=n\sin 2\varphi-\frac{1}{2}n^2\sin 4\varphi+\frac{1}{3}n^3\sin 6\varphi-\cdots\cdots$$

$$=n\sin 2\Phi+\frac{1}{2}n^2\sin 4\Phi+\frac{1}{3}n^3\sin 6\Phi+\cdots\cdots,$$

在(22)式中以$1-(1-e^2)^{1/2}$代e^2，得

$$\sin(\varphi-\Phi)=\sin 2\varphi\frac{1-(1-e^2)^{1/2}}{2(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}.$$

在极点和赤道上 $\varphi-\Phi$ 为零，约在 $\varphi=45°03'$ 处达到最大值 $5.8'$。

自椭球中心到大地垂线与轴相交的那点的距离为

$$\frac{\rho\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi}=\frac{ae^2}{(1-e^2)^{1/2}}\sin\Phi.$$

天球上各参考圈的形象

通过地理坐标系，可用观测者的地理坐标表示旋转天球上的参考圈和地面上任一点的地平系统的圈的数学关系。这些关系式是在某一地理位置处确定任意时刻的天球形象的基础；反之，也是根据观测到的天球形象确定地理位置的实用方法的基础。

在表示天球的地方形象时，用地理坐标的**天文**系统表示地理位置是最自然的。这些坐标可立即与直接观测到的天球形象联系起来，并且可由观测直接确定。地理坐标的天文系统是天球地平坐标系的主要补充，这两个系统结合在一起组成了直接观测的**地方考参系**。

地理坐标的天文系统和天球坐标系之间的关系是由和两者都有关的地球自转运动直接确定的，地球自转既确定了地理极和地理赤道，又确定了天极和天赤道，这两坐标系又都与地方垂线有关，它定出了天文垂线和天顶。在每一瞬间，天极和赤道在天球上的位置是由该瞬间地球自转轴在空间的方向确定的，而黄道和两分点的位置是由该瞬间轨道平面在空间的位置确定的。地平系各圈在赤道和黄道系各圈中的位置，是由观测者的位置以及垂线在空间相对于自转轴的方向确定的，用地方的地理坐标表示。

如同天体坐标系一样，地理坐标的天文系统是一个运动的系统，这是因为地球自转轴在地球内部的位置的微小变化和它的方向在空间相应的变化造成的，也是由于太阳和月球的引力造成垂线方向的微小变化所致。因此，地球表面上一固定点的天文纬度和经度，在不同时期略有不同。在每一瞬间，旋转天球相对于地方地平系的几何形象由天球坐标系和地理坐标系间的数学关系式来

表达，而这些关系式是由该瞬间自转轴在空间的方向及在地球内部的位置以及轨道平面在空间的瞬时位置确定的。

由天文纬度的定义立即可以得到，地面上观测者观测到的天极在天文地平上的高度角在**数值上**就等于观测者的天文纬度，因为天极高度及天文纬度都是天文天顶与天极夹角的余角。这是球面天文学中最重要的原理之一，它与地球形状无关，而仅与高度角如何从与垂线正交的平面起算的条件有关。在许多教科书中，仅在圆球形地球的情况下，对这个基本关系作了明确的证明。

地平上极点的高度，等于另一个极点在地平下的俯角，所以在地球南北半球上纬度值都等于**北**天极的高度角的代数值。因而，天赤道与天子午圈弧段在地平以上的交点的天顶距其数值必然等于天文纬度，因此在南北两个半球上**天文纬度的代数值等于天顶的赤纬**。

在地面上两点同时观测天球上同一点的时角之差，等于这两个观测点天文经度之差。地面上东西方向的曲率使地平及子午圈在天球上的位置发生了变化，也改变了时角，它反映了不同经度测站的地方时刻差，这个地方时刻差是由天体在周日圈上的时角来量度的。

天球的主要形象及地理带

根据天球上的圈对地面上观测者位置的关系，及地球球形对天球形象的影响和不同纬度处周日运动的合成效应，可以把天球形象依据周日圈与地平的关系分为垂直天球、倾斜天球及平行天球几类。垂直天球是观测者在地球赤道上任一点看到的天球形象，天极在地平，周日圈与地平正交。平行天球是观测者在地球两个极点上看到的天球形象，一个天极在天顶，另一个在天底，天赤道与地平重合，周日圈平行于地平圈。倾斜天球是观测者在地球上两极与赤道之间任一点看到的天球形象，周日圈倾斜于地平圈。在地球上任一纬度φ处，若天体的周日圈与地平以上的天极的距离不大于$|\varphi|$，则该天体总在地平上；如离另一天极不大

于$|\varphi|$，则总在地平下。上述两个极限周日圈分别称为恒显圈及恒隐圈。在平行天球中，这两个圈与天赤道重合，而在垂直天球中，它们是收缩于两个天极上的点。

天球形象与地球上的位置的关系所引出的一个特别重要和有实际意义的结果是，不同纬度处太阳的周日运动圈也不同，此外，由于太阳在黄道上作周年运动时，它交替地到达赤道南北角距约$23\frac{1^\circ}{2}$处，因此太阳周日运动圈的不同又对昼夜长度的季节性变化产生影响。

昼夜长度的季节性变化，以及在不同地理区域的昼夜长度差别，在古代早就引起了人们的注意，希腊天文学家认识到这些现象与地球的球形有关，他们意识到球形必然会对于离赤道不同距离处的温度状况产生重要影响。最早区分不同地理带的标准看来不很明确，它是根据温度以及人类居住的条件来考虑的，而不是按天文关系明确划分的。但地理带总是或多或少与天球上相应的划分有关系的。

根据恒星的恒显圈与恒隐圈以及太阳在天球上周年视路径中偏离赤道最南和最北的周日圈，而将天球自然地划分为不同的带。太阳周年视路径达到的最北和最南的赤纬圈有专门名词，在北天球称**北回归线**，在南天球称**南回归线**。在地球上相应的纬圈，是太阳在一年中能在该处到达天顶的最北和最南的纬度，而在古代人们认为在南北回归线中间的地区太热不适宜居住。同样，两极区域被认为太冷也不适宜居住，在希腊早期天文学中，这些带显然是以恒显圈和恒隐圈确定的，称为北极圈和南极圈。

因此，也可以把天球上的这些圈搬到地球表面上，通常用来标志根据温度和居住条件划分的纬度带，这是太阳在这些带内的周日视路径性质的必然结果。可是用恒显圈和恒隐圈来区分显然是很不合适的，后来就完全以天文为基础，由圭表的影长特性来表征地理带，而不再考虑居住条件：在北极和南极带内，日影不

断地环绕圭表四周转动，在热带内一年中的不同季节，中午日影有时落在圭表的南边有时在北边，在温带内，中午日影总是在圭表的北边（北半球）或南边（南半球）。

这些由地理学家保留到现在的传统使用的带，通常是以这些带内的温度条件命名的。两个地理极附近有两条等纬圈，在这两个等纬圈内，一年中至少有一天太阳是连续在地平之上，以及至少有一天或一天以上太阳连续在地平以下。这两个等纬圈连同两条回归线，把地球表面分为五个带：热带，位于南北回归线之间；南北温带，在回归线和极圈之间；南北寒带，在南北极圈以内。然而实际上，由于大陆及海洋区域不规则的分布和地形的影响，地球上温度的分布，仅大致与这些天文定义的带符合。

赤道坐标系与地平坐标系的关系

在天球上，由天顶、地平以上的天极及天球上任一点组成的三角形称为**天文三角形**。地面上与之相应的地理三角形是由观测者、地理极及星下点构成的。这些三角形中各部分间的三角关系式代表了天球形象与观测者位置间的关系，它们是在球面天文学及其实际应用中用得最多的公式。

为了避免在不同情况下需要选用不同的公式的麻烦，必须尽可能采用同时适用于地球南北半球及天球上任何一点的通用表达式来表示这些关系。但是由于在实用中已有某些习用的公式，因此上述条件很难完全得到满足。在不同时期曾用不同方法建立起若干普遍公式，但都没有能取代习用的方法。

天球上任一点S的天文三角形的三条边为（见图8）：

(1) 天顶与地平以上的天极之间的子午圈弧段，它等于观测者的余纬度$\theta=90°\mp\varphi$，观测者在北半球取负号，南半球取正号。

(2) 在地平经圈上S点到天顶的弧段，它的长度为z，它是S的天顶距。

(3) 在时圈上从天极到S的弧段，它是S的极距$p=90°\pm\delta$，

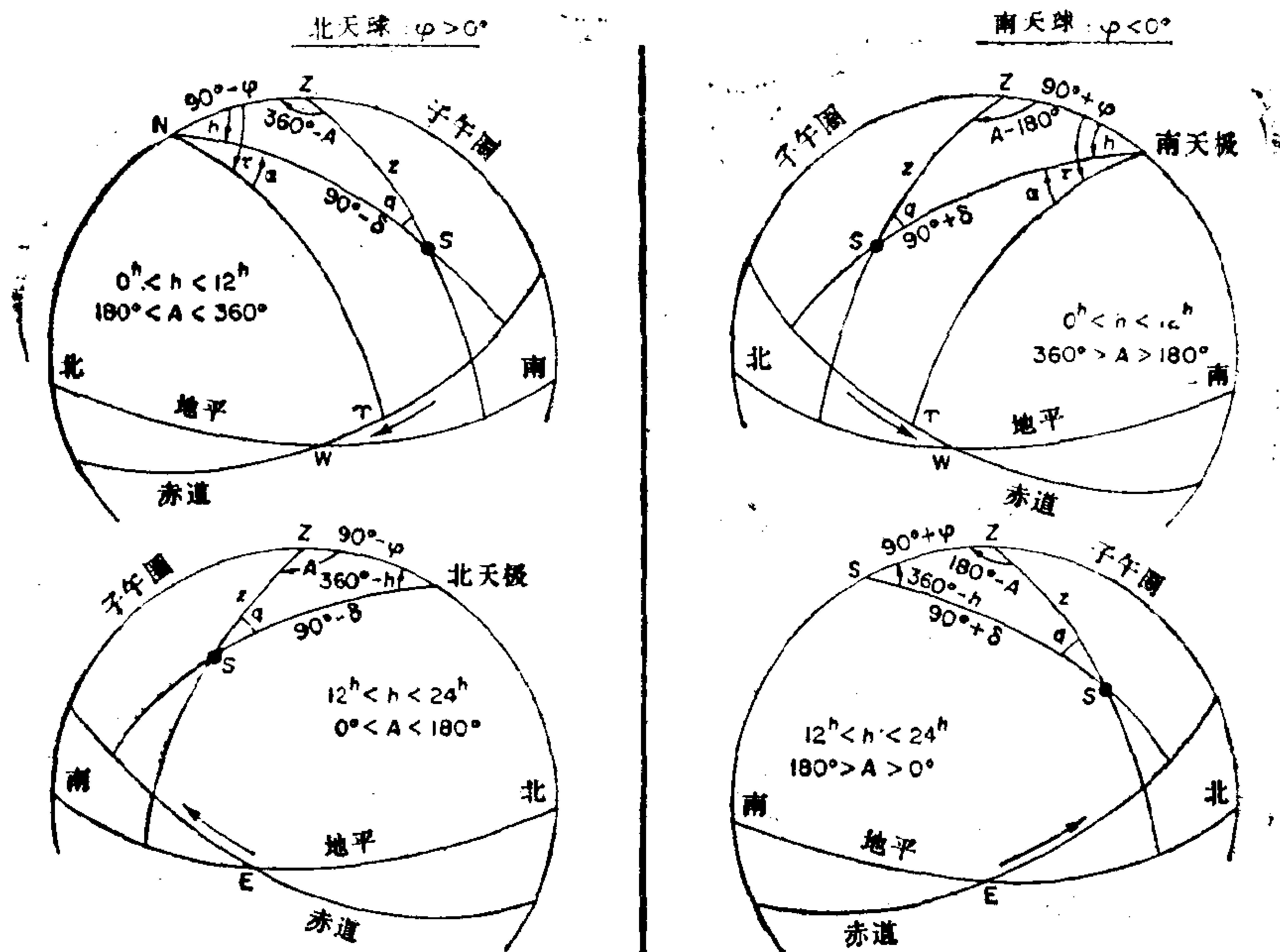


图 8 天文三角形

观测者在北半球取负号，南半球取正号。

在 S 点时圈与地平经圈的夹角称**星位角** q。在天极及天顶的角涉及到时角和方位角，但这依赖于时角和方位角的计量方法。方位角 A 没有统一的量度方向，但时角 h 习惯上从子午圈上对应于地平以上的天极的那一弧度向西量度为正，自 0^h 连续量到 24^h，或者向西量为正，向东量为负，各从 0^h 量到 $\pm 12^h$。

如果规定方位角不论在地球南北半球上均自北向东量度，$0° \leqslant A \leqslant 360°$，而时角则从对应于地平以上的天极的子午圈起向西量，$0^h \leqslant h \leqslant 24^h$，那么在纬度 $-90° \leqslant \varphi \leqslant +90°$ 的地方，对于天球上任一点的坐标，赤道系和地平系之间的基本关系式为：

$$\cos z = +\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos h,$$

$$\sin z\cos A = +\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos h, \qquad (26)$$

$$\sin z \sin A = -\cos\delta \sin h;$$

$$\pm \sin z \cos q = +\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos h \quad \begin{cases} + 如\varphi > 0^\circ \\ - 如\varphi < 0^\circ; \end{cases} \tag{27}$$

$$\sin z \sin q = \pm \cos\varphi \sin h \begin{cases} + 如 0^h < h < 12^h \\ - 如 12^h < h < 24^h; \end{cases}$$

$$\sin\delta = +\sin\varphi \cos z + \cos\varphi \sin z \cos A,$$

$$\cos\delta \cos h = +\cos\varphi \cos z - \sin\varphi \sin z \cos A, \tag{28}$$

$$\cos\delta \sin h = -\sin z \sin A;$$

$$\pm \cos\delta \cos q = +\sin\varphi \sin z - \cos\varphi \cos z \cos A \begin{cases} + 如 \varphi > 0^\circ \\ - 如 \varphi < 0^\circ; \end{cases} \tag{29}$$

$$\cos\delta \sin q = \mp \cos\varphi \sin A \begin{cases} - 如 0^h < h < 12^h \\ + 如 12^h < h < 24^h. \end{cases}$$

在许多著作所列出的公式中，方位角有不同的量度方法，同样，时角的位置有时也用不同方法表示。例如，用从子午圈向东或向西量度的子午角来表示时角，在每个方向上都是从 0^h 量到 $+12^h$●。

当纬度已知，通过时角 $h=\tau-\alpha$，应用这些公式可以把赤道系的坐标换算到地平系；或相反，由于周日运动，如不通过时角这个中间关系就不能把坐标从一个系统换算到另一个系统。

这些换算公式，连同根据这两个系统中的任一个的坐标求星位角的公式，是天文三角形中由已知三元素求另外三元素的完全解的两个例子。还经常要求得到其它的解，特别是在大地测量及

● 在通用公式中为了避免使用正负号，有时应用三角形的外角，这样的例可见 L. P. Lee, Conventions and generalized formulae for the astronomical Triangle, Jo ur. Brit. Astr. Assoc. 65, 114—117 (1955) .W.Maré, notes on the astronomicaltriangle.Empire Survey Rev.14, 35—39 (1957) .

航海中。用(26)式由时角和赤纬求高度和方位角，以及相反的用(28)式由高度和方位角求时角和赤纬，是从一个坐标系到另一个坐标系的直接变换。但在一些实际应用中，每一个系统中的一个坐标值必须由这两个系统中的其它坐标值来确定。最重要的一种情况，就是在纬度已知的情况下，由高度和赤纬求方位角和时角。在三条边已知时，应用(4)式求解球面三角形的公式为：

$$\tan^2\frac{1}{2}h=\frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-\delta)}{\cos s\cos(s-z)},\tag{30}$$

式中 $s=\frac{1}{2}(\varphi+z+\delta)$，和

$$\tan^2\frac{1}{2}A=\frac{\cos s\sin(s-\delta)}{\sin(s-\varphi)\cos(s-z)},\tag{31}$$

这些公式适用于南北半球。为了确定象限，必须知道天体在子午圈东或西。

在总共 20 种数学上的可能情况中，实际上仅用到其中的几种，甚至，三个未知量往往也不是都需要全部求出，根据需要解出的是哪一、两个未知量，而决定采用哪些公式最为方便。在实际计算中，需把基本的通用公式变换为对求解的特定问题最有利，且对所用的计算工具最适合的形式。对于各种最常见的情况，特别是为了航海的需要，编印了各种图表以便于计算。有时用数值计算有利，例如时角可以由方位角及赤纬求得，用(26)式的第二、三式，据 δ 算得相应于一系列 h 值的 A 值，对 A 逆内插，就可查得与 A、δ 相应的 h 值。

对某些用途，更为方便的是测量在天体圆面上或圆面附近的一个点相对于圆面顶点(即通过圆面中心的地平经圈与边缘相交的一点)的位置角，而不是相对于圆面北点的位置角。自顶点起算的位置角是

$$V=P-q,$$

式中P为自北点起算的位置角，q为星位角。

由其它坐标值的微小变化而引起的某坐标的相应变化，可由天文三角形的微分关系式来确定，应用(8)式或直接对(26)～(29)式微分可得：

$$dz = \mp\cos q\, d\delta - \cos\varphi \sin A\, dh - \cos A\, d\varphi,$$

$$\sin z\, dA = +\cos\varphi \sin h \operatorname{cosec} z\, d\delta \pm \cos q \cos\delta\, dh + \cos z \sin A\, d\varphi,$$

$$\pm\sin z\, dq = \begin{cases} +\sin q \cos z\, d\delta - \cos\varphi \cos A\, dh + \sin A\, d\varphi, & h<12^h \\ +\sin q \cos z\, d\delta + \cos\varphi \cos A\, dh - \sin A\, d\varphi, & h>12^h \end{cases}$$

$$d\delta = \mp\cos q\, dz + \cos\varphi \sin h\, dA + \cos h\, d\varphi,$$

$$\cos\delta\, dh = +\cos\varphi \sin h \operatorname{cosec} z\, dz \pm \cos q \sin z\, dA + \sin\delta \sin h\, d\varphi,$$

$$\pm\cos\delta\, dq = \begin{cases} -\sin q \sin\delta\, dz + \cos\varphi \cos h\, dA - \sin h\, d\varphi, & h<12^h \\ -\sin q \sin\delta\, dz - \cos\varphi \cos h\, dA + \sin h\, d\varphi, & h>12^h \end{cases}$$

上边符号用于北纬，下边符号用于南纬。

黄道坐标系与地平坐标系的关系

黄道坐标与高度及方位角的关系，虽然在现代天文学中相对已不大重要，但还有一定意义，有时在一些特殊问题上要用到它。

任何两个球面坐标系之间的关系，取决于它们的基本圈相互之间的交角，以及这些圈的交点相对于圈上的基点的位置。如图2及图8中的例子，它们的关系可由两基本圈的极点以及天球上任一点构成的球面三角形导出。连接两个极点的边等于这两个圈的交角，而其它的边和角都是这两个坐标系统的坐标值的函数。在这两个例中，两个基本圈都相交于固定的点：在一例中是两分点，另一例中是地平圈上的东点和西点。赤经和黄经都是从一个分点开始计量的，时角和方位角则自地平圈上的固定点开始计

量。相反，因为周日运动黄道与地平圈的交点都在连续不断地变化，交角也不断变化，春分点也同样相对于地平系，不断地改变位置，这些情况使得这两个坐标系的关系变得复杂化了(见图9)。

在黄道上的一点，它在某一特殊瞬间到达离黄道与地平的交点为 90° 处，因而在地平上有最大高度，这一点称为象限点。在此瞬间地平经圈与黄道正交，且与黄道正交于此点，此地平经圈是通过天顶及黄极的大圆，即它是通过天顶的黄经圈。天顶的黄纬 B 数值上等于象限点 N 的天顶距，当它在天顶以北时 B 为负值；天顶的黄径 L 为象限点的黄径。

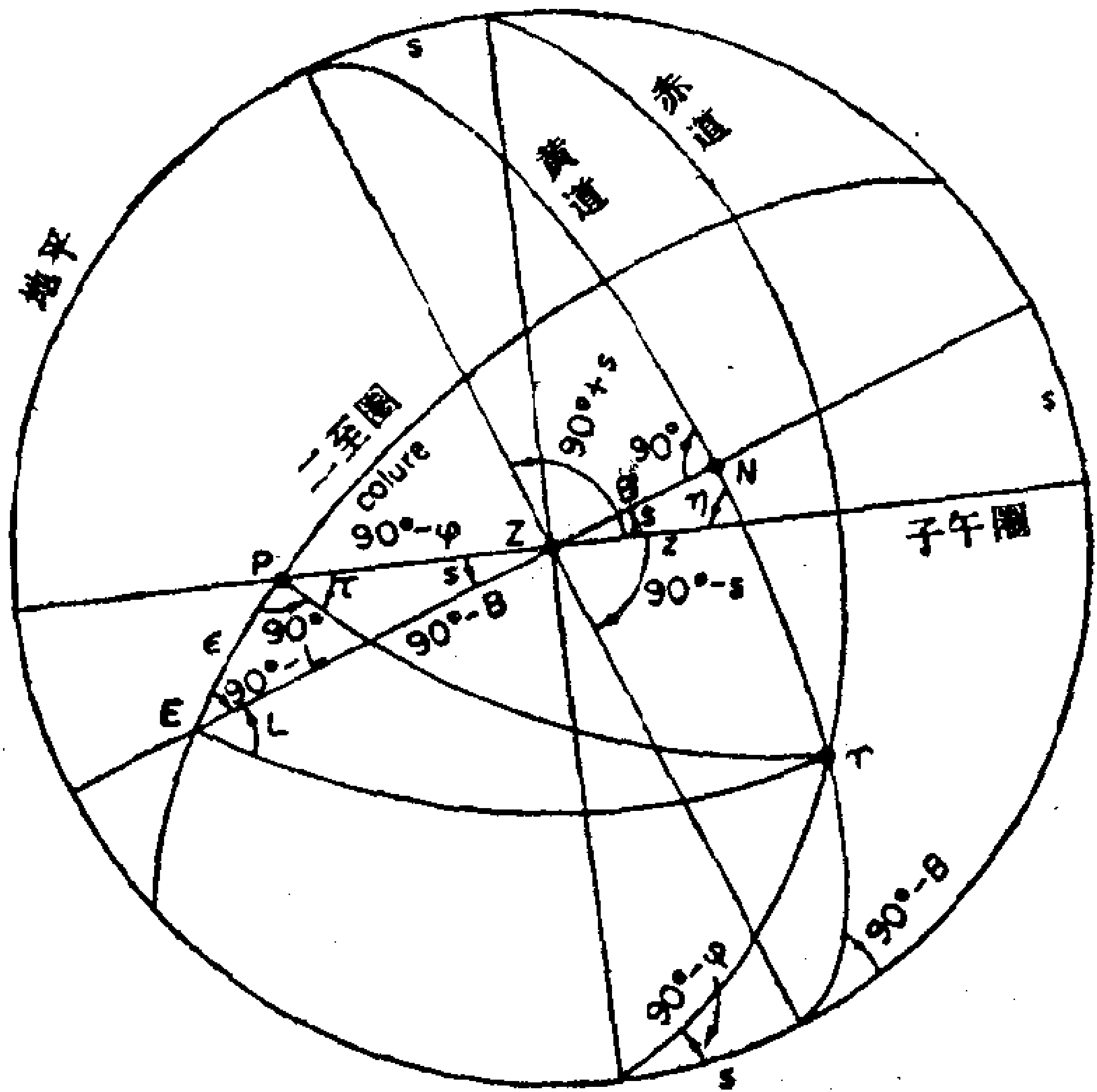


图 9 黄道系与地平系的关系

Z——天顶；P——天极；E——黄极；N——象限点；τ——恒星时；γ——春分点

北黄极的天顶距为 $90° - B$，它是黄道与地平圈的交角。黄道与地平圈的交点与通过 N 点的地平经圈和地平圈的交点相距 90°。令 s 表示这个地平经圈及子午圈(和天顶与天极相对的那段

子午圈）在地平圈上所截的弧段，则黄道与地平圈的交点距离这段子午圈角距为90°+ s，当交点在和黄极相对的那边的子午圈时就用正号。黄道与赤道在地平圈上所截的弧段也等于s。

当恒星时为τ时，从天顶、天球北极、北黄极组成的三角形中，有

$$\begin{aligned} \sin B &= \sin\varphi\cos\varepsilon - \cos\varphi\sin\varepsilon\sin\tau, \\ \cos B\sin L &= \sin\varphi\sin\varepsilon + \cos\varphi\cos\varepsilon\sin\tau, \\ \cos B\cos L &= \cos\varphi\cos\tau; \\ \cos\tau\cot s &= \cos\varphi\cot\varepsilon + \sin\varphi\sin\tau. \end{aligned} \qquad (32)$$

北黄极的时角为$\tau+6^h$，在恒星时6^h时，它在天球北极以下子午圈上，而在18^h时在天球北极以上子午圈上。

在南北极圈内的地方，黄道与地平圈的交点，在一恒星日内环绕地平圈转动一整周，但在这个区域以外，它们在东点和西点附近摆动。

当两分点在地平圈上时，黄道与地平的交角为一极大或极小值。在每一次周日运动中，当两分点到达地平圈上，且黄道在赤道以南时，即春分点从地平上升，地方恒星时为18^h时，在$\varphi = 90° - \varepsilon$的地方黄道与地平圈重合。同样，在纬度$-90°+\varepsilon$地方，春分点下落于地平，地方恒星时为$6^h$时，黄道与地平也互相重合。在纬度$+\varepsilon$处，恒星时为$6^h$时，以及在纬度$-\varepsilon$处恒星时为$18^h$时，黄道与地平圈互相正交。

黄道与子午圈交点的天顶距z由$\tan z = \tan B\sin s$给出，黄道与子午圈的交角η由$\cos\eta = \cos B\sin s$给出。例如，当月球过子午圈时，与黄道接近正交的月角线，一般来说或多或少倾斜于地平经圈。

天体位置的表示法

直接观测到的天体位置，是天体沿观测者视线方向在天球上的投影；但这个视方向是**光线到达观测者瞬间的方向**，并不与**该瞬**

间天体在空间的几何位置的方向相重合。视方向偏离实际方向的原因，部分是因为光线在通过地球大气层时，由于折射而连续改变方向，部分是因为光线**相对于观测者**的方向，由于观测者随地球运动，已不是它在空间的几何方向，更何况，在观测瞬间天体对于观测者的几何方向，也不再是光从它发出时的同样方向了。因而，在天球上观测到的位置，已离开了它的几何投影。由大气中的折射造成观测位置偏离几何位置的位移称**大气折射**，而由光的有限速度的影响造成的位移统称**光行差**。

因此，在天球上直接观测到的位置，取决于观测环境。几何投影随观测者的地理位置而定，因为从地面上不同位置观测，天体位于不同的方向，如果该天体离地球足够近，就会观测到它在天球上具有明显不同的位置。实际观测到的位置偏离这个几何投影的变化量取决于这时观测者随地球的运动，以及光线路径中环境的物理条件。

在旋转天球上参考圈的位置与这些环境无关，但因为这些圈并不是完全固定在天球上，在不同时刻观测到的天体的位置，一般就相应于不同的坐标系——天球上任一特定点的坐标取决于在观测时刻参考圈在天球上的位置。同样，地球上一固定点的地理坐标值是有微小变化的，而地理坐标系与地方地平系的关系，就是用这个坐标值来表达的。

对不同的观测做互相比较，或把观测位置与理论计算位置做比较以前，必须将它们换算到**同一参考系**，还必须把它们换算到在**相同观测环境**下的位置。与观测者在地面上的位置有关的影响包括：折射，由地球自转所造成的那一部分光行差，以及观测者到天体的几何方向与地心到天体的方向差，后者又称**地心视差**。从直接观测到的位置除去这些影响后得到的位置，就等于从运动着的地球中心看到的天体的位置，这个位置就是通常在天文术语中所称的**视位置**。通过除去由地球公转运动引起的光行差，进一步把视位置归算到几何位置，并归算到同一坐标系后，互相之间就

可比较了。

为了确定观测环境的归算值，需要推导出视差、折射和光行差对**天体的坐标**的影响的表达式。此外，由于天球上参考圈的运动，使**天球上点的坐标**发生变化，这个变化的表达式同样也必须推导出来，才能确定把位置归算到同一坐标系的归算值。这些归算的原理是下面几章的主题。

第四章 视　差

在不同观测地点，直接观测到天体位置位于天球上的不同点，因为从不同观测地点到天体的方向不同，从而天体在天球上的几何投影也不同。在空间从两个点分别到天体的几何方向的差别，是以这两点到天体的两条直线所夹的角来量度的，一般用**视差**这个名词来表示。这个角等于从这两点分别到该天体的连线在天球上的两个几何投影点之间的弧段。

按照天球在数学上是无限大的概念，观测者在空间的移动并不影响天球上参考圈的位置。在不同地理位置地方看到的天球参考圈形象的不同，不是由于观测者的空间位置的不同造成的，而是因为在地球的曲面上不同的地点处铅垂线方向的不同和由之而引起的地平系统的圈在天球上的移动而造成的。因为视差，使得直接观测到的天体相对于参考圈的位置随观测点位置不同而变化。在相隔足够远的不同的地理位置上，能感觉到离地球不太远的天体的赤道或黄道坐标的不同，而当在一固定地理位置上的观测者随着地球自转而做周日运动时，天体的这两种坐标也在变化。同样，除了因为在不同地理位置上铅垂线方向的不同而使地平坐标不同外，也直接受到观测者在空间位置的不同所引起的视差的影响。

在实际应用时，**视差**这个名词通常限制于两个观测位置间的距离小于两者到被观测天体的距离时才适用。从两个地点同时看到的天体在天球上位置的差别是很小的，可用坐标的微小变化来表示。实用上，视差通常是指从选用的标准参考点与从某个实际观测地点看到的天体位置的差别。观测太阳系天体最常用的标准点是地球中心，而观测恒星使用的标准点是太阳中心。当选用地球中心为标准参考点时，从地心与观测地点看天体在天球上的两

个几何投影之间的角距离称为**地心视差**或**周日视差**，当取太阳中心为标准参考点时，产生的视差称为**日心视差**或**周年视差**。

但如果差别很大，实质上已代表了从一个坐标系到另一个坐标系的实际坐标变换，对这种情况，视差这个名称就不再使用了，例如，行星的日心位置和地心位置之间的差别。但有时视差这个名词可以扩展到从行星上看到的地球及太阳方向间的差别，称它为该行星的**周年视差**，它类似于**恒星的周年视差**。

地心视差

从地球表面的观测者到天体的几何方向，和从地心到这天体的几何方向都位于通过地心天顶的平面内。这两方向间的交角p为地心视差，它是地心天顶和天体在观测者处所张的角$z'_{\prime}$与在地心处所张的角$z_{\prime}$之差

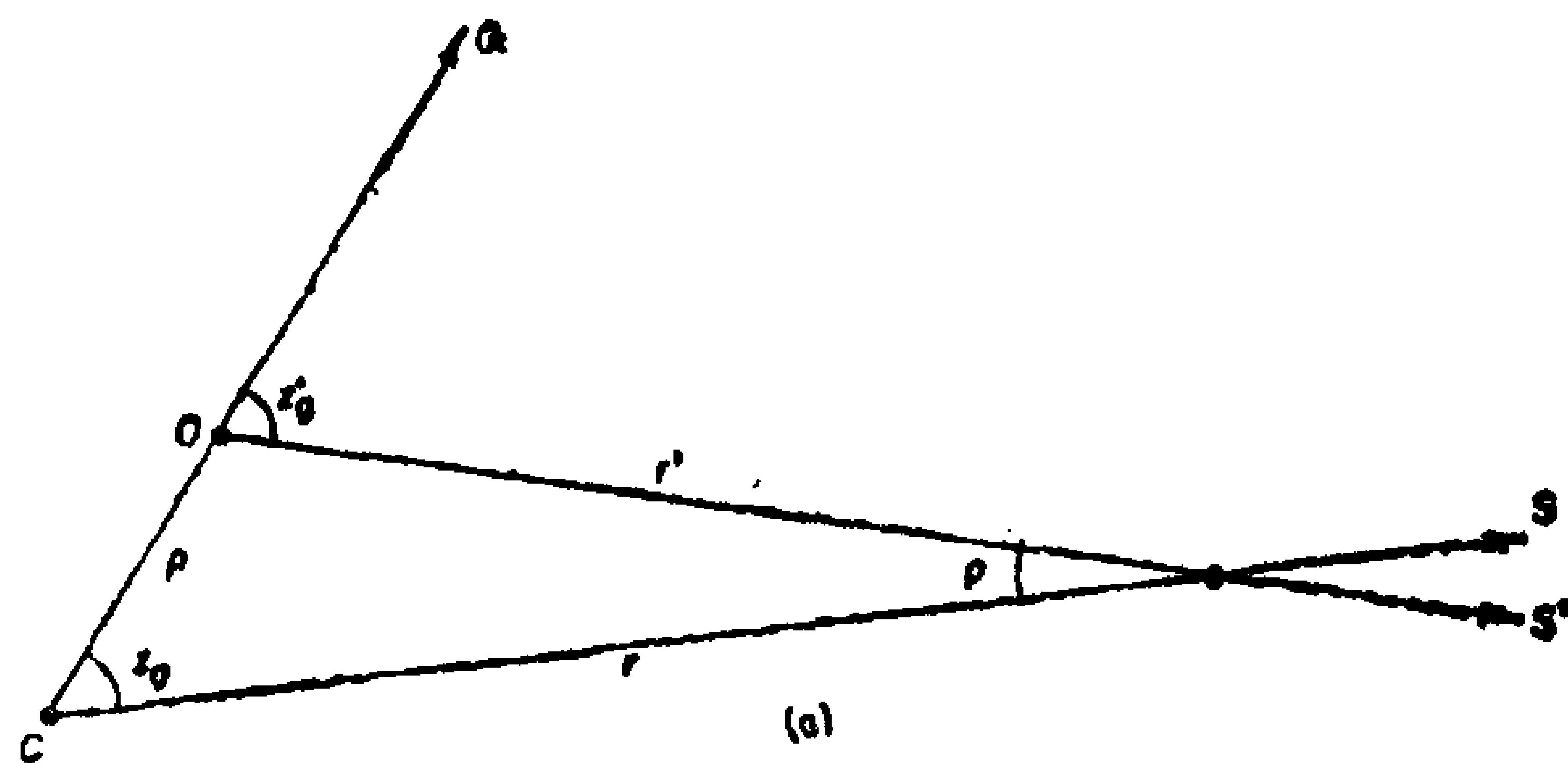
$$p = z'_{\prime} - z_{\prime} \tag{33}$$

式中$z'_{\prime} \geqslant z_{\prime}$（见图10）。$p$角为从地心到观测者的半径$\rho$在天体处所张的角。在地心天顶处地心视差为零，在地心地平处$z'_{\prime} = 90°$，地心视差最大。

由于地心视差天体在天球上的位移p，完全是在**地心天顶距**中的位移，所以在**很靠近**地平经圈的平面内位移，按照（33）式，它把天体拉向地平。可是，由于地心天顶与大地天顶不相重合，通常地面位置对于地心位置而言在方位角和高度两方面都改变了。假如地球是圆球，除了垂线偏差的影响，在方位角上就完全没有视差，由于地球的扁平形状而引起的方位角的实际视差很小，在子午圈上为零。

要确定地心视差影响的精确值，观测者的地理位置必须以大地坐标而不是天文坐标来表示，因为视差是由观测者相对于地心的几何位置确定的。

因此，如果要求高精度的视差，而且视差值很大时，例如，精确计算月球视差时，如果用天文坐标必须加地方垂线偏差改



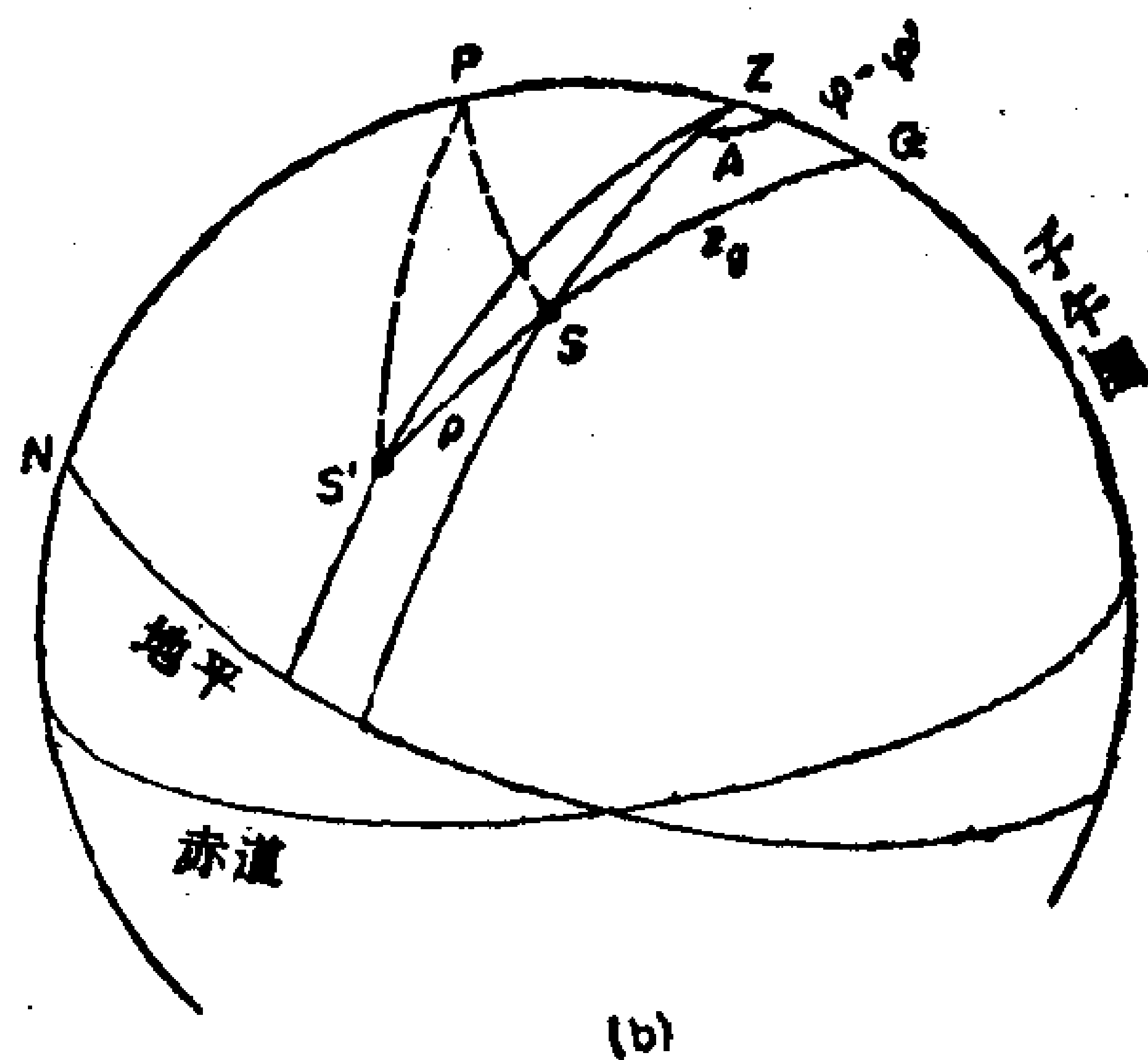


图 10 地心视差

(a) C——地心; C——观测者; G——地心天顶; S——地心方向; S'——地面方向

(b) Z——大地天顶; F——天极; G——地心天顶

正，而如果用大地坐标则必须考虑到测站在椭球上的高程。

从平面三角的正弦定律，

$$\sin p=\frac{\rho}{r}\sin z'_t\ ,$$

式中 r 为天体的地心距。当 $z'_t=90°$ 时，p 值称**地平视差**，以 H 表示，得 $\sin H=\rho/r$，及

$$\sin p = \sin H \sin z'_g.$$

由此式及（33）式，有 $\sin p = \sin H \sin(p + z_g)$，展开并以$\cos p$除之，得

$$\tan p = \frac{\sin H \sin z_g}{1 - \sin H \cos z_g}$$

由此解得

$$p = \left(H - \frac{1}{6} H^3\right) \sin z_g + \frac{1}{2} H^2 \sin 2z_g$$

$$+ \frac{1}{3} H^3 \sin 3z_g + \cdots\cdots.$$

当 ρ 为标准椭球的赤道半径 a 时，在地心纬度 $\varphi' = 0°$ 处，H的值为**赤道地平视差** H_0，它由 $\sin H_0 = a/r$ 给出。对于在**平均地心距离** r_0 **处的天体赤道地平视差称为平均赤道地平视差** π：

$$\sin \pi = a/r_0,$$

$$\pi = \sin \pi + \frac{1}{6} \sin^3 \pi + \cdots\cdots,$$

$$\sin p = \frac{\rho}{a} \frac{r_0}{r} \sin \pi \sin z'_g.$$

假如地球为球体，地平视差就是从天体上看到的地球的角半径，因为从地球上满足 $p = H$ 的任一点到天体的方向将与地球表面相切，但是因为地球系椭球，与地球表面的切线，一般并不与切点处 $z'_g = 90°$ 的方向重合，两者的差值取决于该点的纬度及切线的方位角。因此，当 $z'_g = 90°$时，ρ 对于一个地球外部的点所张的角与地球半径在该点所张的角并不相等。

一个赤纬为 0° 的天体，在大地赤道上的观测者看来，它在大地地平圈上东点或西点，从这天体看到的地球赤道椭圆面的视赤道半径就是赤道地平视差，在该处地心天顶与大地天顶重合，而从天体到地球圆面赤道直径两端点处的两条切线，与圆形赤道

的半径正交且指向东点和西点。地球的直径截面中唯一呈圆形的部分是赤道截面。

地心视差一般很小，很少需要严格的公式，但对于月球的地心视差有时则需要严格公式。月球的赤道地平视差平均约1°，在精确计算时必须应用严格的三角公式。因为月球离开我们那么近，必须考虑观测者在海平面上的高度，例如，立克天文台的高度在月球上所张的角约0.7″。

取 $p=\sin p$，且略去方位角上的视差，通常已足够精确。由此，$z'_1=z'-(\varphi-\varphi')\cos A$，其中 z' 是从大地天顶起算的地面天顶距，A是从子午圈向西量度的方位角，不考虑垂线偏差，z' 就是从天文天顶起算的观测天顶距。在这种近似下，用赤道地平视差 H_0 表示的，以弧秒为单位的**高度视差**为：

$$p''=\frac{\rho}{a}H''_0\sin[z'-(\varphi-\varphi')\cos A] \tag{34}$$

把它加在观测所得的高度上，就得到在天文地平圈以上的地心高度。因为 $H/H_0=\rho/a$，及

$$\rho/a=1-f\sin^2\varphi+\frac{5}{8}f^2\sin^2 2\varphi+\cdots\cdots,$$

因此在某一纬度上的地平视差为

$$H=H_0\left(1-f\sin^2\varphi+\frac{5}{8}f^2\sin^2 2\varphi+\cdots\cdots\right) \tag{35}$$

式中 f为地球扁率。除了其它近似外，再略去扁率，得 $p''=H''\sin z'$。

在纬度 φ 处的地平视差，有时称为该纬度的**归化视差**。差值 $H_0-H=[1-(\rho/a)]H_0$ 称为赤道视差的归算值，或有时称为该纬度的地平视差增量，它是由于地球的扁率而产生的改正量，由 H加上这个改正量就可以得到赤道地平视差 H_0。由（35）式可得

$$H_0 - H = H_0\left[\frac{1}{2} f(1-\cos 2\varphi) - \frac{5}{16} f^2 (1 - \cos 4\varphi) + \cdots\right]。$$

对于月球，这个归算值的量级为 $+6''(1-\cos 2\varphi)$，在赤道上为 $0''$，在纬度 $45°$ 为 $6''$ 和在两极为 $12''$。

方位角和高度角的视差

在表示视差位移的（33）式中，高度角和方位角两个视差分量的严格公式，可用以地平面作为基本平面的地面极坐标系和地心极坐标系中天体的坐标值来导出。

地球表面上一点的地平面，子午面以及卯酉面组成一个直角地面坐标系。以地平面作为 XY 平面，正 X 轴指向南，正 Y 轴指向西和正 Z 轴指向天顶，则天体的地面坐标为

$$x' = r'\sin z'\cos A', \quad y' = r'\sin z'\sin A', \quad z' = r'\cos z',$$

其中 r' 为离观测者的距离，z' 为观测的几何天顶距，A' 为方位角，**自南向西**量到 $360°$。通过地球中心且平行于这个地面坐标系坐标平面的平面，也同样与天球相交于观测者的地平圈、子午圈和卯酉圈。在这个地心直角坐标系中，天体的坐标为

$$x = r\sin z\cos A, \qquad y = r\sin z\sin A, \qquad z = r\cos z,$$

其中 r 为地心距离，z 为自**大地**天顶（不是地心天顶）起计量的地心天顶距和 A 为地心方位角，自南向西量度。

观测者在地面坐标系的原点，他在地心坐标系中的坐标为 $\rho\sin(\varphi-\varphi')$，0，$\rho\cos(\varphi-\varphi')$。因此，在地平系中地面坐标与地心坐标之间的严格关系式为：

$$r'\sin z'\cos A' = r\sin z\cos A - \rho\sin(\varphi-\varphi'),$$

$$r'\sin z'\sin A' = r\sin z\sin A,$$

$$r'\cos z' = r\cos z - \rho\cos(\varphi-\varphi').$$

为了以地心坐标与地面坐标的差来表示这些方程，首先用 $\sin A$ 乘第一式，$\cos A$ 乘第二式，再相减，然后以 $\cos A$ 乘第一

式，$\sin A$乘第二式，再相加，就得到由A及r求$A'-A$的方程式

$$r'\sin z'\sin(A'-A)=\rho\sin(\varphi-\varphi')\sin A,$$

$$r'\sin z'\cos(A'-A)=r\sin z-\rho\sin(\varphi-\varphi')\cos A\ .$$

将第一式乘$\sin\frac{1}{2}(A'-A)$，第二式乘$\cos\frac{1}{2}(A'-A)$，再相加，并引入辅助式

$$\tan\gamma'=\tan(\varphi-\varphi')\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)},$$

得

$$r'\sin z'=r\sin z-\rho\cos(\varphi-\varphi')\tan\gamma',$$

$$r'\cos z'=r\cos z-\rho\cos(\varphi-\varphi'),$$

由此，得到从z和r求$z'-z$的式子为

$$r'\sin(z'-z)=\rho\cos(\varphi-\varphi')\frac{\sin(z-\gamma')}{\cos\gamma'},$$

$$r'\cos(z'-z)=r-\rho\cos(\varphi-\varphi')\frac{\cos(z-\gamma')}{\cos\gamma'}\ .$$

把导出这些方程式的过程作一定的更改，就可得到由A'，z'，r求$A'-A$和$z'-z$的公式

$$\sin(z'-z)=\frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')\sin(z'-\gamma')}{r\cos\gamma'},$$

$$\sin(A'-A)=\frac{\rho\sin(\varphi-\varphi')\sin A'}{r\sin z}$$

式中，近似值$\gamma'=(\varphi-\varphi')\cos A'$可用来求$z'-z$的一阶近似。

把以z和r表示$z'-z$的第一式乘$\sin\frac{1}{2}(z'-z)$，第二式乘$\cos\frac{1}{2}(z'-z)$，再相加，得到求r'的公式为

$$r'=r-\frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')\cos\left\{\frac{1}{2}(z'+z)-\gamma'\right\}}{\cos\gamma'\cos\frac{1}{2}(z'-z)}$$

或以另一种形式表示，把表示 $r'\sin z'$ 的方程乘 $\cos\gamma'$，把表示 $r'\cos z'$ 的方程乘 $\sin\gamma'$，再相减，得

$$r'=r\frac{\sin(z-\gamma')}{\sin(z'-\gamma')}. \tag{36}$$

同样，将表示 $z'-z$ 的两个方程式各平方后相加，得

$$(r'/r)^2=1-2n\cos(z-\gamma')+n^2,$$

式中

$$n=\frac{\rho}{r}\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma'}.$$

以地球的赤道半径 a 作为距离单位，以 $\frac{1}{r}=\sin H_0$ 代入这些方程中，得

$$\tan(A'-A)=\frac{m\sin A}{1-m\cos A},$$

$$\tan(z'-z)=\frac{n\sin(z-\gamma')}{1-n\cos(z-\gamma')}, \tag{37}$$

其中

$$m=\frac{\rho\sin H_0\sin(\varphi-\varphi')}{\sin z},\quad n=\frac{\rho\sin H_0\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma'},$$

A'，z' 表示地面坐标值，A，A' 均**向南向西量度**。

以级数展开，这些表达式就变为

$$\gamma'=(\varphi-\varphi')\cos A-\frac{(\varphi-\varphi')^2\rho\sin H_0\sin^2 A}{2\sin z}\sin 1''+\cdots,$$

$$A' - A = (1/\sin 1'')m \sin A + \frac{1}{2} m^2 \sin 2A$$

$$+ \frac{1}{3} m^3 \sin 3A + \cdots\cdots,$$

$$z' - z = (1/\sin 1'')n \sin (z - \gamma') + \frac{1}{2} n^2 \sin 2(z - \gamma')$$

$$+ \frac{1}{3} n^3 \sin 3(z - \gamma') + \cdots\cdots,$$

取到第一阶

$$\gamma' = (\varphi - \varphi')\cos A,$$

$$A' - A = \rho H_0 \sin(\varphi - \varphi')\sin A \operatorname{cosec} z,$$

$$z' - z = \rho H_0 \sin(z - \gamma') .$$

同样地，以 A' 和 z' 表示的式为

$$A' - A = \rho H_0 \sin(\varphi - \varphi')\sin A' \operatorname{cosec} z',$$

$$z' - z = \rho H_0 \sin(z' - \gamma');$$

并参看（34）式。

赤经和赤纬的视差

地心视差对赤道坐标的影响，可由赤道系统中的地心和地面坐标的关系，按应用于地平系的同样的方法求得。联系地心坐标（r，α，δ）与以地面上一点（ρ，φ'）作为原点的地面坐标（r'，α'，δ'）的严格方程式为

$$\begin{aligned} r' \cos\delta' \cos\alpha' &= r\cos\delta\cos\alpha - \rho\cos\varphi'\cos\tau, \\ r'\cos\delta'\sin\alpha' &= r\cos\delta\sin\alpha - \rho\cos\varphi'\sin\tau, \\ r'\sin\delta &= r\sin\delta - \rho\sin\varphi', \end{aligned} \tag{38}$$

式中 τ 为地方恒星时。令 $r'/r = f$ 及 $1/r = \sin H_0$，即取地球的赤道半径 a 作为单位距离，从前两式得

$$f\cos\delta'\sin(\alpha' - \alpha) = \rho\sin H_0\cos\varphi'\sin(\alpha - \tau),$$

$$f\cos\delta'\cos(\alpha' - \alpha) = \cos\delta - \rho\sin H_0\cos\varphi'\cos(\alpha - \tau),$$

由此得到

$$\tan(\alpha-\alpha')=\frac{\rho\cos\varphi'\sin H_0\sin h}{\cos\delta-\rho\cos\varphi'\sin H_0\cos h}$$

$$=\frac{(\rho\cos\varphi'\sin H_0\sec\delta)\sin h}{1-(\rho\cos\varphi'\sin H_0\sec\delta)\cos h},\qquad(39)$$

式中 $h=\tau-\alpha$为地方时角，并令

$$\tan\gamma=\frac{\tan\varphi'\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')}{\cos\left[h+\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\right]}$$

得 $$f\sin\delta'=\sin\delta-\rho\sin H_0\sin\varphi',$$

$$f\cos\delta'=\cos\delta-\rho\sin H_0\sin\varphi'\cot\gamma,$$

因此

$$\tan(\delta-\delta')=\frac{(\rho\sin H_0\sin\phi'\operatorname{cosec}\gamma)\sin(\gamma-\delta)}{1-(\rho\sin H_0\sin\varphi'\operatorname{cosec}\gamma)\cos(\gamma-\delta)},\qquad(40)$$

及 $$\frac{r'}{r}=\frac{\sin(\delta-\gamma)}{\sin(\delta'-\gamma)}.\qquad(41)$$

(39)，(40) 和 (41) 式为由已知地心坐标，r，α，δ求地面坐标的严格公式。将观测坐标 α'，δ' 归算到地心坐标 α，δ，应用下面的形式要好些

$$\sin(\alpha-\alpha')=\rho\sin H_0\cos\varphi'\sec\delta\sin(\tau-\alpha'),$$

$$\tan\gamma'=\tan\varphi'\cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\sec\left[h+\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\right],$$

$$(42)$$

$$\sin(\delta-\delta')=\rho\sin H_0\sin\varphi'\operatorname{cosec}\gamma'\sin(\gamma'-\delta'),$$

可是因为在实际上必须用 δ' 代替 δ 来先计算 $\alpha-\alpha'$，所以需要用逐次逼近法。

(39) 和 (40) 式也可直接由天球上地心天顶、天极及天体

的地心和地面位置构成的三角形求得。在实际应用中为了便于数值计算，可把这些严格表达式化成为各种其它形式，并使用许多不同的近似式。为了简洁起见，可以把这些式子展开为级数，令

$$\psi=\frac{\rho\cos\varphi'\sin H_0}{\cos\delta},\qquad \chi=\frac{\rho\sin\varphi'\sin H_0}{\sin\gamma},$$

得

$$\tan(\alpha-\alpha')=\frac{\psi\sin h}{1-\psi\cos h},\ \tan(\delta-\delta')=\frac{\chi\sin(\gamma-\delta)}{1-\chi\cos(\gamma-\delta)},$$

它们是标准三角方程式，其解为

$$\alpha-\alpha'=\psi\sin h+\frac{1}{2}\psi^2\sin 2h+\frac{1}{3}\psi^3\sin 3h+\cdots\cdots,$$

$$\delta-\delta'=\chi\sin(\gamma-s)+\frac{1}{2}\chi^2\sin 2(\gamma-\delta)$$

$$+\frac{1}{3}\chi^3\sin 3(\gamma-\delta)+\cdots\cdots.$$

在上中天时，h 和$\alpha-\alpha'$ 为零，因此 $\gamma=\gamma'=\varphi'$，所以（40）和（42）式变为

$$\tan(\delta-\delta')=\frac{\rho\sin H_0\sin(\varphi'-\delta)}{1-\sin H_0\cos(\varphi'-\delta)},$$

$$\sin(\delta-\delta')=\rho\sin H_0\sin(\varphi'-\delta').$$

（38）式可写成

$$x'-x=-\rho\cos\varphi'\cos\tau,$$

$$y'-y=-\rho\cos\varphi'\sin\tau,$$

$$z'-z=-\rho\sin\varphi',$$

一般左边与 r 相比很小，因而右边的表达式可以代替微分公式（18）中的 dx，dy，dz，用以决定 $d\alpha$，$d\delta$，dr，由此得

$$\alpha-\alpha'=\frac{\rho\cos\varphi'\sin(\tau-\alpha)}{\cos\delta},$$

$$\delta-\delta'=\frac{\rho}{r}\{-\sin\delta\cos\varphi'\cos(\tau-\alpha)+\cos\delta\sin\varphi'\},\quad(43)$$

$$r-r'=\rho\{\cos\delta\cos\varphi'\cos(\tau-\alpha)+\sin\delta\sin\varphi'\},$$

显而易见，这是严格公式的近似式。在（43）式中，ρ 和 r 必须以同一长度单位表示。实用时，ρ 通常以地球赤道半径 a 为单位计量，r 以天文单位（au）计量；因而必须以 $\rho\pi_\odot\sin 1''$ 代 ρ，$\pi_\odot$ 为以弧秒表示的太阳视差常数，由下列关系式定义

$$1\ \mathrm{au}=a/\sin\pi_\odot .$$

由这关系式得

$$\rho\text{赤道半径}=\rho\pi_\odot\sin 1''\mathrm{au} .$$

同样，$\pi_\odot\sin 1''$ 可以当作是将 $1/r$ 从天文单位换算到赤道半径的转换因子，因为

$$r\ \mathrm{au}=r/\pi_\odot\sin 1''\ \text{赤道半径} .$$

$\alpha-\alpha'$ 和 $\delta-\delta'$ 值已由马克斯韦尔（A. D Maxwell）● 展开为（43）式近似值的幂级数。

在实际应用时，这些方程可写成更方便的形式。例如，令

$$\rho\pi_\odot\sin 1''\cos\varphi'\sin(\tau-\alpha)=A,$$
$$-\rho\pi_\odot\sin 1''\cos\varphi'\cos(\tau-\alpha)=B,$$
$$\rho\pi_\odot\sin 1''\sin\varphi'=C,$$

得

$$\alpha-\alpha'=A/r\cos\delta,$$
$$\delta-\delta,=(B/r)\sin\delta+(C/r)\cos\delta,$$
$$r-r'=-B\cos\delta+C\sin\delta,$$

对特定的天文台，可以用时角 $\tau-\alpha$ 为自变量，C 为常数，对 A、B 编成表。在不能用这些表时，可以引入辅助量 g 和 G，得到另一种方便的形式。g 和 G 由下列式定义

$$\sin\varphi'=g\sin G,$$

● A.D.Maxwell, Astr, Jour, 42, No.973(1932).

$$\cos\varphi'\cos(\tau-\alpha)=g\cos G,$$

再令

$$1/15\rho\pi_{\odot}\sin 1''\cos\varphi'=E,$$

$$\rho\pi_{\odot}\sin 1''\sin\varphi'=D\ .$$

则 $\tan G=\tan\varphi'/\cos(\tau-\alpha),\ G<180°$

$$\pi_{\alpha}^{s}=\alpha-\alpha'=\frac{E}{r}\frac{\sin(\tau-\alpha)}{\cos\delta},$$

$$\pi_{\delta}'=\delta-\delta'=\frac{D}{r}\frac{\sin(G-\delta)}{\sin G},$$

$$r-r'=D\frac{\cos(G-\delta)}{\sin G},$$

$$r\pi_{\alpha}=0.587^{s}\rho\cos\varphi'\sin h\sec\delta,$$

$$r\pi_{\delta}=8.80''\rho\sin\varphi'\cos\delta-8.80''\rho\cos\varphi'\cos h\sin\delta,$$

式中D和E对特定的天文台为常量，称为**视差常数**。$r\pi_{\alpha}$，$r\pi_{\delta}$称为**视差因子**。观测者在公布他们的观测结果时，常同时刊布视差因子，并不对观测加时差改正。而这些因子既是作为在1天文单位距离处的视差在赤经和赤纬上的分量，也是作为视差为1″的分量；前者仅需以实际距离来除，后者用实际的地平视差相乘。

在上中天时，$\tau-\alpha=0°$ 及

$$\alpha-\alpha'=0,$$

$$\delta-\delta'=\frac{\rho\pi_{\odot}\sin 1''}{r}\sin(\varphi'-\delta),$$

$$r-r'=\rho\pi_{\odot}\sin 1''\cos(\varphi'-\delta),$$

在下中天，$\tau-\alpha=180°$。

如果，不知道天体的地心距离，比如新发现的天体，可以将天体在空间的位置计算到以观测者为原点的地面坐标系统，以消除视差影响。为此，太阳的地面坐标可以用（38）式，由它的地心直角坐标X，Y，Z求得，令F等于15 E，具有足够的精度的式子为：

$$X' = X - F\cos\tau,$$
$$Y' = Y - F\sin\tau,$$
$$Z' = Z - D.$$

黄经和黄纬的视差

地心视差对黄道坐标的影响，可以直接从赤经和赤纬的视差表达式中导出。恒星时 τ 为观测者子午圈的赤经，因而也是地心天顶的赤经，地心纬度 φ' 为地心天顶的赤纬。在各种不同形式的赤经赤纬视差表达式中，以天体的黄经和黄纬代替地心天顶的赤道坐标（τ, φ'），并以（λ, β）代替（α, δ），就可得到相应的 λ 和 β 的视差表达式。

地心天顶的黄经和黄纬，可以从以前导出的黄道系和地平系的关系的公式求得，如果要得到所需的精度，还要考虑地心天顶与大地天顶的差值。

在黄道系中，如果不知道距离，要消去视差影响，可应用高斯提出的方法，将空间位置计算到从观测者到天体的直线与黄道平面的交点上。从该点（称为虚构点）观测到的天体的黄经 λ' 及黄纬 β' 与从观测点观测到的相同。以虚构点作为原点的观测者的直角坐标为

$$(r-r')\cos\lambda'\cos\beta',\quad (r-r')\sin\lambda'\cos\beta',$$
$$(r-r')\sin\beta',$$

其中 r 为虚构点到天体的距离，r' 为观测者到天体的距离。根据这些公式以及观测者和太阳在黄道系中的直角地心坐标，就可以求得虚构点在黄道平面内相对于太阳的位置。可是这个方法不能用于黄纬太近于 0° 的天体。

较差视差

为了把观测到的两个天体间的角距 s'，归算到相应于从地心观测到的值 s，我们从天球上由天顶及天顶距 z_1'，z_2' 的两个观测位置组成的三角形中可以求得

$$\cos s' = \cos z_1'\cos z_2' + \sin z_1'\sin z_2'\cos\Delta A,$$

式中ΔA为方位角的差，再由天顶和两个地心位置组成的三角形中不计及地球扁率得

$$\cos s=\cos z_1 \cos z_2+\sin z_1 \sin z_2 \cos \Delta A \text{ .}$$

因此，

$$\cos s=\cos(z_1-z_2)+\sin z_1 \sin z_2(\cos \Delta A-1)$$

$$=\cos(z_1-z_2)+\sin z_1 \sin z_2\left\{\frac{\cos s'-\cos z_1' \cos z_2'}{\sin z_1' \sin z_2'}-1\right\}$$

$$=\cos(z_1-z_2)-\{\cos(z_1'-z_2')$$

$$-\cos s'\}\frac{\sin z_1 \sin z_2}{\sin z_1' \sin z_2'} \text{ .}$$

在绝大多数实际应用中，这个表达式可以按照具体情况简化为近似式。

对于在天球上相互靠得很近的天体，赤经和赤纬的较差视差可以通过微分式（43）得到，而根据得到的表达式，视差对角距离Δ和位置角p_1的影响，可用下列微分式得到：

$$\tan p_1=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\cos \delta}{\delta_2-\delta_1},$$

$$\Delta=(\alpha_2-\alpha_1)\cos \delta \sin p_1+(\delta_2-\delta_1)\cos p_1,$$

这两式是从第二章中赤经和赤纬的微分表达式得到的。

将这些改正式应用到由于在天球上位置的不同而造成的较差视差，就可以得到地心相对位置。但如两天体的地心距离不同，因为视差与距离有关，它们的相对位置在不同时刻将不同。恒星视差很小，实用中，只有因距离不同而造成的较差周年视差才能测量得到。

周年视差

只有太阳系的天体，能观测到它们的地心视差的影响。但观测者在空间随着地球公转的位移是相当大的，它足以对靠近我们

的恒星造成观测到的视差位移。由于地球公转造成的观测到的恒星几何位置的变化，称为**日心视差**或**周年视差**。

日心视差 Π 是地球轨道中长轴 a 对恒星的张角；$\sin\Pi = a/r$，式中 r 为恒星到太阳的距离。在地球公转轨道上的某一位置上(图11)，恒星的地心位置将在太阳、地球和恒星组成的平面内，沿着天球上通过太阳的地心位置和恒星的日心位置的大圆弧，自恒星的

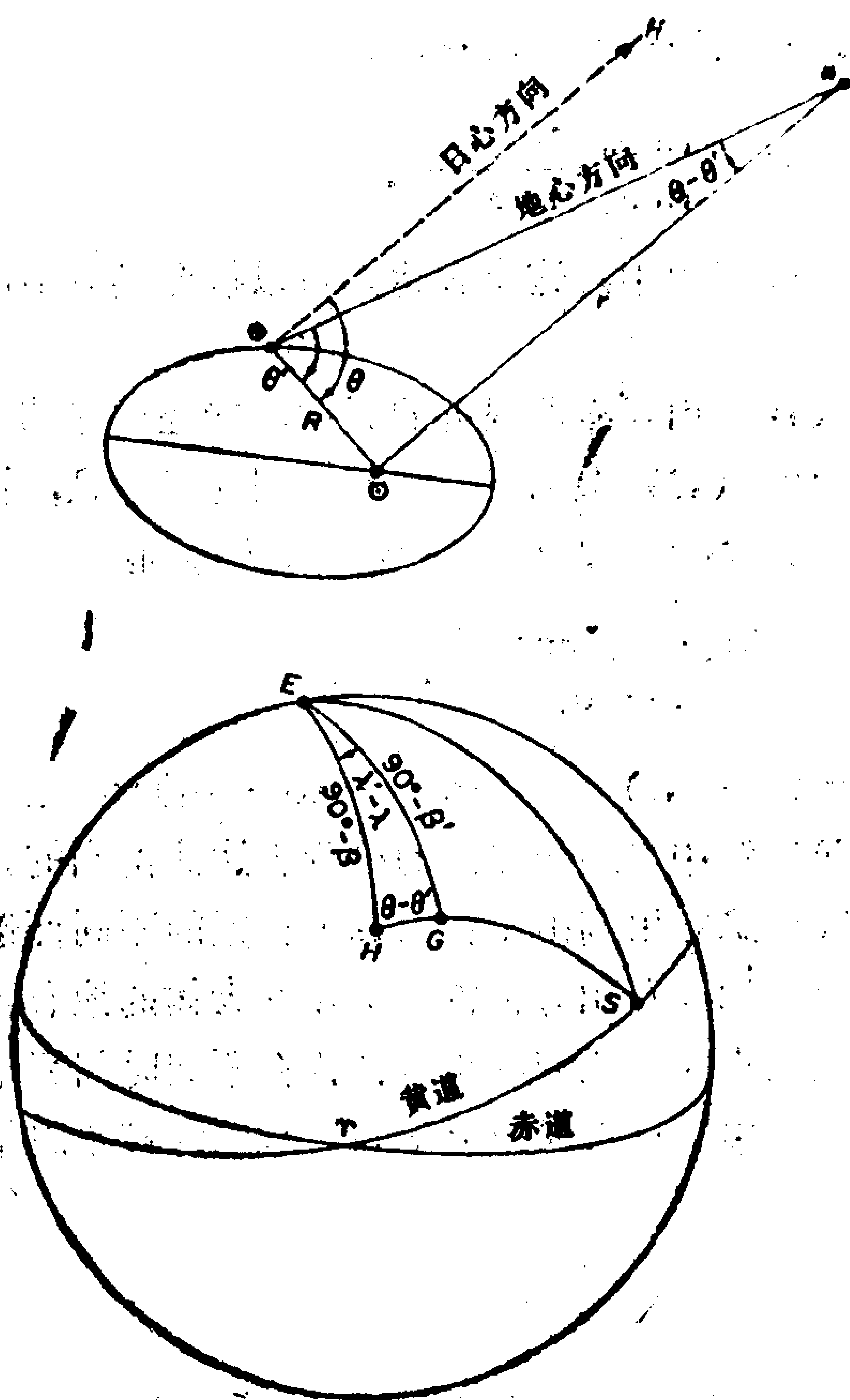


图 11 周年视差

日心位置向太阳的地心位置偏移。移动的量为$\theta-\theta'$，由下式给出

$$\sin(\theta-\theta')=\frac{R}{r}\sin\theta'=\frac{R}{a}\sin\Pi\sin\theta',$$

即使这些位移达最大时，$\theta-\theta'$ 的量仍很小，因此上式可以写为

$$\theta-\theta'=\Pi\sin\theta\ .$$

当恒星离太阳 90° 时，因周年视差造成恒星的位移达到最大值。

确定周年视差对恒星坐标的影响，根本不需要严格的方程式。实用中需要的近似公式可以按（43）式同样的方法很容易地得到。以 x'，y'，z' 表恒星的地心直角坐标，x，y，z 表日心直角坐标，略去太阳的黄纬，在黄道坐标系中显然有

$$x'-x=R\cos\odot,$$
$$y'-y=R\sin\odot,$$
$$z'-z=0,$$

而在赤道坐标系中有

$$x'-x=R\sin\odot,$$
$$y'-y=R\sin\odot\cos\varepsilon,$$
$$z'-z=R\sin\odot\sin\varepsilon,$$

其中$\odot$为太阳的地心黄经，而右边可用来代替（18）式中的 dx，dy，dz。

显然，在**日心**天球上周年视差与恒星、地球和黄极的日心位置有关，如同地心视差在**地心**天球上与天体、天顶和天极的地心位置有关一样。因此，周年视差的影响可以直接从地心坐标的表达式得到，或直接在地心天球上，以太阳代天顶，黄极代天极的三角形中，再以 $\odot-\lambda$ 代 h 和 θ 代 z_s，并取 $\varphi'=0$ 和 λ，β 代 α，δ，也可得到，但此时位移方向是相反的。

地心黄经和黄纬的周年视差

在黄道系中，因周年视差造成的地心位置（λ'，β'）对日心位置（λ，β）的位移，由下式表示

$$(\lambda-\lambda')=+\Pi\sin(\lambda-\odot)\sec\beta,$$
$$(\beta-\beta')=+\Pi\cos(\lambda-\odot)\sin\beta\ .$$

消去⊙就得到在地球每周的绕日公转中，天球上地心位置的轨迹，

$$\frac{(\Delta\lambda\cos\beta)^2}{\Pi^2}+\frac{(\Delta\beta)^2}{\Pi^2\sin^2\beta}=1,$$

这是半长轴为Π，平行于黄道的椭圆方程，这曲线称为**视差椭圆**。对于在黄道上的恒星，视差椭圆为一条直线。

地心赤经和赤纬的周年视差

在赤道系中，因周年视差造成地心位置（α'，δ'）对日心位置（α，δ）的位移，由下式表示

$$\alpha-\alpha'=\Pi\{\sin\alpha\cos\odot-\cos\varepsilon\cos\alpha\sin\odot\}\sec\delta,$$
$$\delta-\delta'=\Pi\{(\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta)\sin\odot+\cos\alpha\sin\delta\cos\odot\}\ .$$

以太阳的直角地心赤道坐标X,Y,Z表示，这些式子可变成

$$\alpha-\alpha'=\Pi(X\sin\alpha-Y\cos\alpha)\sec\delta,$$
$$\delta-\delta'=\Pi(X\cos\alpha\sin\delta+Y\sin\alpha\sin\delta-Z\cos\delta)\ .$$

$\alpha-\alpha'$ 中的因子 $X\sin\alpha-Y\cos\alpha$ 称为赤经的**视差因子**。

为了计算周年视差、可用辅助量表示这些公式，这些辅助量在许多年内可以作为常量，令

$$-\cos\varepsilon\cos\alpha=m\sin M,$$
$$-\sin\alpha=m\cos M,$$
$$\sin\alpha\sin\delta\cos\varepsilon-\cos\delta\sin\varepsilon=n\sin N,$$
$$-\cos\alpha\sin\delta=n\cos N,$$

由此，从日心位置化到地心位置的换算式为

$$\alpha'-\alpha=\Pi m\cos(M+\odot)\sec\delta,$$
$$\delta'-\delta=\Pi n\cos(N+\odot),$$

第五章　大气折射

光线通过地球大气时，空气密度沿着光线路径的连续变化，使光的传播方向产生连续变化，此外，大气中的气体以及空气中尘埃粒子的散射和选择吸收造成光谱的衰减和变化。

大气折射变化的不规则性以及它与光颜色特性的依赖性，使得要精确测定对天文观测的这个不可缺少的改正值是非常困难的。通常，当光线通过大气时由于折射而向下弯曲，总的偏离近似地随天顶距的正切而变化，因此这一效应使天体的位置向上移动，使得所有天体在天空中的位置看上去比他们的几何位置高。这个偏离量在地平处平均约 34′，随着高度的增加而迅速减小。通常大气折射的总的影响是增加天体的高度，而不改变方位角，但因为这个量与当时光线路径上每一点处的大气状态有关，确定大气折射量是一个困难的课题。又因为在整个大气中的连续变化和不规则性，折射受到不规则起伏及反常变化的影响，特别是在近地平时这种起伏更严重，因此无法确定它的理论值。

按照大气水平分层的假设，即折射率 μ 呈径向对称，$\mu=\mu(r)$，r 为离地心的距离，在光线路径上，根据折射定律有

$$\mu r\sin\zeta=\text{常量}, \tag{44}$$

其中 ζ 是光线方向与 r 的夹角，等于在每一大气层（图 12）中的入射角。对观测者来说，任一点 P 的光线方向与矢径 r_0 所成的角为

$$z=\theta+\zeta,$$

θ 为从观测者天顶起算的 P 点的地心天顶距。在观测处 $r=r_0$，$\mu=\mu_0$，$\theta=0$，视天顶距为 $z_0=\zeta_0$。

（44）式中的常数等于

$$\mu_0 r_0\sin\zeta_0=k,$$

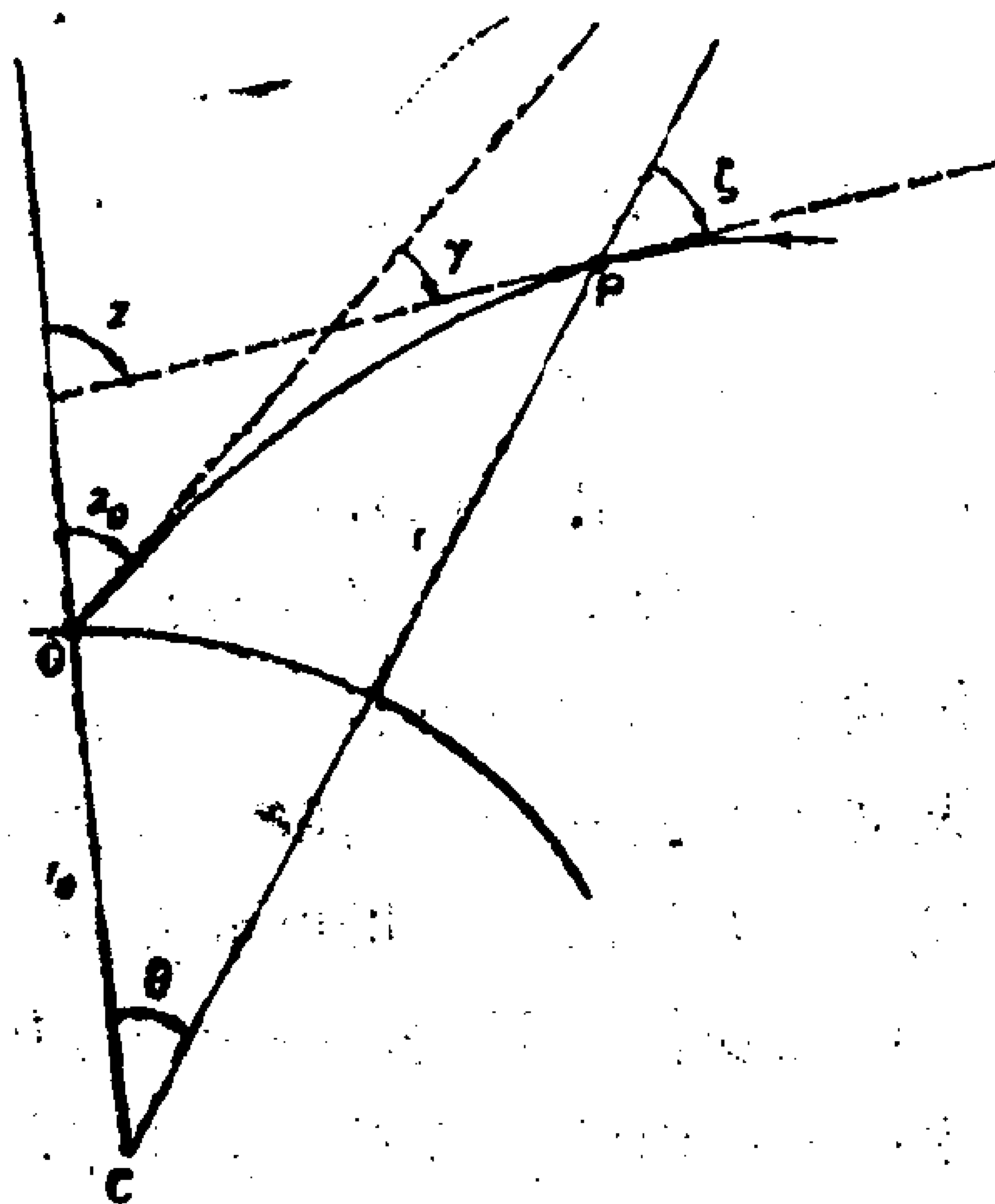


图 12 大气折射

因而
$$\tan\zeta=\frac{k}{(\mu^2r^2-k^2)^{1/2}}. \tag{45}$$

在光线路径上从P点来的光线到达观测者的方向的改变，即总折射量为

$$\gamma=z-z_0,$$

因此
$$d\gamma=dz=d\theta+d\zeta. \tag{46}$$

注意到γ不是常数，某些作者取$d\gamma=d\zeta$是错误的。

微分（44）式，并以$r\mu\sin\zeta$除之，得

$$d\zeta=-\tan\zeta\frac{d(r\mu)}{r\mu},$$

由微分几何知

$$d\theta=\tan\zeta\frac{dr}{r}. \tag{47}$$

于是由（46）及（45）式，

$$d\gamma = -\tan\zeta \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{k}{(r^2\mu^2 - k^2)^{1/2}} \frac{d\mu}{\mu}$$

$$= +\tan\zeta d\left(\log\frac{\mu_0}{\mu}\right), \tag{48}$$

再由（47）和（45）式得

$$d\theta = \frac{k}{(r^2\mu^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{dr}{r}. \tag{49}$$

这些都是严格的式子。积分（49）式，可得到光线的路径，积分（48）式，可得到大气折射

$$\delta z = \int_1^{\mu_0} \left\{ \left(\frac{r\mu}{r_0\mu_0} \operatorname{cosec} z_0 \right)^2 - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{d\mu}{\mu}. \tag{50}$$

被积函数可以有各种不同的形式，并展开为级数，对级数进行逐项积分，但要求知道函数 $\mu(r)$ 才能求积。一定波长的折射率几乎完全取决于密度，因为直到很大高度上的大气组成，除了相对少量的水蒸汽含量有变化外，实质上是均匀和不变的。根据密度随高度变化的规律以及实验室确定的 μ 和密度的关系，就可以导出函数 $\mu(r)$。然而并不能指望用这个函数形式就能够建立起折射的严格解析理论，为此，需要使用近似解析法或数值积分法。

已建立了一些不同的经验定律，它们不同程度地近似表示了 μ 和密度 ρ 的关系，其中戴尔-格拉德斯通定律为：

$$\mu - 1 = c\rho,$$

克劳修斯-莫索提方程为

$$\frac{\mu^2 - 1}{\mu + 2} = c\rho,$$

这里 c 是常数。

近似折射

令 $r/r_0=1+s$，并把（50）式的被积函数展开为级数，就可得第一级近似式，在高度40英里处 s 仅约 0.01，在更高地方的大气便不能产生明显的折射，略去 s^2 则有

$$(r^2\mu^2-k^2)^{-1/2}=\frac{1}{r_0}\left\{(\mu^2-\mu_0^2\sin^2 z_0)+2s\mu^2\right\}^{-1/2},$$

当 z_0 足够小，而使 $\mu^2-\mu_0^2\sin^2 z_0$ 比 $2\mu^2 s$ 大得多时，上式就可按二项式定理展开。在这种条件下，由（48）式得

$$\delta z=\mu_0\sin z_0\int_1^{\mu_0}\frac{d\mu}{\mu(\mu^2-\mu_0^2\sin^2 z_0)^{1/2}}$$

$$-\mu_0\sin z_0\int_1^{\mu_0}\frac{s\mu\,d\mu}{(\mu^2-\mu_0^2\sin^2 z_0)^{3/2}}+\cdots\cdots \quad (51)$$

仅保留展开式的第一项，得

$$\delta z=\sin^{-1}(\mu_0\sin z_0)-z_0,$$

令 $\mu_0=1+x$，并用马克劳林定理展开为 x 的幂级数，略去高于一阶幂的项得：

$$\delta z=(\mu_0-1)\tan z_0. \quad (52)$$

在这个近似式中，折射与大气的结构无关，完全由观测者的地方条件确定。这个近似式相当于略去地球的曲率，上述（52）式结果可在这个基础上直接得到，不必使用严格公式：此时，CP 平行于 OZ（图 13）并且

$$\zeta=z=z_0+\gamma. \quad (53)$$

由折射定律，当光线通过一平行层的介质时，其最后的方向如同整个介质的密度等于最后一层的密度所得的方向一样，即在 O 点的方向，与整个大气都据有如 O 点的折射率 μ_0 所得的方向一样。因此

$$\sin\zeta=\mu\sin z_0$$

或取 $\cos\gamma=1$， $\sin\gamma=\gamma$ 由（53）式得

$$\gamma=(\mu_0-1)\tan z_0$$

结果同（52）式一样。

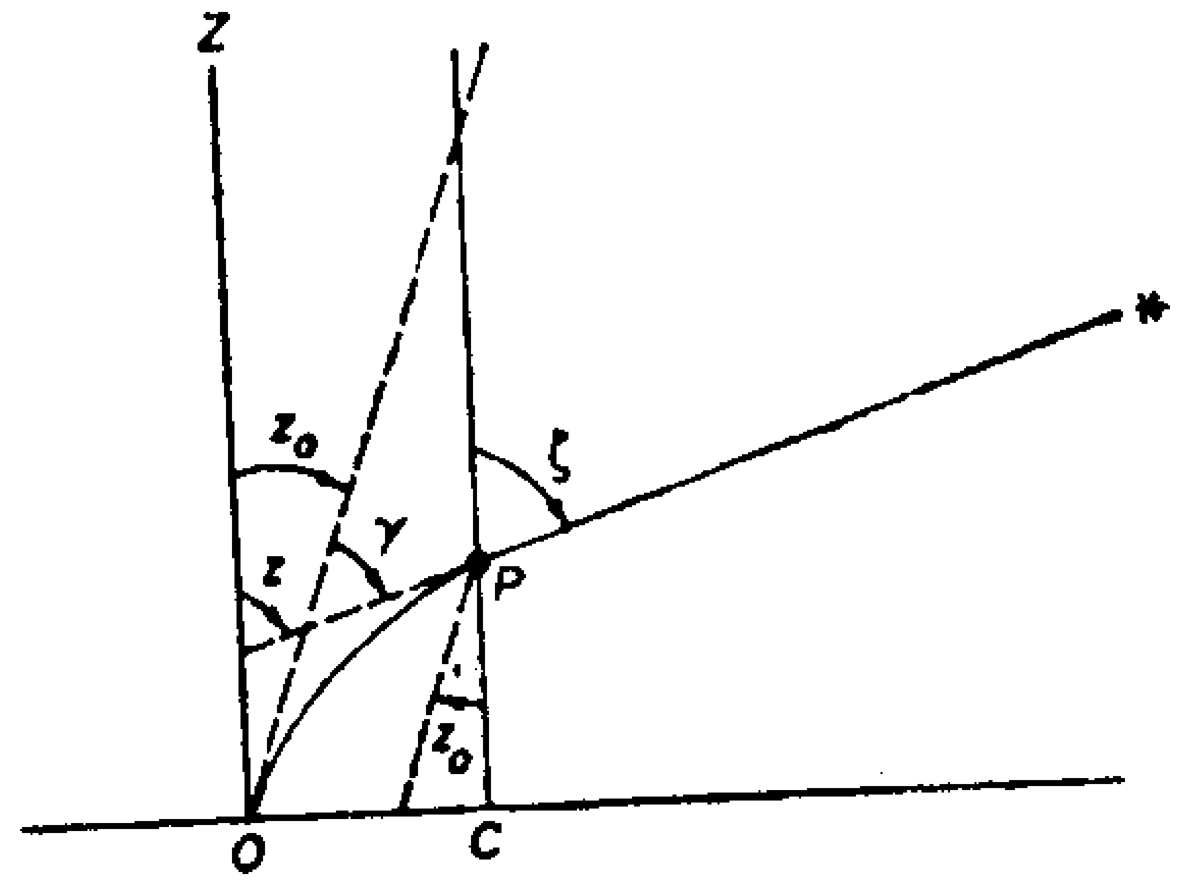


图 13　近似折射

取 0°C 及 760 mm 的标准状况下，并服从戴尔－格拉德斯通定律的大气折射率为 1.0002927，根据上述公式及理想气体定律，利用观测处的摄氏温度 t 度，气压计的读数 Bmm，得

$$\delta z=\frac{273\times0.0002927\times206264.8''}{760}\frac{B}{273+t}\tan z_0$$

$$=21.7''\frac{B}{273+t}\tan z_0\ . \qquad (54)$$

在标准状况下，得 $\delta z=60.4''\tan z_0$。

在天顶距很小时，这一近似值很接近实际数值，因为近天顶处，大气层的曲率对光线路径的影响小，使 r 方向的总变化小，但高度小于 30° 左右便不能用此式。因曲率引起的法线方向的变化同样连续地改变光线的方向，与大气层为平面时发生的情况不一样，光线经过大气层的路径愈长影响愈大。在天顶距大于 90°，光线还能完全通过地球大气并透过地面到达观测者的情况下，光线路径的后面一段处，虽然大气密度有所减小，但仍不能抵偿前面一段处密度增加所造成的折射效应。

保留（51）式前两项所得的近似式的形式为

$$\delta z=A\tan z_0+B\tan^3 z_0, \qquad (55)$$

式中常数 A 和 B，可用前述近似式中的物理常数来表示，或最好通过观测由经验来确定。这个表达式同样可以独立地直接建

立[1]。利用与系数有关的物理量表示，则有：

$$\delta z=(\mu_0-1)(1-H_0)\tan z_0-(\mu_0-1)$$
$$\times\left[H_0-\frac{1}{2}(\mu_0-1)\right]\tan^3 z_0$$

式中 H_0 为均匀大气高度与地球半径的比率。这个表达式是所有折射表达式公共的基础，也是为许多实际应用问题所用的基本折射公式，但在高度角很少时，用于天文目的则精度不够。

以 $H_0=(7.990\times10^5\ \text{cm})/(6.3709\times10^8\ \text{cm})$ 及 $u_0-1=0.0002927$ 代入得：

$$\delta z=60.29''\tan z_0-0.06688''\tan^3 z_0.$$

折射率随颜色不同而不同，而星象实际上是垂直光谱，虽则它的色散很小，而却能系统地影响天文观测。恒星的红色与蓝绿色星象之间的近似角距值列于附表中。

z	距　离
30°	0.35″
45°	0.60″
60°	1.04″
75°	2.24″

恒星的光谱型对天文观测产生系统的影响。

大气折射理论

二阶近似公式(55)对直到 75° 的天顶距是有效的。自17世纪以来，人们进行了大量细致的研究，在这个基础上建立起若干高阶的解析理论，其中一些从理论上说适用于大于 90° 的天顶距。

[1] 见 Lord Rayleigh, Phil. Mag. 36, 141(1893), 或 W. J. Humphreys, "Physics of the Air", 3ed., pp. 458-462, Mc Graw-Hill, New York, 1940〔由 Dover, New York, 1964 年再版〕.

这些理论以所采用的各种大气密度随高度变化的值为基础。

密度的变化主要取决于温度随高度的分布，在一定范围内也随水蒸气的分布而变化。直到近代很晚的时期，人们对大气密度的分布还知道得很不完整。在公元一世纪克利奥梅德斯就认识到了大气折射及其影响的性质，而托勒玫在他的光学工作中就已提到了这一情况。折射表是由蒂谷、布拉赫建立的，以后由开普勒作了改进。然而，这些作者中没有一个人掌握了正确的物理折射定律或大气真实性质的任何知识。甚至到17世纪，对于大气结构还是了解得很少。但是，除非天顶距很大，否则大气温度和其它特徵量的正确分布对确定折射量是很重要的。当天顶距小于80°时，无论选用哪一种有关大气密度随高度递减的假设，几乎都无关紧要。由卡西尼、布格、牛顿及其他人在17到18世纪建立的折射表，都是以很不相同的且很大程度上是人为选定的密度分布为基础的，它们与任何可能的实际分布有很大的不同，但自天顶到近80°天顶距却给出了在实用上相同的折射数值。

在级数展开式中，前两项的系数，几乎完全仅是由观测处的大气条件确定的。它们略微受到随高度而减小的重力的影响，但这种影响及其它的一些细微的影响在实用上是无关紧要的。第二项以后的项，取决于密度随高度的分布，但一直到近25°的天顶距处，对于任何适当的密度分布定律来说，这些项都很小；所以大气折射在实用上是与大气结构无关的。但对大于25°的天顶距，第三项及高阶项的重要性逐渐增加，在天顶距约80°的范围内，对一些适当的密度分布，这些项都具有差不多相同的数值，但系数对于大气的确切分布的敏感性逐渐增加，而在超过这个天顶距时，这些项的值愈来愈可观，大气折射值就愈来愈和大气结构有关。因此不同的理论，在愈靠近地平时，彼此的不一致性愈大。

高度很低时，没有一种理论能给出针对具体情况的精确折射值，在靠近地平时通常理论只能表示平均折射。在建立低高度的折射表时，一般只是依赖于观测而不是依赖于理论。但在特殊情

况下，尤其是在极端或反常大气状况下，则根本不管表的基础偏离折射的实际值有多大的程度。

作为精密天文工作应用的折射表的基础，各种折射理论的详细叙述可见于早期的一些文献中。这里不再赘述那些冗长复杂的数学计算。早期的各种理论，现在仅具有历史意义了，纽康[1]和肖韦纳特[2]曾对这些主要的理论作过综述。这些理论都不能令人满意，因为作为假设的大气模型，它的基础对实际大气近似不够，另外，用于这些模型的级数展开式在近地平时并不适用。根据现在所拥有的长期积累的上层大气的气象数据，折射理论可以更接近于大气实际结构的经验密度分布为基础，也可应用在理论上对所有天顶距都适用的解析展开式。

早期的折射表中最重要的一个是贝塞尔于1830年编制的大气折射表。这是以克拉姆普推导的理论和布拉德雷的观测为基础的，在高度5°以下的数值完全是根据观测制定的。一直到1870年普尔柯沃天文台折射表出版以前，这些表以及以后以这些表为基础编制的一些折射表，都是被普遍采用的，而普台的表则主要用吉尔丹的理论研究为基础。

连续出了好几版的普尔柯沃折射表，以及用普尔柯沃折射表导出的其它表得到了广泛的应用。不久根据更新的理论建立了许多折射表，特别是威利斯[3]和加芬克尔[4]的折射理论。加芬克尔的理论，从数学上讲对天顶距一直到天文地平以下的折射都是适用的，但从理论表达式求折射的数值却既困难又费力。

---

[1] S. Newcomb, "Compendium of Spherical Astronomy", Macmillan, New York, 1906(由 Dover, New York, 1960 年再版).

[2] W. Chauvenet, "Manual of Spherical and Practical Astronomy", Vol. I, 5 ed. Lippincott, Philadelphia, Pennsylvania, 1863(由 Dover, New York, 1960 年再版).

[3] J. E. Willis, A determination of Astronomical refraction from physical data. Traus. Amer. Geophys. Union 22, 324-336(1941).

[4] B. Garfinkel, An investigation in the theory of astronomical refraction. Astr. Jour. 50, 169-179(1944).

折射表

为了编制折射表，采用的理论表达式是以在观测地点选择的标准大气状况表示的。这些标准状况下的折射称**平均折射**，是用观测天顶距或高度角作为自变量编表的，为了获得在观测时刻的真实条件下的折射值，还为平均折射的改正值编制了辅助用表。例如，近似公式（54）可以写为平均折射 $R_0 = 60.4'' \tan z_0$ 与温度、气压改正因子的乘积

$$\delta z = R_0 \frac{0.3593B}{273+t}.$$

普尔柯沃折射表提供了对温度、气压、湿度、观测地点纬度和高度以及恒星颜色的改正值，但在实用中某些改正值常略而不计。因为水蒸汽对大气密度和折射率的影响，折射与大气的湿度有关。折射表中编入了标准值，其它的改正值常略去不用，但在精确的子午观测中，如略去了改正值，会造成觉察得到的系统的季节性误差，斯科特❶曾指出了这点。原则上讲，还需要进行纬度和高度的改正，因为大气密度随高度的分布与地方重力有关，但这种影响很小。

从观测得到的理论折射公式的常数，要比从物理理论得到的好。为此，所用的主要方法是观测拱极星上下中天的天顶距。但也有用许多其它的方法，特别是确定近地平的折射量。

一颗赤纬为 δ 的拱极星，在北纬 φ 处于天顶以北上中天，上中天时的几何天顶距为 $\delta-\varphi$，下中天时为 $180°-\delta-\varphi$。折射量 δz 为从观测天顶距 z' 求几何天顶距 z 时的改正值 $z-z'$，它恒为正值，令 R 为这改正值，上中天时的观测天顶距为

$$z_1' = (\delta-\varphi) - R_1,$$

下中天时为

$$z_2' = (180°-\delta-\varphi) - R_2,$$

❶ F. P. Scott, A source of systematic error in meridian declinations, Astr. Jour. 60, 93-95(1955).

因此

$$\frac{1}{2}(R_1+R_2)=(90^\circ-\varphi)-\frac{1}{2}(z_1'+z_2').$$

必需进行大量的观测，以得到足够多的独立联立方程，来确定理论表达式左边的常数。实际上因为观测中不可避免的误差以及其它的不确定性，若要计算精确的常数值，需要对不同恒星进行大量观测。

其它可用的方法之一是在 $\varphi=0^\circ$ 或附近的观测地点，观测在赤道上或近赤道的恒星天顶距，当 $\delta=\varphi=0$ 时，几何天顶距 z 等于时角 h，R 可以从视天顶距 z' 和天体达到 z' 的时刻来确定。折射常数也可以通过在北纬 φ_1 和南纬 φ_2 两地方观测同一恒星的子午天顶距而得。例如，取 $R=k\tan z'$，得

$$k=\frac{(\varphi_1+\varphi_2)-(z_1'+z_2')}{\tan z_1'+\tan z_2'}.$$

类似地，k 可由在纬度 φ 处，观测太阳到达二至点的天顶距而得到。洛伊威提出的另一个方法，是用测微器测量两颗恒星在周日运动中相对位置的变化，这是用一块两面镀银的棱镜放在赤道式望远镜的物镜前面，通过相互之间角度恒定不变的两束光线，将恒星成象在视场上。

确定近地平折射量的各种观测方法有：把恒星的观测高度与从赤经和赤纬计算的高度作比较；把从海船上测得的太阳高度与根据地理位置计算得到的高度相比较，而海船的地理位置是由观测适当高度的恒星得到的；在不同高度时观测昴星团中亮星之间距离，并进行比较，以及同样在月球圆面上选定两点标志，在月球位于不同高度时，测量它们之间的距离，并进行比较[1]。

---

[1] 见 G. M. Clemence, Astronomical refraction at great zenith distances. Astr. Jour. 56, 123-124 (1951); K. Aa. Strand, Astronomical refraction at large zenith distances. Astr. Jour. 57, 166(1952); I. Greenbaum, Observed and theoretical values of Astronomical refraction at low altitudes. Astr. Jour. 59, 17-19(1954); D. H. Sadler and W. A. Scott, Refraction at low altitude. Jour. Inst. Navig. 13, 139-147(1960).

大地折射

大气折射的极限情况是光线掠过可见地平的折射。当光线来自可见地平上的确实位于地球表面上一点，或来自大气内任何一点光源时，则在光源到观测者之间的整个路径都通过大气，这种折射称地面折射或大地折射。

大地折射变化十分复杂，取决于在一天中的时刻、一年中的季节、地理区域、地形特征、气象条件及其它因素。实用上没有一个理论的、统计的或经验的定律可用来满意地推导出大地折射公式。只有在具备光线经过路径上的所有点的温度、气压和湿度的足够的知识，才能精确可靠地确定大地折射的量，而大地测量总是尽可能地避免采用需要测定折射值的方法。

天文观测的折射改正

除了近地平折射的变化和不规则性外，在所有的高度上折射数值与理论表载值经常发生不规则的偏离，并且在天顶处折射值一般也并不等于零，这些情况主要是因为实际大气不断偏离同心均匀状态造成的，而后者是用来推导理论表达式的。由于相邻地区气候条件的不同，常存在气压和温度的水平梯度，此外，在整个大气中还广泛地存在着各种扰动及不规则运动。因而经常发生剧烈变化的地方反常折射与不规则扰动。

这些对于理论值的不规则的及变化着的偏离，在精密天文测量中十分重要，而使许多不同类型的测量所能达到的精度受到限制。如果在观测时没有沿光线路径随高度而变化的大气湿度及密度分布的观测数据，也没有由严格数字积分算得的折射值，就不能可靠地确定每次观测的精确折射值。由理论确定的折射值，一般总多少要偏离实际值，而仅代表大量数值的平均数。

在精确的天文观测中，折射改正值的不可避免的误差，部分可由对观测值平差而消去，因为在研究一个很长的观测序列时，总是把折射常数的改正也作为待定值求解的。由此给出的是所研

究的观测序列的平均误差，这个值随不同观测序列而不同。然而，特别在地平附近，需要对非常多的观测值取平均值，才能得到可靠的结果，并且这些观测还应该是在大气状态十分不同的情况下，在相当长的时间间隔内取得的。有证据证明气象效应部分是系统性的，对一个地方来说更是如此，因此观测平差并不能完全消除它。

在航海和大地测量中，有时出现这样的情况：一有机会立即要进行观测，所得到的单个观测值或为数不多的几次观测立即需要使用，此时折射改正误差一般并不重要，但即使这样，还是需要谨慎，特别是当观测很接近地平的目标或大气条件异常时更应如此。在航海中，只要观测三、四颗在某一高度范围内，方位分布得合适的恒星，可能存在于方位角中的折射不规则变化对定位就没什么影响了，因为定位中只存在折射误差随高度不同的变化，而不受折射表中的表载实际值固定误差的影响。因此，即使在近地平处，由此引起的定位误差也仅为1″左右。

大气中小幅度的迅变的不规则变化，使折射产生波动，而造成恒星星象不稳定，它表徵“星象宁静度”的质量，也同时造成恒星亮度的迅变，称为“星象闪烁”。大气除了使天体视位置产生系统的几何影响外，还会产生其它一些物理效应。“宁静度”、“闪烁”和其它效应都同样使天体测量精度受到限制，但这些效应并不是严格地属于球面天文学讨论的范围。

天体坐标的改正值

正常折射不影响天体的方向。观测到的高度总是大于几何高度，但观测到的方位与实际几何方位是相同的。可是观测到的方位角，一般与几何高度等于观测高度处对应的几何方位角不同。因此通常时角和赤纬都受折射的影响。折射对天球坐标的影响相对地较小，对于绝大多数的应用，可以用微分公式表示。

位于空间M点的一天体的实际几何天顶距是从观测者到天体的直线OM与铅垂线的夹角Z（图 14）。它不严格地等于视天顶

距 z_0 和折射总量 δz 之和；Z 的值与 $z=z_0+\delta z$ 相差的量为天体的视差值 p，p 是从天体到观测者 O 的直线与天体到 O' 的直线之间的交角，O' 是光线在大气上限处与铅垂线的交点。严格地说，$Z=z_0+R$，而 $R=\delta z-p$。然而由于折射的数量很小，天体的距离很大，O' 点的高度 h 相对很小，一般 R 与 δz 的差值可忽略，而 Z 和 z 可认为没有差别。对于很接近地球的天体，如人造卫星，这个差别就很重要了，唯一能感觉到差别的自然天体，是在低高度处的月球[1]。

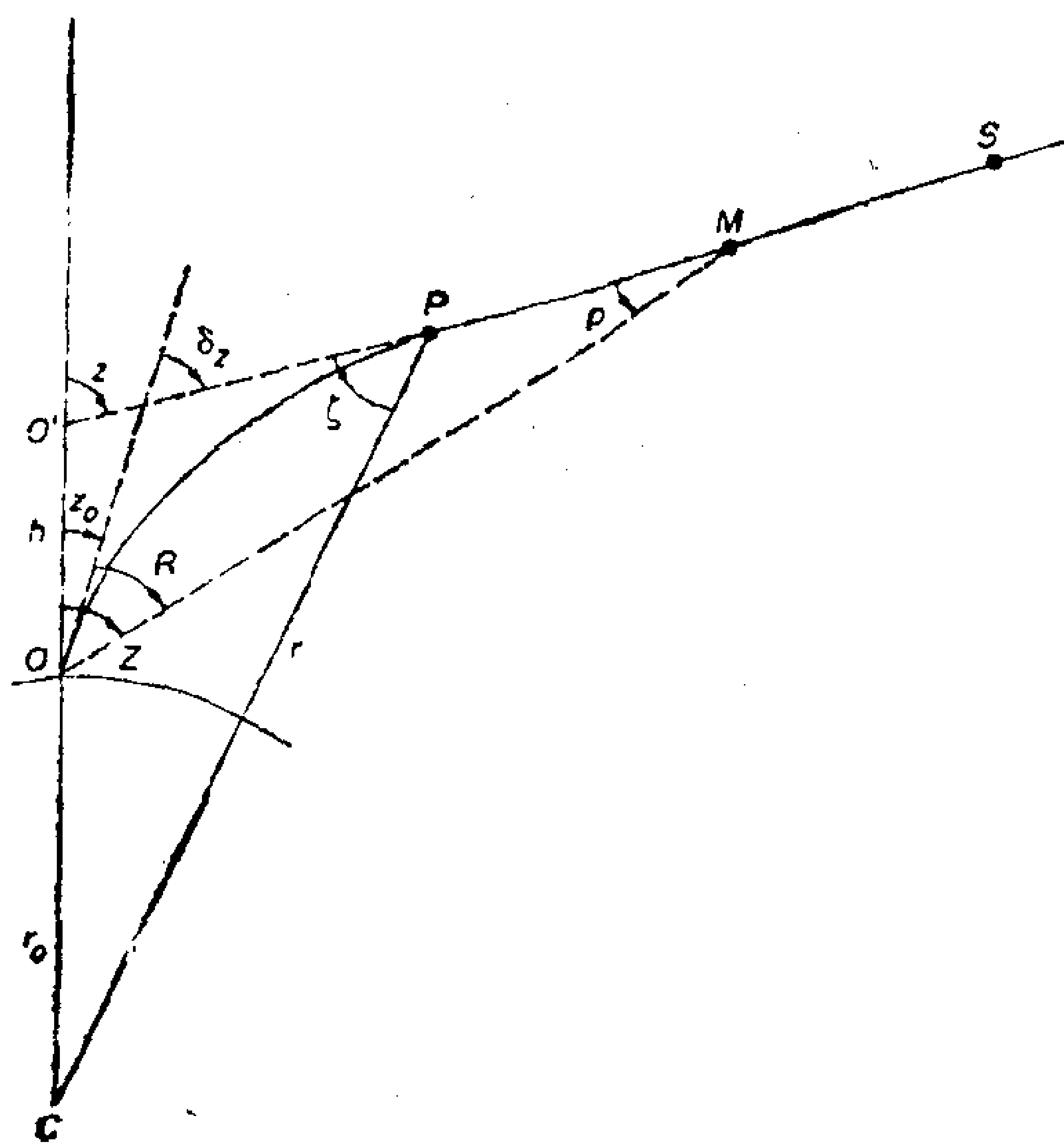


图 14　折射对天顶距的影响

例如，p 的影响在日食及月掩星时有时有重要意义，因为在观测它们的视接触时，两个天体与地球的距离相差很大。从观测者 O 看来，当月球 M 的边缘与太阳 S 的边缘视接触时，几何上它们在 O' 点接触。在计算食和掩星的地方概况时，可用 r_0+h 代 r

[1] 参见 P. Herget, Astr. Jour. 64, 334(1959)。

来考虑这一情况，但一般来说，只有高度小于 10° 时，才需要这样做。当在 P 点光线进入大气并取 $\mu=1$ 时，应用（44）式有

$$r\sin\zeta=\mu_0 r_0 \sin z_0,$$

在三角形 CPO' 中，

$$\frac{r_0+h}{r}=\frac{\sin\zeta}{\sin(z_0+\delta z)},$$

因而 $1+\dfrac{h}{r_0}=\mu_0\sin z_0/\sin(z_0+\delta z)$，

由此式可以确定 h 值。

从（28）和（29）式，取 φ 及 A 为常量，有

$$d\delta=\mp\cos q\, dz,$$

按 φ 为正（负）取上（下）边符号；再取 φ 为常量，从（26）和（27）式以及 $d\delta$ 的表达式得

$$\cos\delta\, dh=\pm\sin q\, dz,$$

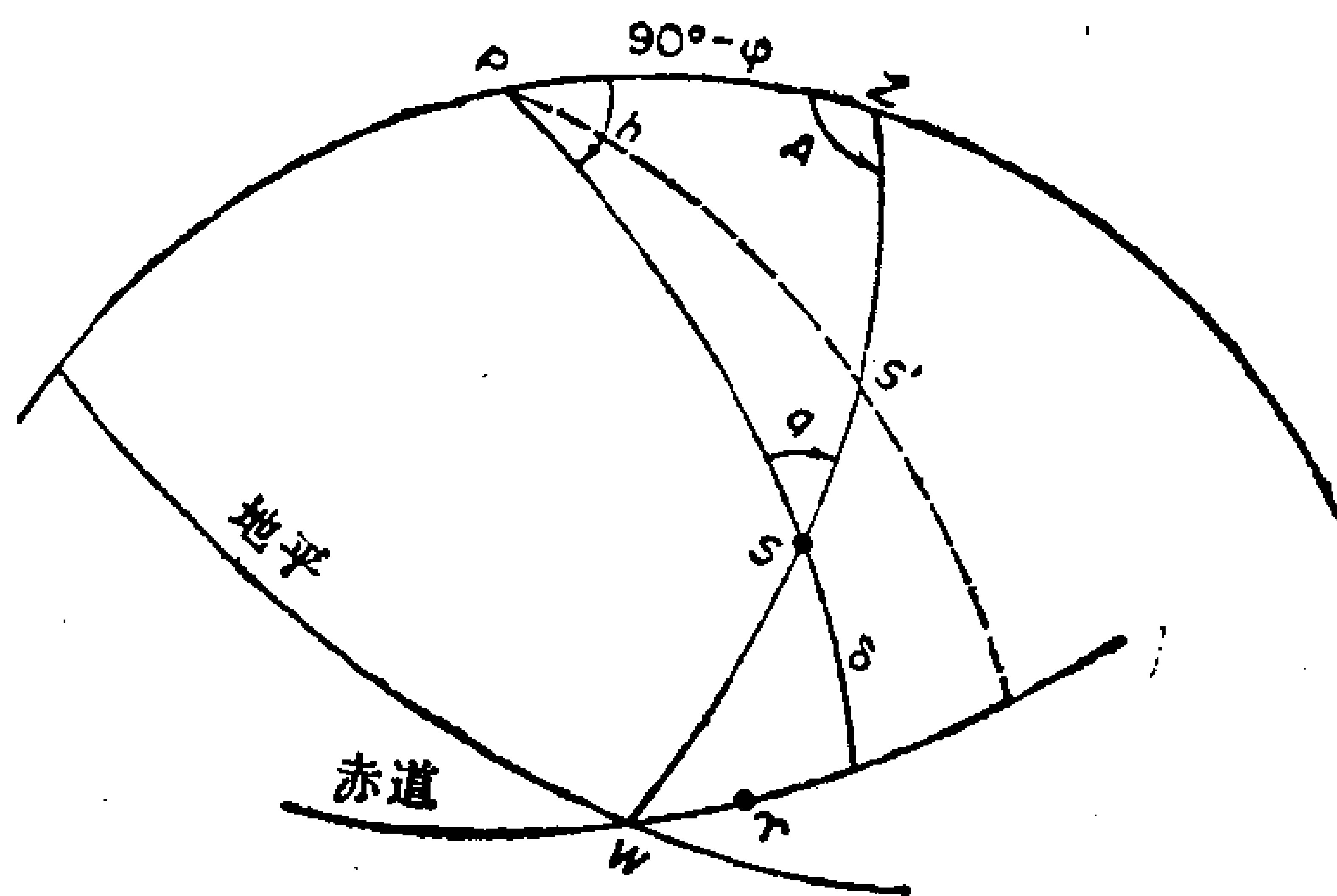


图 15　折射对赤经和赤纬的影响：
S——几何位置；S'——受折射影响的位置

当 h 小(大)于 12^h 取正(负)号（图 15），因此记天顶距的折射为

$$z-z_{测}=R,$$

得到从观测的赤纬及赤经值中，消除折射影响的改正值为：

$$\delta-\delta_{\text{视}}=\begin{cases}-R\cos q, & \varphi>0\\+R\cos q, & \varphi<0\end{cases}$$

$$\alpha-\alpha_{\text{视}}=\begin{cases}-R\sec\delta\sin q, & 0^h<h<12^h\\+R\sec\delta\sin q, & 12^h<h<24^h\end{cases}\tag{56}$$

因为 $d\alpha=-dh$。折射对赤经的影响在子午圈上为零；对赤纬的影响，在 $q=90°$ 时为零，由方程(27)知时角为 $\cos h=\tan\varphi\cos\delta$，此时仅拱极天体才能达到地平以上。

从（28）和（29）式，对星位角的折射影响为

$$q-q_{\text{测}}=\mp R\sin q\tan\delta$$

当 φ 为正（负）时取负（正）号。

较差折射

作天体测量观测时，常需要对测量两颗相互靠近天体的坐标差进行折射改正；通常这些改正值可由微分公式求得，令 $\pm R$ 等于 $k\tan z$。几何坐标 Z，α，δ 的差记为

$$\Delta z=z_2-z_1,\quad \Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1,\quad \Delta\delta=\delta_2-\delta_1,$$

而对观测坐标 z'，α'，δ' 的差则记为

$$\Delta z'=z_2'-z_1',\quad \Delta\alpha'=\alpha_2'-\alpha_1',\quad \Delta\delta'=\delta_2'-\delta_1',$$

得到一阶项为

$$\Delta z=\Delta z'+(R_2-R_1)=\Delta z'+\frac{\partial R}{\partial z'}\Delta z'$$

$$=\Delta z'+k\sec^2 z'\Delta z';$$

同样得

$$\Delta\alpha=\Delta\alpha'+\frac{\partial(\alpha-\alpha')}{\partial\alpha}\Delta\alpha+\frac{\partial(\alpha-\alpha')}{\partial\delta}\Delta\delta,$$

$$\Delta\delta=\Delta\delta'+\frac{\partial(\delta-\delta')}{\partial\alpha}\Delta\alpha+\frac{\partial(\delta-\delta')}{\partial\delta}\Delta\delta,$$

应用（56）式并以 $\partial/\partial\alpha=-\partial/\partial h$ 代入上式得：

$$\frac{\partial(\alpha-\alpha')}{\partial\alpha}=k(1-\tan z\cos q\tan\delta+\tan^2 z\sin^2 q),$$

$$\frac{\partial(\alpha-\alpha')}{\partial\delta}=k\sec\delta(\tan^2 z\sin q\cos q$$

$$-\tan z\sin q\tan\delta),$$

$$\frac{\partial(\delta-\delta')}{\partial\alpha}=k(\tan^2 z\sin q\cos q\cos\delta$$

$$+\tan z\sin q\sin\delta),$$

$$\frac{\partial(\delta-\delta')}{\partial\delta}=k(1+\tan^2 z\cos^2 q).$$

折射对角距和位置角的影响

用$R=k\tan z$，对三角形ZS_1S_2(图 16)，以天顶角为常量进行微分，求折射对角距Δ及位置角p_1造成的变化，得一阶项为：

$$d\Delta=-k[\cos P\tan z_2+\cos(p_1-q)\tan z_1],$$

$$d(p_1-q)=+k\operatorname{cosec}\Delta[\sin(p_1$$

$$-q)\cos\Delta\tan z_1-\sin P\tan z_2].$$

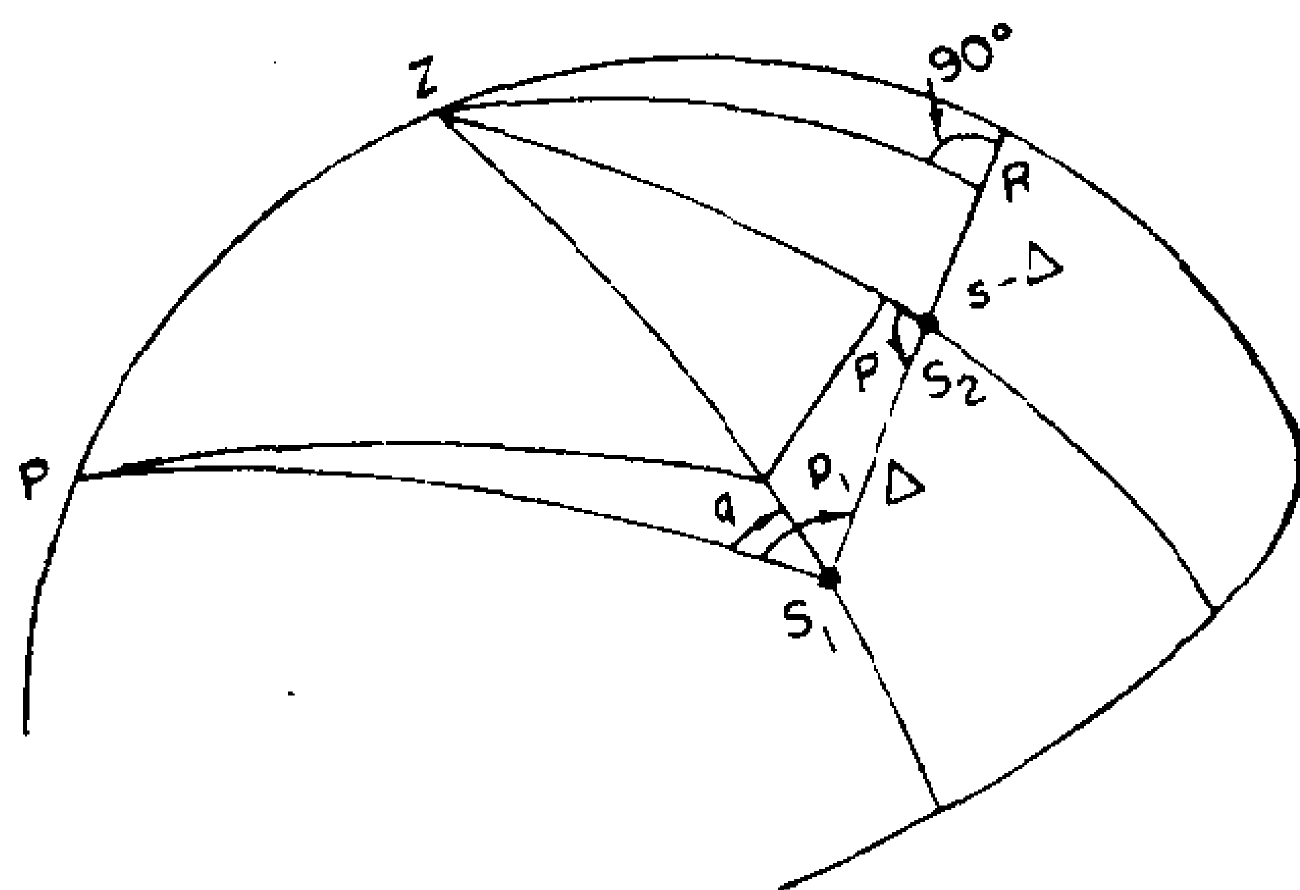


图 16 折射对角距和位置角的影响

从Z点对通过S_1和S_2的大圆绘一垂线，与这大圆相交于离S_1点角距为$S_1R=s$处，由直角三角形ZS_1R和ZS_2R得

$$\tan s=+\cos(p_1-q)\tan z_1,$$

$$\tan(s-\Delta)=-\cos P\tan z_2;$$

则 $d\Delta$ 的表达式成为

$$d\Delta=-k[\tan s-\tan(s-\Delta)]$$

$$=-k\tan\Delta\frac{1+\tan^2 s}{1+\tan\Delta\tan s}$$

$$=-k\tan\Delta\frac{1+\tan^2 z_1\cos^2(p_1-q)}{1+\tan\Delta\tan z_1\cos(p_1-q)}.$$

在三角形 ZRS_2 中，由恒等式 $\sin P=\tan P\cos P$，得 $\sin P\tan z_2=(\tan ZR)/\cos(s-\Delta)$，对三角形 ZRS_1 用同样关系式得

$$\tan ZR=\sin(p_1-q)\tan z_1\cos s,$$

用上式及折射对星位角的影响的式子，$dq=k\tan\delta\sin q\tan z_1$，从 $d(p_1-q)$的表达式得

$$dp_1=k\left\{\sin(p_1-q)\tan z_1\frac{\tan s-\tan\Delta}{1+\tan s\tan\Delta}\right.$$

$$\left.+\tan\delta\sin q\tan z_1\right\}.$$

对于双星，如果两个成员星靠得很近，颜色也相同，两颗星在实际上受到同样的影响，而当它们的天顶距随周日运动而变化时，则视位置角或两星之间的距离没有相对变化。然而，若两星的颜色相差很大时，它们的大气光谱的长度将取决于它们的颜色。而如果用反射望远镜观测，会把所有颜色的光线聚到离反射镜相同距离的焦点上，双星位置角以及距离的观测值，将随恒星自东向西横过天空而变化。

例如，蒭藁增二（鲸鱼座O星）颜色很红，在大天顶距观测它的大气色谱带，蓝端与红端相比要暗得多，我们自然会把测微器十字丝靠近看上去光强度最大的红端。它的伴星在它东南0.7″处，是一颗类型很不相同的恒星，它的蓝光很强，大气折射使其星象向大气光谱另一种颜色方向延伸。当在威尔逊山天文台天顶距为37°处进行观测时，延伸量达1″左右。蓝光明显地超过红

光，结果是伴星的蓝光就几乎移到蒭藁增二的正东面了。如果用摄谱仪进行观测，而狭缝又是东西方向放置时，那么当望远镜指向蒭藁增二时，结果两颗星的光谱将同时并列地记录下来。如果观测是在相当大的东时角进行的，则两星的连线与地平垂直，而伴星的蓝光差不多叠加在蒭藁增二的红光之上。而在西面，当恒星位于与色散成直角的水平线上时得到的两光谱象的间距最大。

以 $d\Delta$ 和 dp_1 表示的赤经和赤纬的较差折射，由微分（13）式可得：

$$d(\alpha_2-\alpha_1)=\sec\delta_2[\sin p_1 d\Delta+\Delta\cos p_1 dp_1],$$

$$d(\delta_2-\delta_1)=\cos p_1 d\Delta-\Delta\sin p_1 dp_1.$$

从测量两颗相距很远的天体的视角距和它们的视高度，就可用严格的球面三角公式求得它们的几何角距。为此，先计算在天顶处两个观测的位置所在的地平经圈间的夹角，由这个不受正常折射影响的角再计算 s 值及计算高度的折射改正，在计算中使用半角公式较方便。而在实用时通常不需要精确的公式。前面给出的求 $d\Delta$ 的微分式通常已足够，而在这里使用下式更为方便，

$$ds=\cos C\,dz_2+\cos B\,dz_1,$$

式中 $\cos C$ 及 $\cos B$ 由下两式计算，

$$\cos z_1=\cos s\cos z_2+\sin s\sin z_2\cos C,$$

$$\cos z_2=\cos s\cos z_1+\sin s\sin z_1\cos B,$$

因此

$$(s-s')\sin s=R_2\{\cos z_1\operatorname{cosec} z_2-\cos s\cot z_2\}$$
$$+R_1\{\cos z_2\operatorname{cosec} z_1-\cos s\cot z_1\}$$

其中 R 为天顶距的折射 $z-z'$。

第六章 光行差

由于光的速度有限，任何天体的视位置与光从该天体传播到地球所经历的时间中天体及地球两者的运动有关。

正当光从天体传播到运动着的地球上的观测者时，该天体及地球都已离开了光从该天体发射出来的那一瞬间的原来的空间位置。观测者接收到的光线是观测瞬间以前若干时间从天体上射出的，其方向是指向地球后来在接收时才达到的那个位置，因而在观测者接收到光线时，天体已不再位于光线射来的那个方向。而且因为地球在运动，光线到达观测者时的方向与观测者看上去光线所射来的方向不同。射来的方向，即实际看到天体的方向，是光**相对于观测者**运动的方向，而不是它在空间的实际几何方向，这一相对方向取决于该瞬间观测者的速度。

因而，观测到的天体在天球上的视位置，既不是观测瞬间从观测者到天体的实际几何方向，也不是地球指向光线发出时天体所在位置的几何方向。

由于光的前进运动与观测者、天体本身运动结合在一起，造成由观测者看来天体偏离它的实际几何方向的这种视位移称**光行差**。观测到的天体视位置对于观测瞬间天体实际几何位置的位移称**行星光行差**。观测到的天体视位置对于光线离开天体时天体几何位置的位移称**恒星光行差**。行星光行差可以看作是观测瞬间地球运动速度引起的恒星光行差与光从天体传播到地球的时间中天体运动造成的该天体在空间的几何位移两者的结果。

从万有引力定律得到的天体和地球的几何位置来计算天体在给定时刻出现的位置的星历表时，必须考虑光的有限速度造成的这些效应。同样，从观测到的视位置推算天体在空间的几何位置时，也需加相应的改正值。

光 行 差

光在空间的实际速度 c 为光相对于观测者的速度 c_r 与观测者本身的速度 V 的向量和，可用平行四边形的对角线表示，其中一条边为观测者的速度，另一条边为光相对于观测者的速度（图17）。在观测时刻 t，光线从空间射来的实际方向，是天体在时刻 $t-\Delta t$ 时所在位置 P 的方向，Δt 是光从 P 到达观测者需要的时间。但是不管在哪一种坐标系内，在时刻 t 天体的视位置是天体在天球上看到的位置，它是在时刻 t 光线相对于观测者的方向。因而 P 到 P' 的角位移为恒星光行差。它位于观测者运动的方向上，也位于通过这方向和到 P 点方向的平面内。位移 $\Delta\theta$ 的数值，仅取决于 V/c 之比，该比值约为 0.0001。

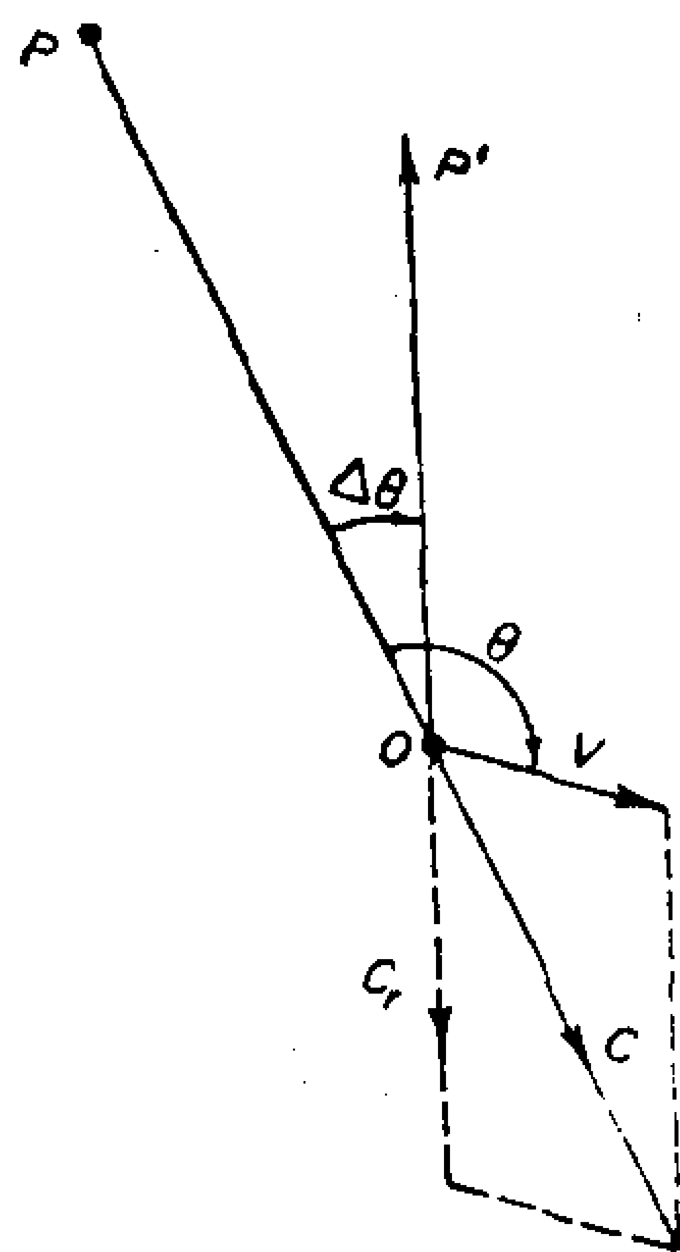


图 17 恒星光行差

P'——在观测时刻 t 的视位置；P——在时刻 $t-\Delta t$ 光离开天体时的几何位置

天体在天球上的视位置 P' 对于光线离开该天体时它的几何位置 P 的方向的位移，可以从地球运动造成的观测者运动的方向和速度来算得。对于恒星这就是全部所能求得的量了。因为恒星在天球上的几何位置只能通过观测求得，因此只能观测到光线离开恒星时它所在的位置。可是对行星等天体来说，在光线从天体

到达观测者这段时间内，已由其自身在空间的运动而从P点移到另一个几何位置Q（图 18），在观测瞬间视位置对于同一瞬间的天体几何位置的位移就是行星光行差。通常太阳系内天体在空间的运动可由万有引力理论确定，从而算得行星光行差。可以应用恒星光行差先确定光离开时天体的位置，然后计算在光行时间Δt中由于天体在空间运动偏离这个位置的位移，从而得到在观测时刻天体实际的几何位置，或从地球及天体的运动直接确定行星光行差，而不必引入恒星光行差作为媒介。

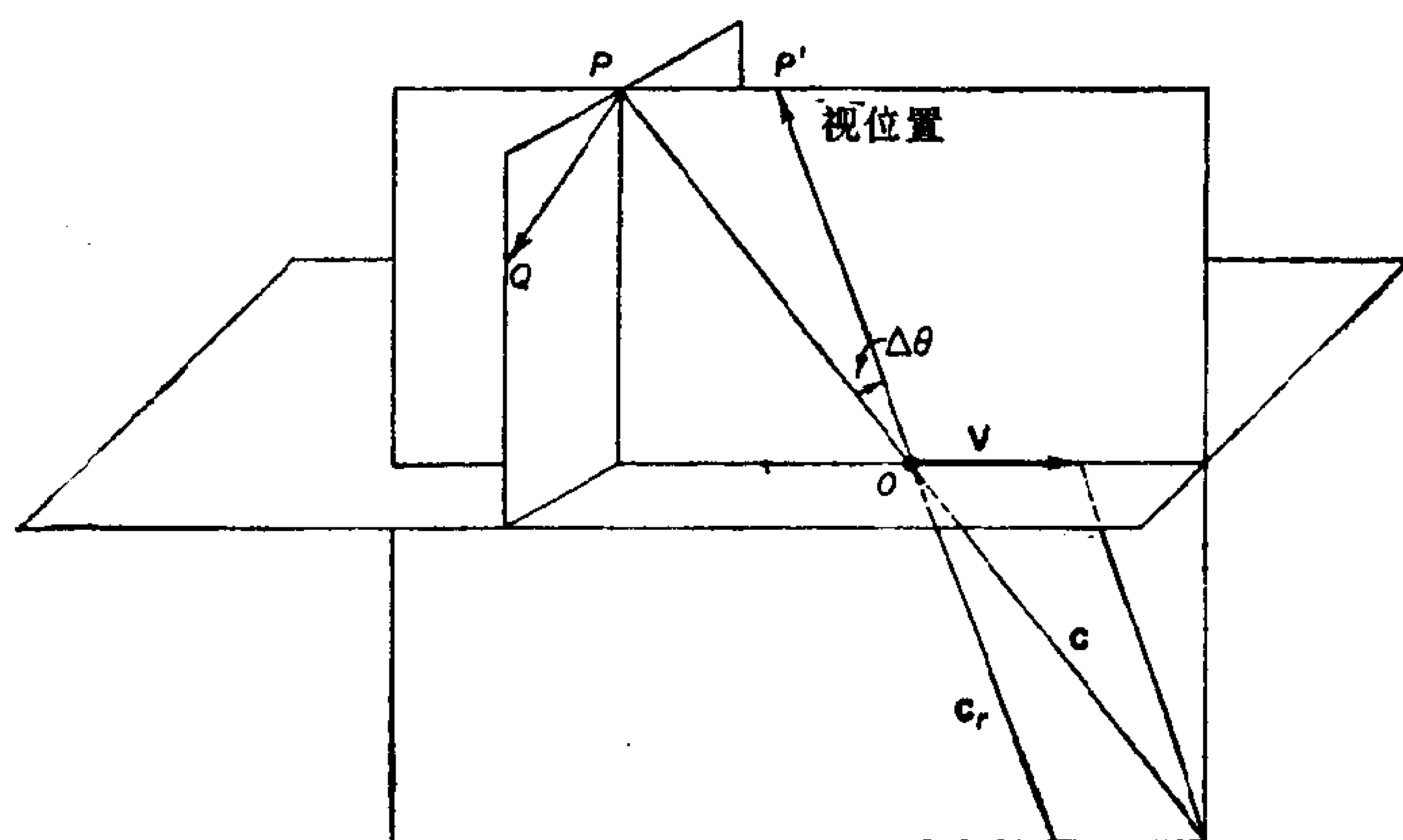


图 18　行星光行差

确定这些光行差位移需要知道光的运动，以及地球和其它天体的运动。但不需要有关光的物理性质的特别理论。不管光的实际性质以及它的传播机制到底如何，光行差是许多视现象中的一种，它的发生好像是光在牛顿空间作直线传播，对于实用天文学的目的，已证明观测到的这种性质可以足够作为光行差改正的理论基础。艾里和费佐的实验同天文观测得到的证据一样，进一步显示了光行差与光线路径中通过大气及仪器时的介质无关。这与实验室的试验结果符合，实验表明观测者及光源的共同运动并不影响光源的视方向，这是相对论理论基础的一部分，根据这一理

论，望远镜在空间运动的性质造成的效应对天文观测不起作用。

因而在建立天文光行差的数学理论时，只需要**相对运动**的运动学原理●。此外，通常在基础教科书中，直观的模拟图（如雨滴落进一个运动着的望远镜筒），虽则具有教学价值，但不是本质的描叙。

观测者运动造成的视位移

由恒星光行差造成的位移量，取决于在光到达观测者时，观测者相对于光速的瞬时速度。在一个取任意原点及坐标轴和在空间具有固定方向的右手直角坐标系中，观测者的速度向量**V**的分量V_x，V_y，V_z分别为dx/dt，dy/dt，dz/dt。对于观测者为原点的平行轴，令L及B为相对于XY平面的黄经、黄纬球面坐标。若P点为光线实际射来的方向，指向P点的直线的方向余弦为

$$l=\cos B\cos L,$$
$$m=\cos B\sin L,$$
$$n=\sin B,$$

式中L和B为该点的几何球面坐标；同样，视位置$P'(L', B')$的方向余弦，或相对于运动的观测者的光线路径的方向余弦为

$$l_r=\cos B'\cos L',$$
$$m_r=\cos B'\sin L',$$
$$n_r=\sin B'.$$

P及P'点与**c**及$\mathbf{c}_r$方向所指的点相差180°，因而以光速分量表示的这些方向余弦同样等于

$$l=-c_x/c,\ m=-c_y/c,\ n=-c_z/c,$$
$$l_r=-(c_r)_x/c_r,\ m_r=-(c_r)_y/c_r,\ n_r=-(c_r)_z/c_r,$$

由平行四边形性质，

$$c_x=(c_r)_x+V_x \quad 等$$

● 牛顿理论中的光行差与爱因斯坦的光行差有高阶小量的差别。——译者注

即 $$c_r l_r = cl + dx/dt) \cdots\cdots$$

（式中 $c_r l_r$ 和 cl 分别代表指向 P' 和 P 的直线的**方向分量**），可得

$$c_r/c \cos B' \cos L' = \cos B \cos L + \frac{1}{c}\frac{dx}{dt},$$

$$c_r/c \cos B' \sin L' = \cos B \sin L + \frac{1}{c}\frac{dy}{dt}, \quad (57)$$

$$c_r/c \sin B' = \sin B + \frac{1}{c} dz/dt.$$

将上式中第一式乘 $\cos L$，第二式乘 $\sin L$，然后相加，将第一式乘 $\sin L$，第二式乘 $\cos L$，然后相减，得

$$c_r/c \cos B' \cos(L'-L) = \cos B + \frac{1}{c}\left\{dx/dt \cos L + dy/dt \sin L\right\},$$

$$c_r/c \cos B' \sin(L'-L) = -\frac{1}{c}\left\{dx/dt \sin L - dy/dt \cos L\right\}, \quad (58)$$

或 $$\tan(L'-L) = \frac{-\frac{1}{c}\sec B\left\{dx/dt \sin L - dy/dt \cos L\right\}}{1+\frac{1}{c}\sec B\left\{dx/dt \cos L + dy/dt + \sin L\right\}}. \quad (59)$$

将（58）式中第一式乘 $\cos\frac{1}{2}(L'-L)$，第二式乘 $\sin\frac{1}{2}(L'-L)$，然后相加，并以在字母上端加点的符号表示时间的导

数，得

$$\frac{c_r}{c}\cos B' = \cos B + \frac{\dot{y}}{c}\sin L + \frac{\dot{x}}{c}\cos L + \left\{\frac{\dot{y}}{c}\cos L - \frac{\dot{x}}{c}\sin L\right\}\tan\frac{1}{2}(L'-L),$$

将（57）式中第三式乘 $\cos B$ 的积中减去上式乘 $\sin B$ 的积，将（57）式第三式乘 $\sin B$ 的积加上式乘 $\cos B$ 的积，相除得

$$\tan(B'-B) = \frac{\frac{\dot{z}}{c}\cos B - \left\{\frac{\dot{x}}{c}\cos L + \frac{\dot{y}}{c}\sin L + \tan\frac{1}{2}(L'-L)\left[\frac{\dot{y}}{c}\cos L - \frac{\dot{x}}{c}\sin L\right]\right\}\sin B}{1 + \frac{\dot{z}}{c}\sin B + \left\{\frac{\dot{x}}{c}\cos L + \frac{\dot{y}}{c}\sin L + \tan\frac{1}{2}(L'-L)\left[\frac{\dot{y}}{c}\cos L - \frac{\dot{x}}{c}\sin L\right]\right\}\cos B} \quad (60)$$

上述 $\tan(L'-L)$，$\tan(B'-B)$ 的式子是完全严格和通用的，由此可以导出确定恒星光行差的实用公式。这些公式可用于天球上各种坐标系，可达到任意需要的精度，并以观测者相对于相应坐标系的运动来表示。

视位置与几何位置的关系

由观测者运动速度造成的恒星光行差 $\Delta\theta$，仅是视位置 P' 对于光线在观测以前某个时刻离开该天体时天体几何位置 P 的位移，而不是对于观测时刻 t 天体几何位置的位移。也就是说，视位置经恒星光行差改正后，得到的是该天体在 $t-\Delta t$ 时刻的几何位置，而不是在时刻 t 观测者的几何位置。但如能进一步对天体在光行时 Δt 内从 P 到 Q 的运动进行改正，就可以得到观测时刻 t 相对于观测者而言天体所在的几何位置，这就确定了**行星光行差**。同样，可以得到在 $t-\Delta t$ 时刻天体实际所在的 P 点相对于当

时观测者所在位置的几何方向。因为行星的速度 $\mathbf{V}_r$ 与地球速度无关，行星光行差 Δq 和恒星光行差 $\Delta\theta$，实质上是两个独立的量，虽则 $\Delta\theta$ 隐含于 Δq 之中。

事实上，最有利的处理方法与条件有关。恒星光行差仅与观测者接收到光线时它的瞬时速度有关，而行星光行差或视位置相对同一瞬间的几何位置的偏离量，取决于地球和天体在整个 Δt 时间内的运动。太阳系内靠近我们的天体的光行时 Δt 很短，通常可以把地球和天体在时间 Δt 内的运动足够精确地当作直线匀速运动来考虑，在此条件下，在空间的运动正比于速度向量，由图 19 立即可看出：

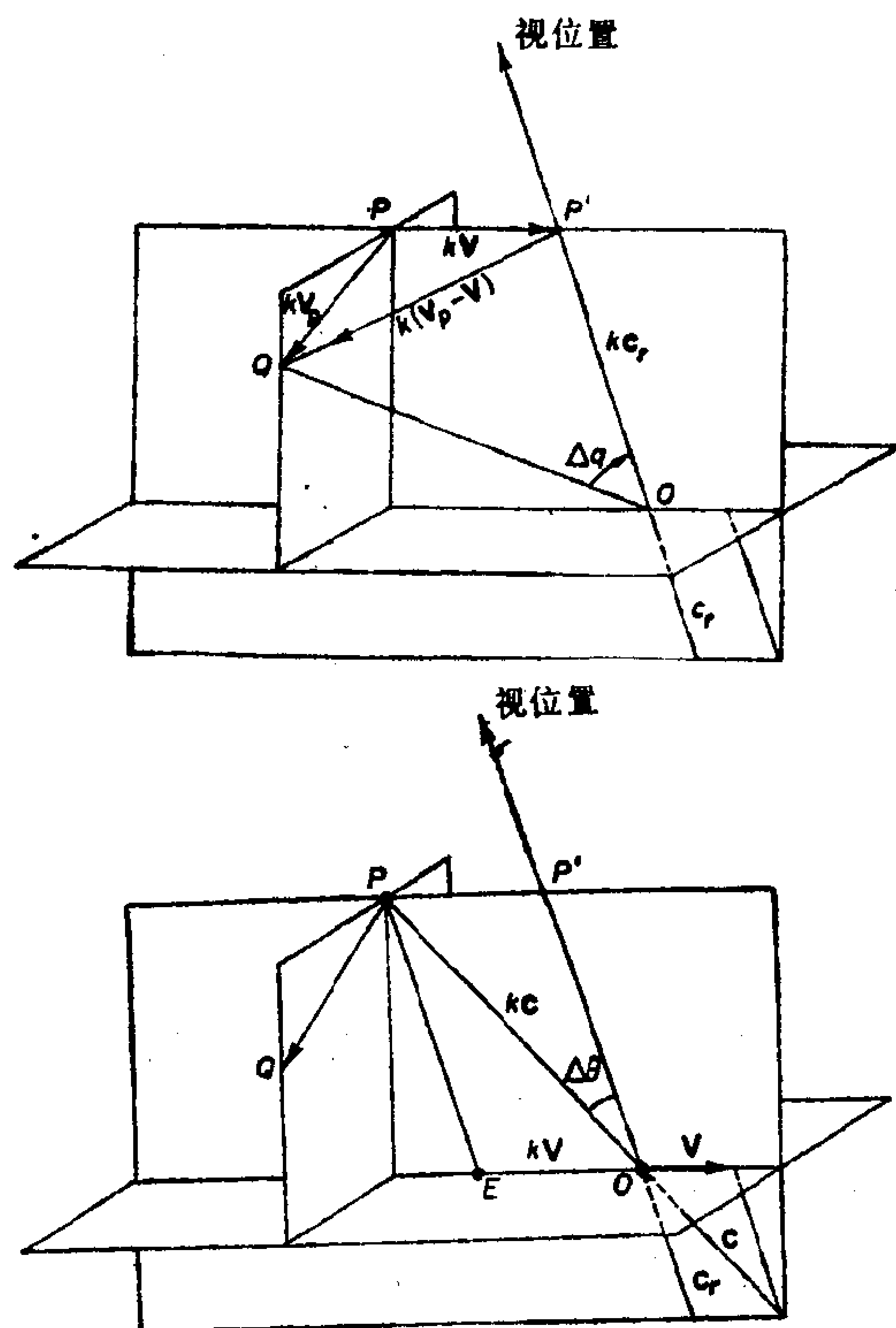


图 19　作匀速直线运动的行星光行差

(a) 在 $t-\Delta t$ 时刻，光线离开位于P点的天体，从当时地球所处的位置E到P的方向，平行于以后在时刻t实际观测到的方向OP'。这就是说，视方向OP'与Δt时间以前地球到天体的几何位置的方向相同，因而如果把观测的实际时刻t提前Δt时间，那么观测到的位置本身就代表了在这个修正了的时刻天体在天球上的几何位置。可以把这位置与理论位置直接作比较，而理论位置是用引力理论计算的几何历书内插到时刻 $t-\Delta t$得到的。

(b) 在光行时间Δt中，地球从E移到O，由于同时天体从P移到Q，从运动的地球到天体的几何方向就从初始方向EP变为OQ。天体方向的这种变化，完全是由于**天体相对于地球**的运动产生的。若天体和地球的运动是线性和均匀的，则位移$\overrightarrow{PQ}$可用正比于地球速度$\mathbf{V}$的向量分量以及正比于相对速度$\mathbf{V}_P-\mathbf{V}$的向量分量之和来表示，在观测时刻t，从观测者到天体几何位置Q的向量$\overrightarrow{OP}+(\mathbf{V}_P-\mathbf{V})$的方向。即向量$\mathbf{V}_P$中与向量$\mathbf{V}$相等的那个分量并不改变几何位置的方向，而使天体相对于地球的几何位置继续保持像开始时那样。因此在几何上相当于当光在P点离开天体时的那个方向，即视位置OP'的方向。因而这个分量抵消了由地球运动产生的恒星光行差效应$\Delta\theta$。另一个分量$\mathbf{V}_P-\mathbf{V}$则造成在观测时刻视位置P'与实际几何位置Q之间的全部差异Δq。改正值Δq等于在光行期间视地心运动的负值，如同$\Delta\theta$取决于$\mathbf{V}/c$一样，它取决于$-(\mathbf{V}_P-\mathbf{V})/c$应用$\Delta q$可由观测位置$P'$求得在观测时刻天体在天球上的实际几何位置，不需要明确地引进恒星光行差。

当地球及天体的运动不是线性和均匀时，这些关系不能成立。当光行时间太长，以致不能把地球运动当作均匀和线性时，不能应用 (a) 中的几何图形，因为E不再是地球在时刻$t-\Delta t$的位置了。而在 (b) 的情况，当这个速度不是线性和均匀时，位移$\overrightarrow{PQ}$就与行星速度不成正比例，$\overrightarrow{P'Q}$也不与相对速度成正比例。因而从 (a) 的图形所给出的P的方向，不是从$t-\Delta t$时地

球的位置得到的，而是从 E 点的位置得到的，如果从 $t-\Delta t$ 时起地球始终以与观测时刻 t 相同的速度运动的话，那么 E 点就是地球在 $t-\Delta t$ 时的位置。同样在（b）的图形中所得到的 Q 点，它不是天体在时刻 t 的真实位置，如果从时刻 $t-\Delta t$ 开始，该天体始终以 $t-\Delta t$ 时同样的速度运动的话，那么它就是天体观测时刻的位置。

当光行时间太长而不能忽略速度变化时，从（a）或（b）得到的结果效果不佳，在这种情况下实际应用时不能使用这种方法。例如，观测离地球很远的恒星，在光行时间中地球不断绕公转轨道运动，仅需改正恒星光行差。观测双星，在光行时间中恒星的运动远非线性及均匀，仅需加地球速度的改正。而根据（b）作的地球和恒星总相对速度改正的结果，不代表任何物理上的实际。这些原理解释了为什么光行差对双星子星的视间距没有任何影响，对于太阳圆面上的黑子视位置也没有影响。

在时刻 t，观测到的天体圆面形象，是在时刻 $t-\Delta t$ 光线离开它时的实际几何形象。实际看到的天体圆面上每一点的方向，就是当光线离开这点时观测者对它的几何定向，即使象太阳的情况，圆面上每一点的光行时实质上都是一样的，所以光行差并不改变圆面上各点**相互**之间的位置。唯一的光行差位移是在光行时间内由天体自转运动引起的圆面上不同点的几何运动。天体圆面在天球上的方向是根据天体在时刻 t 的**视**坐标计算得到的，它是在时刻 t 观测到的方向。在该瞬间观测到的圆面形象是在中央子午线计算中加上光行时间内的自转量而得到的。光行差对圆面状态不产生其它的影响，正确地确定在时刻 $t-\Delta t$ 圆面实际几何形象时不需要作其它的改正。

恒星光行差仅是光行差的一个部分，仅此我们对光行差系统的几何形状的知识还是**不完整**的，但**没有**引入**误差**。对视位置作恒星光行差改正仅消除了**地球**运动的影响，而天体位置仍受光行时间内天体运动造成的光行差的影响。此外，实际上无论天体或

地球在空间的绝对运动都无法确定，因此即使是恒星光行差改正。也一定是不完善的。如果要进一步作行星光行差改正的话，也只能求出天体相对地球运动产生的光行差效应。然而，地球和太阳系内外的天体在空间随太阳系质心的共同的未知的绝对运动，即除了它们相对于太阳系质心的运动以外的运动，既不影响恒星光行差，也不影响行星光行差。

按照经典光学理论，观测者的绝对运动或他相对于传播光的以太的运动，除了产生通常的光行差和其它的第一级效应外，还将产生第二级效应，忽略太阳系在空间的运动，会在恒星光行差中产生二级误差。相对论原理则消去了这些二级效应，而这些二级效应在任何为了验测它们而设计的实验室实验中从未被发现。

按照相对论原理，绝对运动的证据是不能观测到的。斐兹杰勒德-洛伦兹收缩补偿了绝对运动的各级光学效应，在经典理论基础上可能发生的第二级效应将不会出现。

因而，依照（a）和（b）的原则，光行差取决于**地球与被观测天体间的相对运动**，而与地球在空间的绝对运动无关。这种相对运动既取决于天体的运动，也取决于地球运动，对两者的依赖程度是一样的。但是天体运动对光行差的影响完全是由于天体在视方向上的速度的**运动学**效应造成的，所谓视方向指的是光线离开天体所发射的方向，而并不是由于光速或光线的路径相对于光源运动的物理关系所造成的。

自十九世纪中叶以来，已累积了有关光速与光源运动及光强度无关的明确证据，但正如移动的观测者接收到的光的**视方向**取决于地球的速度一样，同样从一运动天体P发出光**相对于该天体**的方向取决P的速度。光离开P在空间的实际方向PO，是光线相对P的方向和P运动的方向PQ的合方向，因而发射的视方向是QO。光线由P到O的路径，仅取决于光发射瞬间P的位置，光的路径既与该瞬间P的运动无关，也与传播到观测者的时间Δt内P的运动无关。

因此，恒星光行差不以任何方式与被观测天体的运动发生关系，而仅依赖于光到达观测者瞬间观测者的瞬时速度。如以恒星为例，则不需要改正恒星运动的影响，在观测时刻 t，天体和地球之间的几何关系是无法确定的，但在前一时刻 $t-\Delta t$，天体相对于时刻 t 观测者的真实几何关系可以正确地求得。

恒星光行差

观测者的速度方向指向天球上的那点称为运动的**奔赴点**。在时刻 t 观测者的速度 V 的方向与时刻 $t-\Delta t$ 时天体的几何位置 P 成 θ 角，这将使天体在天球上从 P 向着奔赴点 M 移动到视位置 P'，这种移动沿着通过 PM 的大圆（图 20），其数量为 $\Delta\theta=\theta-\theta'$，可由下式给出

$$\sin\Delta\theta=\frac{V}{c}\sin\theta', \qquad (61)$$

式中 c 为光速；$V\sin\theta'$ 是 V 在视线正交方向上的分量。

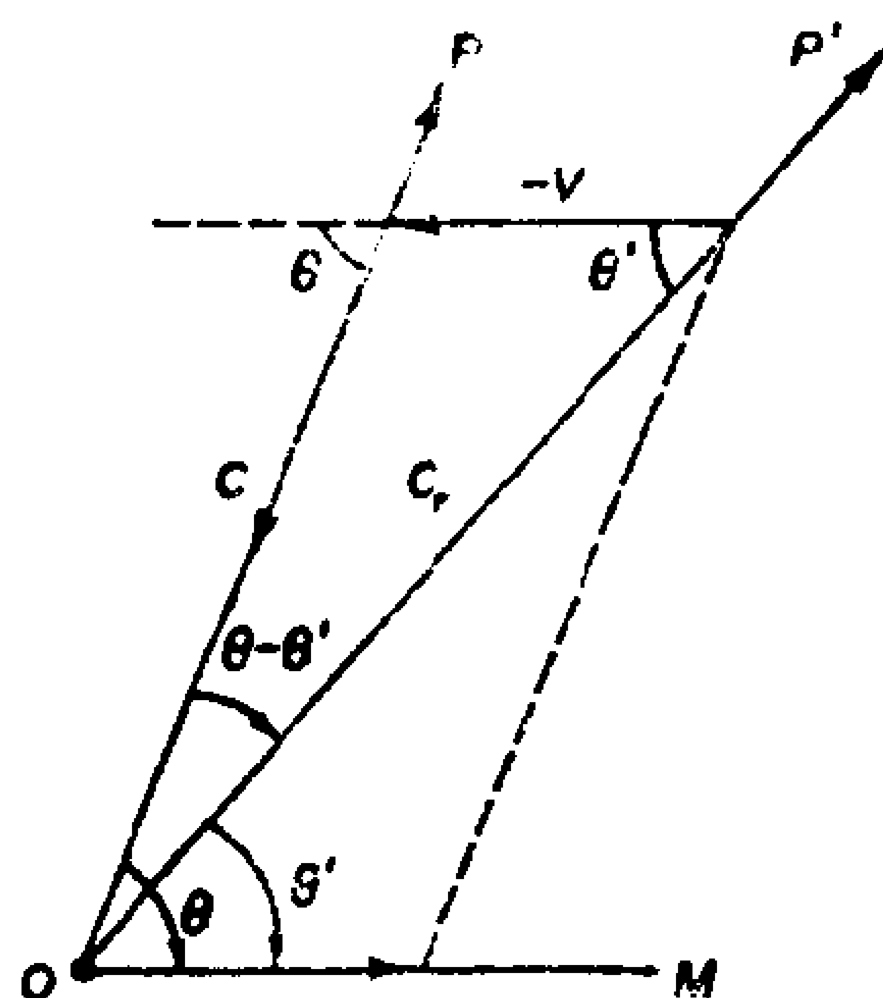


图 20　恒星光行差

把（61）式写成

$$\sin\Delta\theta=\frac{V}{c}\sin(\theta-\Delta\theta)$$

并展开为 $\Delta\theta$ 的幂级数，可得

$$\Delta\theta=\frac{V}{c}\sin\theta-\frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2\sin 2\theta+\left(\frac{V}{c}\right)^3\left(\sin\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^3\theta\right)+\cdots\cdots$$

第二项的系数约为 0.001″。

在任何天球坐标系内 $\Delta\theta$ 的分量，可以根据观测者在空间的坐标的导数 dx/dt，dy/dt 及 dz/dt 由通常的表达式（59）和（60）来确定。这些速度分量所代表的运动，同样可用速度 V 及运动方向来表示，运动方向由奔赴点在天球上的坐标 L_v，B_v 表

示．它们是由 V 的方向余弦来确定

$$\frac{1}{V}\frac{dx}{dt}=\cos L_v \cos B_v,$$

$$\frac{1}{V}\frac{dy}{dt}=\sin L_v \cos B_v, \tag{62}$$

$$\frac{1}{V}\frac{dz}{dt}=\sin B_v,$$

利用（62）式中$\frac{dx}{dt}$，……的值，就可用天球上的几何关系来直接表示（59）和（60）式，这种形式也表示了由 P，P'，M 和坐标系的极点 Z 所组成的几个球面三角形的严格的三角解（图21）。从三角形 PMZ 可以用 P 和 M 的坐标求得边 θ 及 M 点的角，由 θ 可用（61）式得到 θ' 的值，因而可对三角形 $P'MZ$ 解出 P' 的坐标。

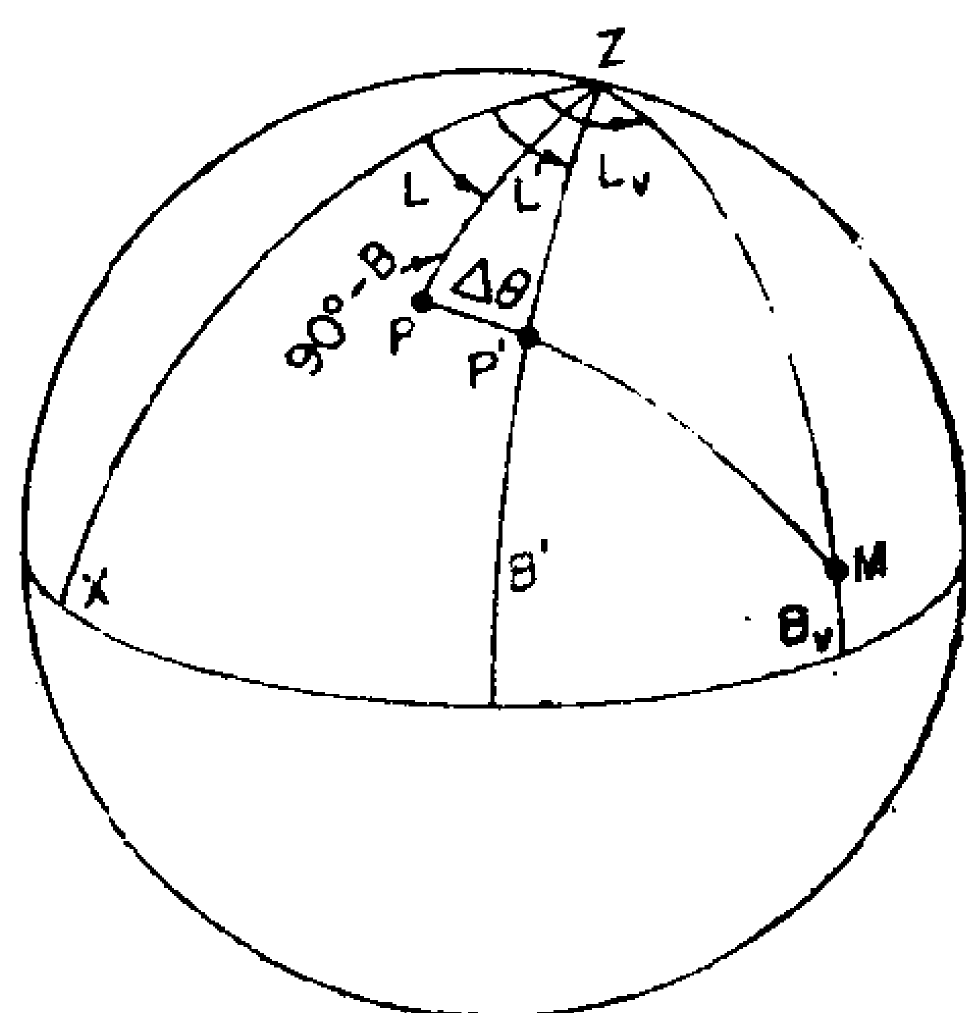


图 21　恒星光行差的各分量

观测者的速度是他本身随着（a）地球的周日自转，（b）地球绕日公转及太阳对于太阳系质心的运动及（c）太阳系质心在星际空间运动的合成。由地球自转造成的恒星光行差的分量称周日光行差；由地球公转以及太阳质心运动一起造成的分量称为周年光行差；而由整个太阳系运动造成的分量称为长期光行差。

因为太阳通过空间的绝对速度是未知的并且几乎不能被测

定，因而长期光行差是不能被观测到的。在过去文献中对于长期光行差及其可能被观测到的效应的许多讨论，包含有大量的错误及混乱。以经典物理为基础的正确处理必须根据相对论理论的观点对某些方面加以修正。只有太阳相对于其它恒星的运动可以被确定，但从现代恒星动力学的情况来看，对太阳相对于恒星运动造成的光行差进行改正，得不到什么好处，因而在实用上可以不必考虑。

在对恒星光行差的其它分量进行实际计算时，把严格的(59)及（60）式展开为V/c的幂级数是有优点的，这可用泰勒公式展开（57）式而不难得到。对于到一阶项而言，由于$\mathbf{V}$的不同分量引起的恒星光行差的各分量是互相独立的，因此可以分别计算，然后再加在一起。

取xy平面为赤道平面，L即为赤经α，而B为赤纬δ。这些坐标为方向余弦的函数，

$$\tan\alpha=\frac{m}{l},\qquad \tan\delta=n/\sqrt{l^2+m^2}; \tag{63}$$

令 $$l_r=\frac{c}{c_r}\left(l+\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=\left(l+\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}\right)\left\{1-\frac{c_r-c}{c}+\left(\frac{c_r-c}{c}\right)^2\cdots\cdots\right\},\ 等,$$

得到一阶项

$$\alpha'(l_r,\ m_r,\ n_r)=\alpha\left(l+\frac{1}{c}\frac{dx}{dt},\ m+\frac{1}{c}\frac{dy}{dt},\right.$$

$$\left.n+\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}\right),$$

对δ'也是类似的。以泰勒公式展开，

$$\alpha'=\alpha+\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial l}+\frac{1}{c}\frac{dy}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial m}+\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial n}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{c}\frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial l}+\frac{1}{c}\frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial m}+\frac{1}{c}\frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial n}\right]^2\alpha$$

$$+\cdots\cdots,$$

再应用（63）式求得所需的导数，

$$\frac{\partial\alpha}{\partial l}=-\frac{m}{l^2}\cos^2\alpha=-\sin\alpha\sec\delta$$

$$=-\frac{m}{l^2+m^2},$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial l^2}=+\frac{2lm}{(l^2+m^2)^2}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\delta},$$

等等，得到 V/c 的二阶项

$$(\alpha'-\alpha)''=-\frac{1}{c\sin 1''}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\alpha-\frac{dy}{dt}\cos\alpha\right\}\sec\delta$$

$$+\frac{1}{c^2\sin 1''}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\alpha-\frac{dy}{dt}\cos\alpha\right\}\left\{\frac{dx}{dt}\cos\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{dy}{dt}\sin\alpha\right\}\sec^2\delta+\cdots\cdots \tag{64}$$

同样可得

$$(\delta'-\delta)''=-\frac{1}{c\sin 1''}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\delta\cos\alpha+\frac{dy}{dt}\sin\delta\sin\alpha\right.$$

$$\left.-\frac{dz}{dt}\cos\delta\right\}-\frac{1}{2c^2\sin 1''}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\alpha\right.$$

$$\left.-\frac{dy}{dt}\cos\alpha\right\}^2\tan\delta+\frac{1}{c^2\sin 1''}\left\{\frac{dx}{dt}\cos\delta\cos\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{dy}{dt}\cos\delta\sin\alpha+\frac{dz}{dt}\sin\delta\right\}\left\{\frac{dx}{dt}\sin\delta\cos\alpha\right.$$

$$+\frac{dy}{dt}\sin\delta\sin\alpha-\frac{dz}{dt}\cos\delta\Big\}+\cdots\cdots \quad (65)$$

（64）及（65）式右端的一阶项，可用 dx，dy，dz 所表示的 $d\alpha$，$d\delta$ 的微分表达式直接得到。它们代表由微分球面三角形 PMZ 而得的光行差的值，而不是由（59）及（60）式而得的严格三角解。以 B_v 及 M 点的角为常量，并记 $\theta-\theta'=(V/c)\sin\theta$，对三角形微分得

$L'-L=-V/c\sin(L-L_v)\cos B_v\sec B$,

$B'-B=-V/c\{\cos(L-L_v)\cos B_v\sin B-\sin B_v\cos B\}$,

将（62）式代入（64）和（65）式的一阶项也可得到相同的表达式。

取 XY 平面为黄道平面来代替赤道平面，以黄经 λ 代 α，黄纬 β 代 δ，就得到黄经和黄纬光行差的表达式。

把地球的速度 V 分解为指向给定点（α，δ）的方向 $\overrightarrow{OP}$ 的分量 u，以及与这个方向正交的两个分量 v，w，就可用很简单的形式表示一阶光行差，v 位于通过 OP 和极点的平面内，w 同时与 u 和 v 正交（图 22）。分量 u 不影响 P 的视位置，v 和 w 将产

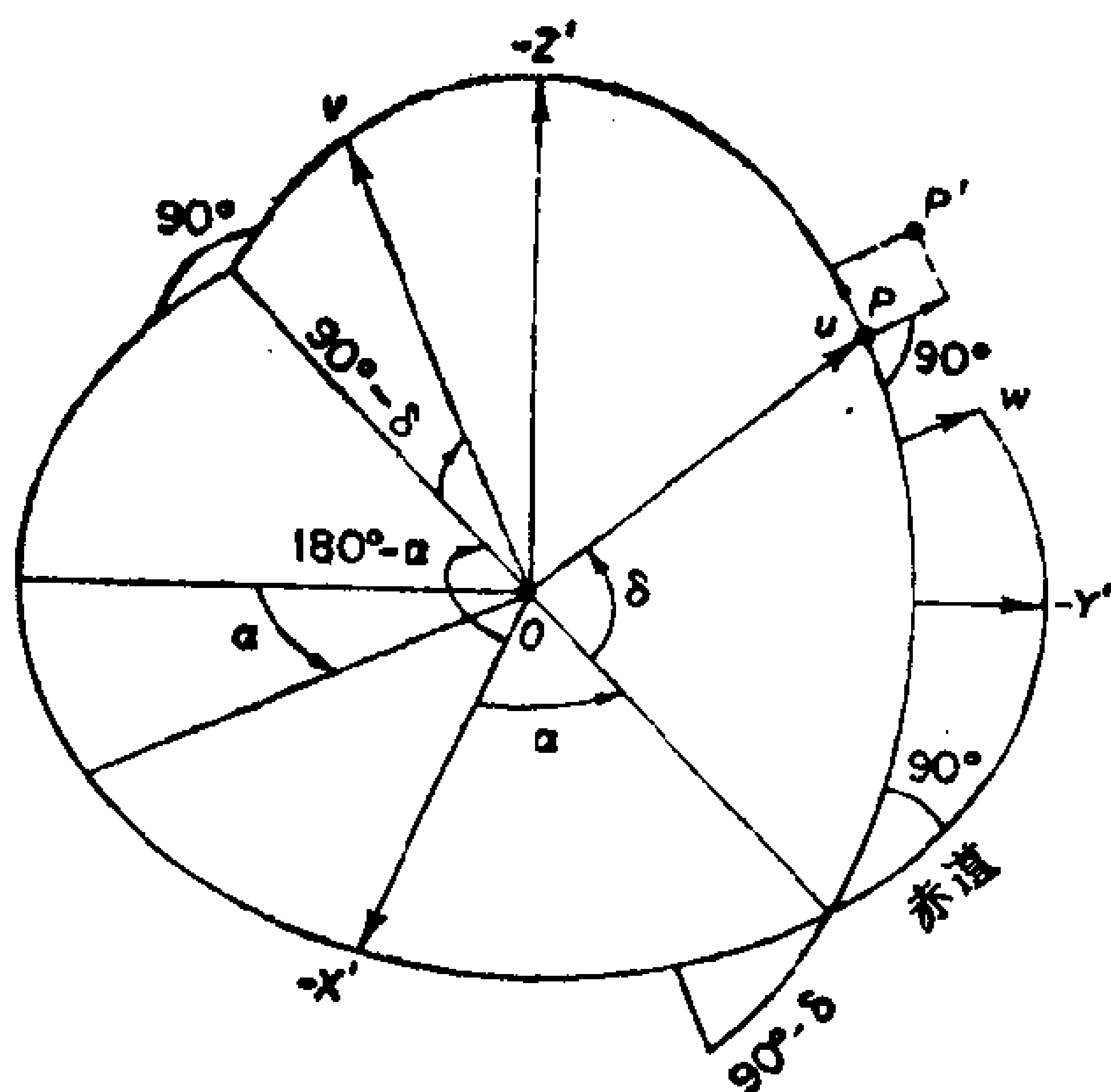


图 22 一阶恒星光行差

生恒星光行差。v 引起的视位移沿着赤经圈，因此仅影响到 δ，而 w 造成的位移与赤经圈正交，因为 P 到 w 的大圆与 P 到 v 的大圆互成直角，因此 w 的一阶项仅影响 α。令使 α 和 δ 值**增加**的 v 和 w 的方向为正，用（61）式可得到一阶项的值为

$$(\alpha' - \alpha)\cos\delta = \frac{w}{c},$$

$$\delta' - \delta = v/c; \tag{66}$$

对于黄道坐标系也相类似。

周年光行差

将地球**相对**于太阳的轨道运动及地球**随同**太阳**一齐**相对于太阳系质心运动的合成所形成的地球速度分量代入（64）和（65）式或者代入（66）式，就可得到周年光行差。

地球相对于太阳的速度分量，可由太阳的赤道直角坐标 X，Y，Z 来确定，太阳质心运动的效应可以单独来求，此时把它看作为是对地球轨道运动引起的光行差的一个微小的改正量。但若把太阳坐标归算到质心，则可以直接确定完整的周年光行差。

在求恒星光行差的基本公式（61）中

$$\Delta\theta'' = V/c \operatorname{cosec} 1'' \sin\theta,$$

系数 $(V/c)\operatorname{cosec} 1''$ 的平均值称为**光行差常数**。在实际应用中，这一项意味着**周年**光行差系数是不变的平均值，因为周日光行差是单独考虑的，并且不必考虑长期光行差，而它的严格定义是以地球日心轨道的 V 值为基础的，并不考虑摄动以及太阳相对于太阳系质心的运动。

在无摄动的黄道运动中，轨道线速度是 $r\,df/dt$，式中 f 为真近点角，因而

$$V = na^2\sqrt{1-e^2}/r$$

$$= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\{1 + e\cos f\},$$

式中 a 为地球离太阳的平均距离，e 为轨道偏心率，$n=2\pi/T$ 为平均运动，其中 T 为恒星年的长度。光行差常数定义为

$$k'=\frac{na}{c\sqrt{1-e^2}}\operatorname{cosec}1''.$$

严格来说，上式需加太阳质心运动及 e 的长期变化的改正，但这些改正值是不大的。

光行差常数的值可用地球轨道根数和光速按上式来计算，也可由对恒星视位置的光行差效应的观测直接得到。可是，观测无法将光行差产生的视位移与折射效应以及其它影响恒星视位置的效应分开。实用时只有对长时期的大量观测进行讨论及平差才能分别得到不同的效应和确定常数值。因而由观测来精确确定是困难的，但计算值同样是有误差的，因为用来推导出光行差的那些量本身有不确定性。1896 年在巴黎的国际会议上，一致选定了 20.47″ 为采用值●，虽则与太阳视差 $\pi_{\odot}$ 的采用值 8.80″ 不相一致，却一直在国家历书中使用。根据 1964 年汉堡举行的国际天文学联合会大会的建议，在 1968 年将改用 20.496″。这值是用 1964 年大会建议的天文单位(au)，地球赤道半径 ρ_0 和光速的下列采用值算出的：

$$\rho_0=6378.160\text{ 公里}$$
$$1\text{ au}=149600000\text{公里}$$
$$c=299792.5\text{公里/秒}$$

太阳视差用 $1\text{ au}=\rho_0/\sin\pi_{\odot}$ 来确定。$\pi_{\odot}=8.79405''$。平均距离 a 是 $1+\nu$ au，其中 ν 是一个很少的分数，因而

$$(k')''=\frac{n''\rho_0(1+\nu)}{c(\pi_{\odot})''\sin 1''(1-e^2)^{1/2}}$$

● 这个值用了近 70 年，1964 年国际天文学联合会(IAU)才把 k 值改为 20.496″，从 1968 年开始采用，将一直用到 1983 年。1976年 IAU 确定相对于标准历元 2000.0 年的 k 值为 20.49552″，将于 1984 年起全球统一采用。——译者注

地球公转运动产生的周年光行差

利用太阳的赤道直角坐标 X，Y，Z，形成光行差位移的地球轨道速度分量可表示为

$$v = X' \cos\alpha \sin\delta + Y' \sin\alpha \sin\delta - Z' \cos\delta,$$

$$w = X' \sin\alpha - Y' \cos\alpha,$$

因而，用（66）式得到地球轨道运动形成的到 V/c **一阶项**的恒星光行差为：

$$\alpha' - \alpha = -\frac{1}{c}\{-X' \sin\alpha + Y' \cos\alpha\}\sec\delta,$$

$$\delta' - \delta = -\frac{1}{c}\{-X' \cos\alpha \sin\delta - Y' \sin\alpha \sin\delta + Z' \cos\delta\},$$

（67）

这和把 $dx/dt = -X'$ 等代入（64）和（65）式得到的表达式是相同的。为了把观测到的恒星视向速度归算到日心，要把地球轨道运动速度的另一个分量作为改正量加上去，按惯例用负号表示向我们接近的速度，$u = -X \cos\alpha \cos\delta - Y' \sin\alpha \cos\delta - Z' \sin\delta$。

不考虑完全由于地球运动的摄动引起的太阳的黄纬值，赤道直角坐标为

$$X = R\cos\odot,$$
$$Y = R\cos\varepsilon \sin\odot, \qquad (68)$$
$$Z = R\sin\varepsilon \sin\odot,$$

式中$\odot$为太阳的真几何黄经，R 为矢径，ε 为黄赤交角，进一步再略去地球所有的其它摄动，则地球相对于太阳的速度分量为

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dx}{dt}$$

$$= R\sin\odot\frac{d\odot}{dt} - \cos\odot\frac{dR}{dt}$$

$$= R\sin\odot\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{R^2} - \cos\odot\frac{nae\sin(\odot-\Pi)}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$= \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\{\sin\odot + e\sin\Pi\},$$

式中 e，Π 为太阳轨道的偏心率和近地点黄经，n 为平均运动；同样可得

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\cos\varepsilon\,\{\cos\odot + e\cos\Pi\},$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\sin\varepsilon\,\{\cos\odot + e\cos\Pi\}.$$

因而用（67）式或用（64）和（65）式算到 **V/c 的一阶项**，就得到由于地球公转运动**无摄动的黄道分量**引起的赤经和赤纬的光行差，把这种改正值加在几何位置（α，δ）上就得到视位置（α'，δ'），

$$\begin{aligned}\alpha'-\alpha = &-(k'\sin\odot + k'e\sin\Pi)\sin\alpha\sec\delta\\ &-(k'\cos\odot\cos\varepsilon + k'e\cos\Pi\cos\varepsilon)\cos\alpha\sec\delta\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}\delta'-\delta = &-(k'\sin\odot + k'e\sin\Pi)\cos\alpha\sin\delta\\ &-(k'\cos\odot\cos\varepsilon + k'e\cos\Pi\cos\varepsilon)(\tan\varepsilon\cos\delta\\ &-\sin\alpha\sin\delta),\end{aligned}$$

式中$\odot$，α，Π 都从同一原点量起。

这些项都是两个因子的乘积，一个取决于太阳的位置和轨道根数，另一个取决于天体的位置。取决于天体位置的各个因子，通常记为

$$c = \frac{1}{15}\cos\alpha\sec\delta, \qquad c' = \tan\varepsilon\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta,$$

$$d = \frac{1}{15}\sin\alpha\sec\delta, \qquad d' = \cos\alpha\sin\delta,$$

称为**恒星常数**，因为对于恒星来说，每个恒星的这一量几乎是不变的。对于其它的因子，无论是赤经还是赤纬方面都是一样的，它们中的第一项都与 e 无关，除非 e 隐含在 k' 内，因而这一项代表无摄动的地球椭圆运动的圆周分量形成的光行差位移。它们中的第二项，明显地取决于 e，代表由于椭圆轨道运动偏离圆周所引起的位移的分量。因此，依赖 e 的光行差分量称为**椭圆光行差**，用恒星常数可将椭圆光行差表示为：

$$(\Delta\alpha)^{s}_{e}=(-k'e\cos\Pi\cos\varepsilon)c+(-k'e\sin\Pi)d,$$

$$(\Delta\delta)''_{e}=(-k'e\cos\Pi\cos\varepsilon)c'+(-k'e\sin\Pi)d'.$$

这些表示椭圆光行差的项是很小的，对于恒星来说，它们很近于常数，在实用改正恒星光行差时规定略去这些项。因而对于恒星，椭圆光行差包含在由观测确定的平位置之中。只有在把拱极星的平位置从一个历元归算到另一个历元的精密计算中，才需要考虑到椭圆光行差的变化。可是对于移动的天体，在天球上不同位置处椭圆光行差的差值将引起明显的影响●。

椭圆光行差在对行星及彗星作照相观测时特别重要。对于光行时以前的行星位置，需要进行完整的包括取决于 e 的那些项在内的光行差改正。而计算行星位置所参考的那些恒星平位置，则已经包含了这些项，因此引入了一个与位置有关的误差，它的最大值可达 $k'e=0.342''$。在 1950 年**美国天文年历**列出的冥王星天体测量历表中已消除了这种误差；美国海军天文台通报从 1949 年开始，在后神星、智神星、婚神星和灶神星的历表中，也消除了这种误差来源；接着**美国天文年历**从 1952 年开始对上述小行星也消除了这种误差。在这些历表中天体的位置实质上是考虑了椭圆光行差的平位置，因此可直接用来与照相观测作比较。

从（67）式中减去椭圆光行差的表达式，其中 X'，Y'，Z'

● 参见F.P.Scott. A method for evaluating the elliptic E terms of the aberration. Astr. Jour. 69,372～373(1964).

指实际受摄动的速度分量，即按常规略去椭圆分量，得到由地球公转引起的精确到V/c的一阶项的恒星光行差表达式，

$$\alpha'-\alpha=\left\{\frac{X'}{c}+k'e\sin\Pi\right\}\sin\alpha\sec\delta$$

$$+\left\{-\frac{Y'}{c}+k'e\cos\Pi\cos\varepsilon\right\}\cos\alpha\sec\delta,$$

$$\delta'-\delta=\left\{\frac{X'}{c}+k'e\sin\Pi\right\}\cos\alpha\sin\delta$$

$$-\left\{-\frac{Y'}{c}+k'e\cos\Pi\cos\varepsilon\right\}\sin\alpha\sin\delta$$

$$+\left\{-\frac{Z'}{c}+k'e\cos\Pi\sin\varepsilon\right\}\cos\delta.$$

由（68）式，$Z'=Y'\operatorname{tg}\varepsilon$其精度是很高的，用这个可靠的近似式，且令

$$C=-\frac{Y'}{c}+k'e\cos\Pi\cos\varepsilon,$$

$$D=+\frac{X'}{c}+k'e\sin\Pi, \tag{70}$$

得到以恒星常数表示的结果，

$$(\alpha'-\alpha)^{s}=Cc+Dd,$$

$$(\delta'-\delta)''=Cc'+Dd'. \tag{71}$$

量C和D称为光行差日数。取$k'=20.47''$，在（70）式中以每平太阳日的天文单位来表示X'，Y'，c，并且令

$$1/(c\sin 1'')=498.38/(86400\sin 1'')$$
$$=1189.795,$$

就可得到以弧秒表示的日数。

由下列各式来定义h，H，i

$$C=h\sin H$$

$$D = h\cos H$$

$$i = h\sin H\tan\varepsilon = C\tan\varepsilon \qquad (72)$$

还可有 $\alpha' - \alpha = h\sin(H+\alpha)\sec\delta,$

$$\delta' - \delta = h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta. \qquad (73)$$

当仅要求位数少时，上式是很方便的。

令 $-k'e\cos\Pi\cos\varepsilon = h_0\sin H_0 = C_0,$

$$-k'e\sin\Pi = h_0\cos H_0 = D_0,$$

$$-k'e\cos\Pi\sin\varepsilon = i_0;$$

也可得到相同形式的椭圆光行差。同样用 $C+C_0$ 等就可得到相同形式的总改正值的表达式。

若算到这些一阶表达式的精度，右端可以由几何坐标值或视坐标值来算得，即由几何位置到视位置的归算等于数值相等符号相反的从视位置到几何位置的归算。

一阶圆光行差

在仅由地球公转运动的**无摄动**分量形成的一阶光行差的特殊情况中，根据（68）式得到的 X'，Y' 的表达式，可求出（70）式的日数为

$$C = -k'\cos\varepsilon\cos\odot,$$

$$D = -k'\sin\odot, \qquad (74)$$

其中$\odot$为太阳的椭圆几何黄经。（71）式和（69）式一样，只是略去了 e 项。

黄道平面内的圆运动产生了由这些表达式表示的光行差位移，在这个圆运动中，速度与矢径成直角并指向黄道上太阳以西90°的点。这V点的黄道坐标称为地球运动的奔赴点，所以它的坐标为 $\lambda_V = \odot - 90°$ 及 $\beta_V = 0°$。（74）式可以独立地直接由天球上的几何关系建立起来（图 23)。在直角三角形♈VQ中，奔赴点的赤经 α_V 及赤纬 δ_V 满足下列关系：

$$\cos\alpha_V\cos\delta_V = +\sin\odot,$$

$$\sin\alpha_V\cos\delta_V = -\cos\odot\cos\varepsilon,$$

$\sin\delta_V = -\cos\odot\sin\varepsilon$,

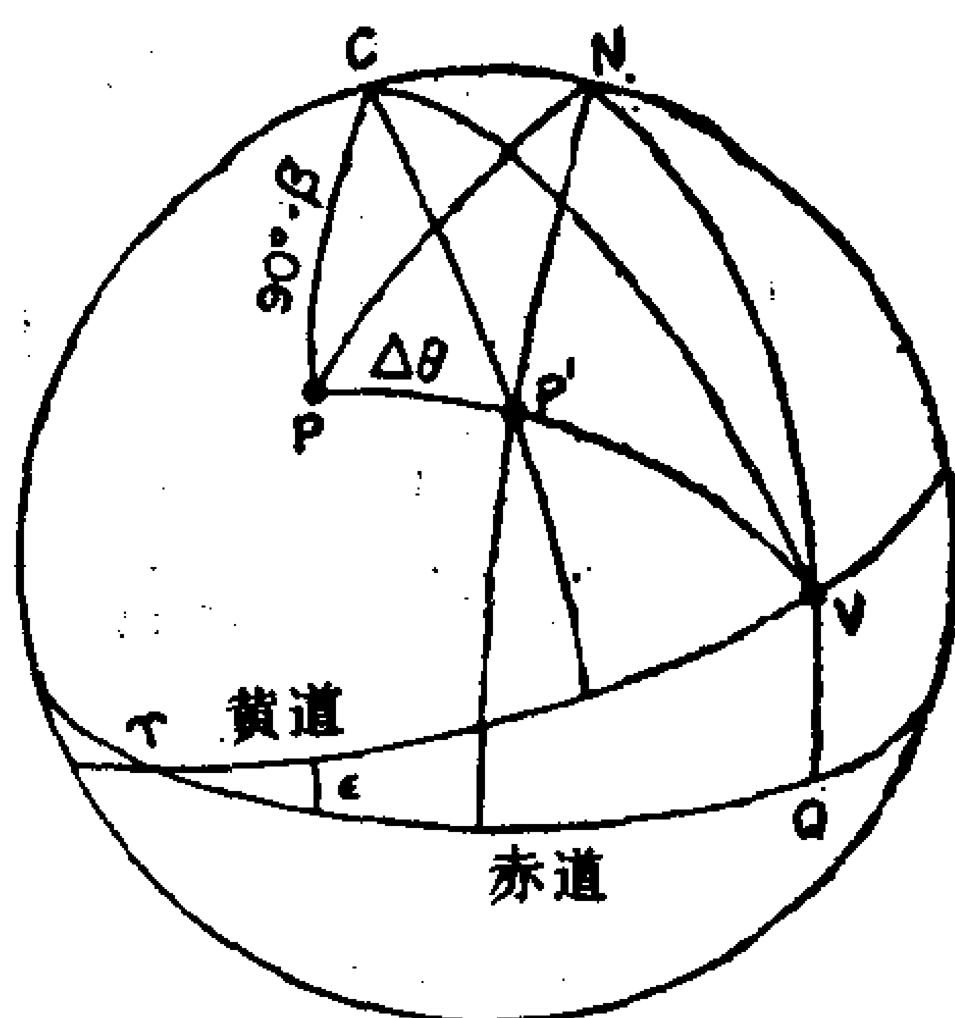


图 23 一阶圆光行差

这些式子可用来从（62）式求 $dx/dt\cdots\cdots$，或直接从$L'-L$及$B'-B$的表达式求$\alpha'-\alpha$及$\delta'-\delta$，而得到和(69)式相同的表达式，不同的只是略去了 e 项。

黄经和黄纬的一阶圆光行差，可由 $L'-L$ 及 $B'-B$ 的表达式立即得到，也可对以黄极C，奔赴点V及天体P构成的三角形直接微分而得到，而C点的角为$\odot-90°-\lambda$：

$$\lambda'-\lambda = -\frac{\cos(\odot-\lambda)}{\sin\theta\cos\beta}\Delta\theta$$

$$= -k'\cos(\odot-\lambda)\sec\beta \tag{75}$$

$$\beta'-\beta = -\tan\beta\cot\theta\Delta\theta$$

$$= -k'\sin(\odot-\lambda)\sin\beta$$

利用椭圆光行差表达式并忽略 e 项，在（64）和（65）式的一阶项中令

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d(R\cos\odot)}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{d(R\sin\odot)}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = 0,$$

则可得到同样的表达式。或在（$\alpha'-\alpha$）和（$\delta'-\delta$）的表达式中，令$\varepsilon=0$，并以λ代α，β代δ也可得这些式子。

在黄道平面内的椭圆运动，与矢径正交的速度分量为 h/p，式中 $p=a(1-e^2)$和 $h^2=n^2a^3p$，因此有$(1/c)(h/p)=k'$，这个

分量产生光行差位移(75)。

剩下的光行差位移是由于与长轴正交的分量 eh/p 造成的，这个分量指向黄道上黄经为$\Pi-90°$的一点，其中Π为**太阳近地点**的黄经，因而椭圆光行差可用$\Pi-90°$代替（75）式中的$\odot-90°$和以 ek' 代 k' 而求得：

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= -ek'\sec\beta\cos(\Pi-\lambda)\\ \Delta\beta &= -ek'\sin\beta\sin(\Pi-\lambda)\end{aligned} \tag{76}$$

用来加到（75）式的右端。

不论是恒星光行差或行星光行差，都不是实际观测到的位移。所有能够被直接觉察到的量是从观测点到天体在空间于观测以前 $t-\Delta t$ 时刻光线离开时的位置的那个方向。唯一被观测到的位移是由于地球与天体在不同的相对位置时因光行差的差别形成视位置的变化。对于恒星，视位置的这种变化，实质上完全是由于地球在轨道上运动方向的变化而引起的，它使恒星每年在天球上描绘出相应的轨迹。

（75）式表示由于具有这一精度量级的周年光行差的结果，使所有的恒星呈现为环绕它们的平位置描绘出一个小的周年椭圆。光行差位移等效于两个连续的位移，沿黄纬圈的量是 $x=(\lambda'-\lambda)\cos\beta$，沿黄经圈的量为 $y=-(\beta'-\beta)$。从 x 和 y 的式中消去$(\odot-\lambda)$，可得：

$$\frac{x^2}{k'^2}+\frac{y^2}{k'^2\sin^2\beta}=1,$$

这是一个椭圆方程，半长轴 k' 平行于黄道，半短轴为 $k'\sin\beta$。在黄极处光行差椭圆成为一个圆，在黄道上光行差椭圆成为一条直线。

当 $x=\pm k'$ 即$\odot-\lambda=0°$或$180°$时，视位置的位移最大。

在奔赴点或背点上的恒星不受光行差的影响，在 $\lambda=\odot\pm90°$，$\beta=0$ 处（75）式的值都为零。在太阳向径反方向上的恒星，$\lambda=\odot+180°$，$\beta=0°$，它在子夜中天，此时 $\lambda'-\lambda=+k'$，

$\beta'-\beta=0$。

应用求日数的（74）式及求⊙的椭圆公式计算得到的由地球无摄动的公转运动引起的一阶光行差，从前通常是加在周年光行差上的唯一改正量。然而，月亮和行星对地球运动的摄动以及太阳质心运动造成的二阶项都略去时，所得到的恒星坐标的精度一般不超过 0.01″。此外，在用天文年历列出的每日的C，D值进行实际计算时，由于做法上的近似和不一致，特别是关于参考春分点不一致，因此就又进一步引进了附加的二阶误差。例如，按（71）式归算时，通常只用年首恒星平位置计算的恒星常数来进行。同时，由于天文观测精度逐渐提高，要求把恒星位置的精度也更提高一步。因而，从 1960 年开始，天文年历中刊载了用被摄动的轨道速度分量的精确值以及太阳质心运动改正值按（70）式来计算的光行差日数，同时也已经做好了把（67）式V/c的一阶项扩充到二阶项的准备工作。

地球相对于太阳系质心的运动产生的周年光行差

如果用被摄动的地球公转速度以（70）式计算日数值，则（71）和（73）式表示地球**相对于太阳**运动造成的精确的一阶光行差值，这里没有考虑椭圆光行差，并且还作了$Z'=Y'\tan\varepsilon$这样一种误差微小的近似。在（70）式的X'，Y'中加上太阳质心运动的速度，就可得到地球**相对于太阳系质心的运动**，再用这些速度算得C和D的值，那么（71）或（73）式就代表**一阶**恒星周年光行差（66）式的总量。

再把（64）和（65）式右端$(V/c)^2$的项加到（71）和（73）式中，用相对于质心的速度来计算，就得到表示周年光行差准确到V/c **二阶项**的表达式。

实际应用时，速度是根据地球的质心坐标的数值微分求得。（α'，δ'）为视坐标，（α，δ）为几何坐标，在天球上的空间极坐标系是用和表示地球速度分量**同样的直角坐标轴**来确定的。相应于太阳系质心的地球赤道直角坐标为

$$x = -X - \frac{\Sigma m_i x_i}{1+\Sigma m_i}\text{等},$$

式中 m_i 为以太阳质量为单位表示的行星质量。(x_i, y_i, z_i) 为行星的日心坐标。

对这样的精度要求来说，实用上完全可以在（64）和（65）式中再令：

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt}\tan\varepsilon$$

进而，为消去椭圆光行差，以改正后的 $-D$ 和 $+C$ 值代替 $(1/c)(dx/dt)$ 和 $(1/c\ dy/dt)$，它们是以地球坐标 X 和 Y 的负值所表示的（70）式来求得的，

$$\frac{1}{c}\ \frac{dx}{dt} = -D + k'e\sin\Pi,$$

$$\frac{1}{c}\ \frac{dy}{dt} = +C - k'e\cos\Pi\cos\varepsilon.$$

如以太阳系质心为原点，可把微小的改正值加到通常的太阳地心直角坐标中来求 X 和 Y。

应用这些代换和（72）式，从（64）和（65）式可得到二阶项的值：

$$\begin{aligned}\alpha_{视} - \alpha &= h\sin(H+\alpha)\sec\delta \\ &\quad + \frac{1}{2}h^2\sin 2(H+\alpha)\sec^2\delta, \\ \delta_{视} - \delta &= h\cos(H+\alpha)\sin\delta + i\cos\delta \qquad (77) \\ &\quad + ih\cos(H+\alpha)\cos 2\delta - \frac{1}{2}i^2\sin 2\delta \\ &\quad + \frac{1}{4}h^2\cos 2(H+\alpha)\sin 2\delta\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}h^2\cos 2(H+\alpha)\tan\delta$$

$$-\frac{1}{4}h^2\tan\delta$$

$$+\frac{1}{4}h^2\sin 2\delta,$$

式中的日数需从地球速度计算而得，这个地球速度与恒星的几何坐标（α，δ）是相对于同一春分点和赤道的。

以日数C和D表示的二阶项为：

$$\Delta_2\alpha=\left\{\frac{1}{2}(D^2-C^2)\sin 2\alpha+CD\cos 2\alpha\right\}\sec^2\delta,$$

$$\Delta_2\delta=\left\{\frac{1}{4}(D^2-C^2)\cos 2\alpha-\frac{1}{2}CD\sin 2\alpha\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(C^2+D^2)\right\}\tan\delta+\left\{\frac{1}{4}(D^2-C^2)\cos 2\alpha\right.$$

$$-\frac{1}{2}CD\sin 2\alpha+\frac{1}{4}(C^2+D^2)$$

$$\left.-\frac{1}{2}C^2\tan^2\varepsilon\right\}\sin 2\delta+(CD\cos\alpha$$

$$-C^2\sin\alpha)\tan\varepsilon\cos 2\delta. \tag{78}$$

在（64）和（65）式中，令$\dot{x}/C=+k'\sin\odot$，$\dot{y}/C=-k'\cos\odot$，$\dot{z}=0$，得黄经和黄纬的二阶项为：

$$\lambda'-\lambda=+\frac{1}{2}k'^2\sin 1''\sin 2(\odot-\lambda)\sec^2\beta,$$

$$\beta'-\beta=-\frac{1}{4}k'^2\sin 1''\{\cos 2(\odot-\lambda)\tan\beta$$

$$+\sin 2(\odot-\lambda)\sin 2\beta\}$$

$$+\frac{1}{4}k'^2\sin 1''(\sin 2\beta-\tan\beta).$$

当计算到二阶项时，要注意从几何位置换算到视位置与从视位置换算到几何位置两者是有差别的，因为这种差别达到二次幂的量级。

当应用这些表达式和（70）式，从地球的实际运动而不是从（69）式的无摄动的黄道运动分量来确定周年光行差时，椭圆光行差可以更精确地定义为：在用（70）式计算C和D值时，通常从地球的受摄动质心速度分量中减去的那些量所产生的附加位移。所以以前给出的表达式只是到一阶项，由略去的那部分速度产生的二阶椭圆光行差，包括实际上的常数部分以及依赖于太阳黄经的那部分，但这两部分都是微不足道的。

然而在完整的二阶光行差中，常数部分不是完全由椭圆分量引起的。（77）式中$\alpha'-\alpha$的二阶项可以写为：

$$\frac{1}{2}h^2\sin 2(H+\alpha)\sec^2\delta=-\frac{1}{4}k^2\sin 1''\{(1+\cos^2\varepsilon)\times\sin 2\alpha\cos 2\odot-2\cos\varepsilon\cos 2\alpha\times\sin 2\odot\}\sec^2\delta+\frac{1}{4}k^2\sin 1''\times\sin^2\varepsilon\sin 2\alpha\sec^2\delta,$$

其中的常数项必须与椭圆光行差相区别。同样$\delta'-\delta$包括常数的部分

$$-\frac{1}{8}k^2\sin 1''\{(1+\cos^2\varepsilon)-\sin^2\varepsilon\cos 2\alpha\}\tan\delta.$$

这些项自动地包含在二阶项的计算中，不象椭圆光行差那样，它明显地在归算中被消除，且包含在几何位置中。

为了表示加在（74）式中的这些效应的量级，单由太阳质心运动引起的或由任何个别的行星引起的周年光行差的分量，可以仅仅只用这个运动的速度分量分别代入（64）及（65）式中而求

得。为了得到具有足够精确度的结果，可把太阳质心和质量为m的行星假想移到离真实太阳距离为ma的地方，其中a为行星的平均距离，而认为太阳是在行星轨道平面内绕该点作圆周运动，其运动的角速度等于该行星的平均运动n。如不考虑行星的黄纬，则以该点为原点，而坐标轴平行于赤道坐标系的太阳直角坐标为

$$ma\cos(180^\circ+l),$$
$$ma\cos\varepsilon\sin(180^\circ+l),$$
$$ma\sin\varepsilon\sin(180^\circ+l),$$

式中l为行星的日心黄经，因此速度分量为

$$+nma\sin l,$$
$$-nma\cos\varepsilon\cos l,$$
$$-nma\sin\varepsilon\cos l,$$

由此得：

$$(\alpha'-\alpha)''=-\frac{(n)''ma}{c}\{\sin\alpha\sin l+\cos\varepsilon\cos\alpha\cos l\}\sec\delta,$$

$$(\delta'-\delta)''=-\frac{(n)''ma}{c}\{\cos\alpha\sin\delta\sin l+\cos l(\sin\varepsilon\cos\delta-\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta)\},$$

式中常系数可表为

$$\frac{(n)''ma}{c}=k'ma\frac{n}{n_\oplus}=k'\frac{ma}{T},$$

其中T为以恒星年表示的行星的恒星周期。

对于不同的大行星的$k'ma/T$系数值为：

金星	0.0001″	土星	0.0019″
地球	0.0001″	天王星	0.0002″

木星 0.0086″　　海王星 0.0002″

因此太阳相对于太阳系质心运动产生的恒星光行差，实际上全是由木星及土星造成的，表示木星的影响的每半天的速度 X', Y', Z' 的改正值为

$$-0.0000036\sin l_J,\quad +0.0000033\cos l_J,$$
$$+0.0000014\cos l_J,$$

对土星来说，改正值为

$$-0.0000008\sin l_S,\quad +0.0000007\cos l_S,$$
$$+0.0000003\cos l_S\ .$$

由地球绕地月系质心运动形成的恒星光行差，同样可以从地球相对于质心的赤道直角坐标来分别求得，达到足够精确度的式子为：

$$\Delta x=-f\cos\beta_{☽}\cos\lambda_{☽}$$
$$=-f\cos\delta_{☽}\cos\alpha_{☽},$$
$$\Delta y=-f\cos\beta_{☽}(\cos\varepsilon\sin\lambda_{☽}-\sin\varepsilon\tan\beta_{☽})$$
$$=-f\cos\delta_{☽}\sin\alpha_{☽},$$
$$\Delta z=-f\cos\beta_{☽}(\sin\varepsilon\sin\lambda_{☽}+\cos\varepsilon\tan\beta_{☽})$$
$$=-f\sin\delta_{☽},$$

其中
$$f=\frac{m_{☽}/m_{\oplus}}{1+m_{☽}/m_{\oplus}}8.80''\sin1''\operatorname{cosec}\pi_{☽}$$
$$=0.0000312.$$

不考虑月球黄纬，地球对于质心的运动可取为

$$+f\sin\lambda_{☽}\frac{d\lambda_{☽}}{dt}=+fn''_{☽}\sin1''\sin☽,$$

$$-f\cos\varepsilon\cos\lambda_{☽}\frac{d\lambda_{☽}}{dt}=-fn''_{☽}\sin1''\cos\varepsilon\cos☽,$$

$$-f\sin\varepsilon\cos\lambda_{☽}\frac{d\lambda_{☽}}{dt}=-fn''_{☽}\sin1''\sin\varepsilon\cos☽,$$

$n_☽$，☽为月球的平运动及平黄经。因而由（64）和（65）式以及

$$-\frac{1}{C}fn''_☽=-\frac{0.0000312\times1.3176\times3600}{\frac{186300\times8640}{93000000}}$$

$$=-0.00856'',$$

可得

$$\cos\delta(\alpha'-\alpha)''=-0.0086''\{\sin☽\sin\alpha+\cos\varepsilon\cos☽\cos\alpha\},$$

$$(\delta'-\delta)''=-0.0086''\{\sin☽\cos\alpha\sin\delta-\cos\varepsilon\cos☽\sin\alpha\sin\delta+\sin\varepsilon\cos☽\cos\delta\},$$

即只要把$-0.0079''\cos☽$加到C上，$-0.0086''\sin☽$加到D上，月球光行差就包含在（71）式中。

系数$-0.0086''$是在月球轨道平面内的平均位移，等于地球环绕月球运动的速度和地球环绕太阳运动的速度之比与k'的乘积，

$$-\frac{k'a_☽n_☽/(1+m_\oplus/m_☽)}{a_\oplus n_\oplus}=-k'f\frac{n_☽}{n_\oplus},$$

其中$n_☽/n_\oplus=13.37$。

月球光行差在赤经和赤纬上的系数，从月球方程主要项（$6.454''\sin D$）的变化率求得要比从$n_☽$求得的更精确些。黄道平面内的平均光行差位移为

$$k'\frac{1}{n_\oplus}\frac{d}{dt}(6.454''\sin D)$$

$$=6.454''k'\cos D\frac{dD/dt}{n_\oplus}$$

$$=20.47''\times6.454''\times12.37\sin1''\cos D$$

$$=0.0079''\cos D,$$

其周期为29.5^d。因而如不考虑月球赤纬，把$-0.0072''\cos ☾$加到C上，$-0.0079''\sin ☾$加到D上就可求得月球光行差。

为确定近极天体的赤经和赤纬光行差，由于赤纬很大，必需计算到比二阶更高的精度，在实际应用时可采用以日数表示的严格三角归算公式（59）和(60)。此时（59）式变为

$$\tan(\alpha_{视}-\alpha)=\frac{\sec\delta\{C\cos\alpha+D\sin\alpha\}}{1-\sec\delta\{D\cos\alpha-C\sin\alpha\}}$$

$$=\frac{h\sin(H+\alpha)\sec\delta}{1-h\cos(H+\alpha)\sec\delta}, \qquad (79)$$

且令 $k\sin k=C\tan\varepsilon$,

$$k\cos k=h\cos\{H+\alpha+\frac{1}{2}(\alpha_{视}-\alpha)\}\sec\frac{1}{2}(\alpha_{视}-\alpha),$$

（60）式则变为

$$\tan(\delta_{视}-\delta)=\frac{k\sin(K+\delta)}{1-k\cos(K+\delta)}, \qquad (80)$$

展开这些严格表达式可以直接得到二阶表达式（77）和(78)。

以直角坐标表示的恒星光行差

从严格的（57）式出发，利用方向余弦

$$l=\cos\alpha\cos\delta,$$

$$m=\sin\alpha\cos\delta,$$

$$n=\sin\delta,$$

以及比较精确的近似关系

$$C_r=c,$$

$$\dot{z}=\dot{y}\tan\varepsilon,$$

并令$\dot{x}/c=-D$，$\dot{y}/c=+C$以及经过椭圆光行差改正后的速度，就可求得

$$l' - l = -D,$$
$$m' - m = +C,$$
$$n' - n = +C\tan\varepsilon.$$

较差恒星光行差

因为恒星光行差的数值取决于天体在天球上的位置，所以通常光行差就使天体相互之间的位置发生变化。例如，一天体相对于另一天体的视角距及位置角随天体几何位置而不同。

以赤道坐标表示，用 $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ 和 $\Delta\delta$ 表示两天体几何位置的差，$\Delta\alpha' = \alpha_2' - \alpha_1'$ 和 $\Delta\delta'$ 表示它们视位置之差，则一阶项的式子为：

$$\Delta\alpha' = \Delta\alpha + \frac{\partial(\alpha' - \alpha)}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial(\alpha' - \alpha)}{\partial\delta}\Delta\delta,$$

同样可得 $\Delta\delta'$ 的式子。因此，从（71）式以及恒星常数的表达式，可求得加到几何位置差中以得到视位置差值的改正值为：

$$\Delta(\alpha' - \alpha)^{s} = C\Delta c + D\Delta d$$
$$= +\frac{1}{15}(D\cos\alpha - C\sin\alpha)\sec\delta\Delta\alpha^{s}\sin 1^{s}$$
$$+\frac{1}{15}(D\sin\alpha + C\cos\alpha)\sec\delta\tan\delta\,\Delta\delta''\sin 1''$$
$$= +\frac{1}{15}h\sec\delta\cos(H + \alpha)\Delta\alpha^{s}\sin 1^{s}$$
$$+\frac{1}{15}h\sec\delta\tan\delta\sin(H + \alpha)\Delta\delta''\sin 1'',$$

$$\Delta(\delta' - \delta)'' = -(D\sin\alpha + C\cos\alpha)\sin\delta\Delta\alpha^{s}\sin 1^{s}$$
$$+(D\cos\ - C\sin\alpha)\cos\delta\,\Delta\delta''\sin 1''$$
$$-C\tan\varepsilon\sin\delta\,\Delta\delta''\sin 1''$$
$$= -h\sin\delta\sin(H + \alpha)\Delta\alpha^{s}\sin 1^{s}$$
$$= +h\cos\delta\cos(H + \alpha)\Delta\delta''\sin 1''$$

$$-i\sin\delta\,\Delta\delta''\sin 1''.$$

$\Delta\alpha'$，$\Delta\delta'$ 是一个天体相对一个比较星的位置差，表示**“天体减比较星”**。从 $\Delta\alpha'$，$\Delta\delta'$ 的观测值中减去上述改正，就可把观测值化到几何位置值，再由比较星的星表位置就可算出天体的位置。在天文年历中给出了便于简化归算的表。对于两个相距1°的天体，相应的改正量的最大值，在赤经上为 $0.02^s\sec\delta$，赤纬为 $0.3''$。

在黄道系中，具有（75）式相同精度的公式为：

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda + \frac{(\beta'-\beta)}{\sin\beta\cos\beta}\Delta\lambda + (\lambda'-\lambda)\tan\beta\,\Delta\beta,$$

$$\Delta\beta' = \Delta\beta + (\beta'-\beta)\cot\beta\,\Delta\beta - (\lambda' - \lambda)\sin\beta\cos\beta\,\Delta\lambda.$$

视距和位置角的恒星光行差

视角距 s 及位置角 p 的较差光行差，可以从一阶表达式 $s\sin p = \Delta\alpha\cos\delta$ 及 $s\cos p = \Delta\delta$ 得到。微分这些表达式得

$$\cos p\,\Delta s - s\sin p\,\Delta p = \Delta(\delta'-\delta),$$

$$\sin p\,\Delta s + s\cos p\,\Delta p = \Delta(\alpha'-\alpha)\cos\delta - (\delta'-\delta)\sin\delta\,\Delta\alpha.$$

以 $\Delta(\delta'-\delta)$，$\Delta(\alpha'-\alpha)$，$\delta'-\delta$，$\Delta\alpha$ 以及 $\Delta\delta$ 的表达式代入右端，然后解出 Δs 及 Δp：

$$s'-s = s\{D\cos\delta\cos\alpha - C(\tan\varepsilon\sin\delta + \cos\delta\sin\alpha)\},$$

$$p'-p = C\tan\delta\cos\alpha + D\tan\delta\sin\alpha;$$

或以日数 H，h，i 表示为

$$\Delta s = s\{h\cos(H+\alpha)\cos\delta - i\sin\delta\},$$

$$\Delta p = h\sin(H+\alpha)\tan\delta.$$

因此，到同一点的所有视角距，不管它们的方向如何，都以相同的比率变化，最大值小于 s/10 000，而到这点的所有位置角改变的量都一样。

周日光行差

周日自转的线速度指向东方，与子午面正交，因而在天球上的光行差位移是沿着从几何位置到地平上东点的大圆弧 Θ。观测者的地心坐标为 ρ 和 φ'，地方恒星时为 θ，则周日轨迹的半径为 $\rho\cos\varphi'$，线速度为 $v=(\rho\cos\varphi')(d\theta/dt)$；令 κ 为 (v/c) cosec 1″，则用弧秒表示的位移量为 $\kappa\sin\Theta$，方向指向东点。

从天球上的几何关系明显可见，在（75）式中以 κ 代 κ'，H 代 β，A 代 λ 和 180° 代⊙就可以得到高度 H 和自**南点向东**量的方位角的周日光行差，它到 v/c 的一阶量为：

$$A_{视}-A=+\kappa\sec H\cos A,$$

$$H_{视}-H=-\kappa\sin H\sin A.$$

同样，以 κ 代 k'，δ 代 β，$360°-h$ 代 λ 和以 180° 代⊙就可以得到时角 h 和赤纬 δ 的周日光行差：

$$h_{视}-h=-\kappa\sec\delta\cos h,$$

$$\delta_{视}-\delta=+\kappa\sin\delta\sin h.$$

赤经的光行差位移是时角位移的负值。

赤经和赤纬的周日光行差也可由（64）和（65）式求得。观测者以 X 轴指向春分点的地心赤道直角坐标为

$$x=\rho\cos\varphi'\cos\theta,\quad y=\rho\cos\varphi'\sin\theta,\quad z=\rho\sin\varphi',$$

因此周日运动的线速度为

$$dx/dt=-\rho\cos\varphi'\sin\theta(d\theta/dt),$$

$$dy/dt=+\rho\cos\varphi'\cos\theta(d\theta/dt),$$

所以算到 v/c 的一阶值为

$$(\alpha'-\alpha)''=\frac{1}{c}\ \frac{d\theta}{dt}\rho\cos\varphi'\cos(\theta-\alpha)\sec\delta\operatorname{cosec}1'',$$

$$(\delta'-\delta)''=\frac{1}{c}\ \frac{d\theta}{dt}\rho\cos\varphi'\sin(\theta-\alpha)\sin\delta\operatorname{cosec}1'',$$

其中 $$\rho\cos\varphi' = \frac{a_0}{\sqrt{1-e_0^2\sin^2\varphi}}\cos\varphi,$$

式中 φ 为大地纬度，a_0为地球赤道半径，e_0为子午圈的偏心率。

因子 $\frac{1}{\sqrt{1-e_0^2\sin^2\varphi}}$ 的变幅仅为在赤道上的 1 到两极的1.0034。

因子$(a_0/c)d\theta/dt$ 称为周日光行差常数。θ的周期为一恒星日，或 0.9972695664 平太阳日，因对地球平均轨道运动 n（周期为 1 恒星 年）$d\theta/dt$ 的 比 率 为 365.256360/0.997269566 = 366.2564（以恒星日表示的恒星年长度），以周年光行 差常数 k' 表示的周日光行差常数为

$$\frac{a_0}{c}\ \frac{d\theta}{dt} = 366.2564\sin\pi_{\odot}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}k'$$

$$= 366.2564\times 8.80''\sin 1''\times 0.999860$$
$$\times 20.47''\sin 1'' = 0.3198''\sin 1''$$
$$= 0.02132^{s}\sin 1''.$$

这个常数是线速度与光速的比以天为时间单位，它也可由下式给出

$$\frac{2\pi a_0}{\frac{86400}{498.58^{s}}\times\frac{a_0}{8.80''\sin 1''}}\operatorname{cosec}1''.$$

因而，$$(\alpha'-\alpha)'' = \frac{0.3198''}{\sqrt{1-e_0^2\sin^2\varphi}}\cos\varphi\cos(\theta-\alpha)\sec\delta,$$

$$(\delta'-\delta)'' = \frac{0.3198''}{\sqrt{1-e_0^2\sin^2\varphi}}\cos\varphi\sin(\theta-\alpha)\sin\delta.$$

在子午圈上 $\theta=\alpha$，赤纬的周日光行差为零，而赤经的周日光行差达到最大值$(0.319''\sqrt{1-e_0^2\sin^2\varphi})\cos\varphi\sec\delta$，在 天 顶时 $\delta=\varphi$，赤经光行差就变为常量。

消去（$\theta-\alpha$）可得

$$\frac{(\cos\delta\,\Delta\alpha)^2}{k^2\cos^2\varphi}+\frac{(\Delta\delta)^2}{k^2\cos^2\varphi\sin^2\delta}=1,$$

这是椭圆方程，半长径沿赤纬圈为 $k\cos\varphi$，半短轴沿赤经圈为 $k\cos\varphi\sin\delta$。

行星光行差

在时刻 t 的视位置加上由于观测者在瞬间 t 的运动造成的恒星光行差改正，就得到时刻 t 天体的位置，这是在时刻 $t-\Delta t$ **以前**当光离开时天体的几何位置。而在光行时间 Δt 内天体运动的改正值可由两种方法求得，这改正值用来确定在**同一**时刻天体实际所处的位置。在 $t-\Delta t$ 时相对于该瞬间观测者几何位置的天体几何位置，可以对**观测时刻**加 $-\Delta t$ 的改正而得，而不必改变观测位置；或者在时刻 t 对于观测瞬间观测者位置的天体几何位置，可以对**观测位置**加上地球与天体的相对运动而得。这两种方法都自动地包括了地球与天体两者运动的改正，恒星光行差并不明显地出现，而是隐含在行星光行差中。

由于仅仅向前改正观测时刻的方法比较简单，所以广泛地被应用，可是改正观测位置的方法或许较好些，因为它给出在观测瞬间的几何位置，并且它在理论上也是较好的，因为它表示了光行差依赖于观测者对光源的相对速度这个重要原理。这两种处理方法，都与整系统的总体运动无关。

若运动是线性和匀速的，那么在空间的位移正比于速度，行星光行差就可由地球相对于行星的速度而求得，在此要用到完全类似于由地球的总速度求恒星光行差的那种几何关系（见图24）。天体的速度可用下列形式表示

$$V_P=V_{\oplus}+(V_P-V_{\oplus}).$$

在光行时间内，分量 $V_{\oplus}$ 使天体对于它初始位置 P 产生一个**几何位移**，位移的数量和方向如同由于地球运动产生的恒星光行差造成的在时刻 $t-\Delta t$ 时位置 P 的视位移一样，在接收到光线的时刻，

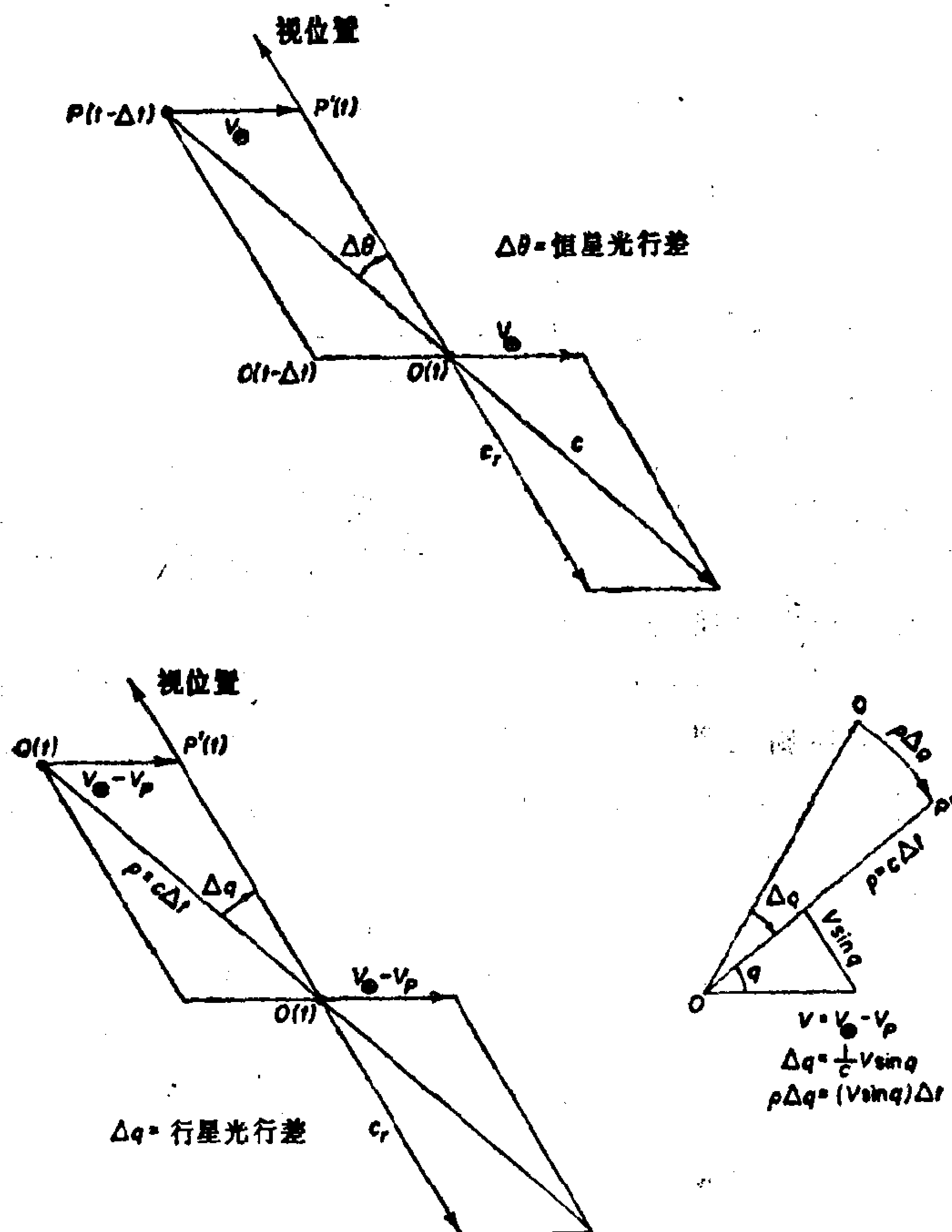


图 24 行星光行差；参看图 19

天体的速度分量使天体位置移到我们看到的实际位置 P'。因为 P' 是 P 的**视**位置，观测到的位置与在 $t-\Delta t$ 的实际几何位置也是相同的。分量 $V_{\oplus}$ 并不改变天体离地球的几何方向。可是，剩下的速度分量 $V_P-V_{\oplus}$ 同时还产生附加的几何位移，它使观测时刻 t 的实际几何位置 Q，从 P' 移动了 Δq 值。因为这个位

移，观测时刻的几何位置位于$\overrightarrow{OP'}$及$V_P - V_\oplus$的合成方向上，如取到V/c的一阶量，在求行星光行差Δq时，可先用地球相对于行星的速度分量$-(V_P - V_\oplus)$代替dx/dt等值，再代入以前用于计算恒星光行差的公式（64）和(65)。

在$t-\Delta t$时刻位于空间一点$P(x_0, y_0, z_0)$的天体作匀速直线运动，在观测时刻t将移动到几何位置

$$x = x_0 + \dot{x}\Delta t, \quad y = y_0 + \dot{y}\Delta t, \quad z = z_0 + \dot{z}\Delta t,$$

它的速度为$V_\oplus$的分量将使天体移动到几何位置

$$x' = x_0 + \dot{x}_\oplus \Delta t, \quad y' = y_0 + \dot{y}_\oplus \Delta t, z' = z_0 + \dot{z}_\oplus \Delta t,$$

因为它与时刻t的视位置相同，因此一阶行星光行差可表示为

$$\begin{aligned} x' - x &= (\dot{x}_\oplus - \dot{x})\Delta t, \\ y' - y &= (\dot{y}_\oplus - \dot{y})\Delta t, \\ z' - z &= (\dot{z}_\oplus - \dot{z})\Delta t. \end{aligned} \tag{81}$$

在这一精度范围内，视位置偏离同一瞬间的几何位置的角位移Δq等于天体相对于地球在空间的线性几何位移Δs，其大小可用（81）式左边的项表示。右边的项表示在光行时Δt中地球相对于天体的运动，即天体在空间的地心运动的负值。相对速度$V_\oplus - V_P$与视线成q角，位移Δq是由这个相对运动的与视线正交的分量产生的，大小为$(V_\oplus - V_P)\sin q\Delta t$。在地心距离$\rho = c\Delta t$处，对地球张角$\Delta q$的线位移为$\rho\Delta q$，因而

$$\Delta q = \frac{V_\oplus - V_P}{c}\sin q,$$

它完全类似于展开（61）式的一阶项。

在赤道系内，地心直角坐标为

$$\xi = \rho\cos\delta\cos\alpha, \quad \eta = \rho\cos\delta\sin\alpha, \quad \zeta = \rho\sin\delta. \tag{82}$$

以这些坐标表示，则（81）式为

$$\xi' - \xi = -\frac{d\xi}{dt}\Delta t = -\Delta\xi,$$

……

将（82）式对 α，δ 求微分，得 Δs 的分量 $-\Delta\xi$，$-\Delta\eta$，$-\Delta\zeta$ 的方程；对 $\cos\delta\,\Delta\alpha$ 和 $\sin\delta\,\Delta\delta$ 求解 $\Delta\xi$ 和 $\Delta\eta$，对 $\cos\delta\,\Delta\delta$ 求解 $\Delta\zeta$，可得赤经和赤纬的行星光行差

$$(\alpha'-\alpha)\cos\delta=\sin\alpha\frac{\Delta\xi}{\rho}-\cos\alpha\frac{\Delta\eta}{\rho}, \tag{83}$$

$$\delta'-\delta=\cos\alpha\sin\delta\frac{\Delta\xi}{\rho}+\sin\alpha\sin\delta\frac{\Delta\eta}{\rho}-\cos\delta\frac{\Delta\zeta}{\rho}.$$

因为
$$\frac{\Delta\xi}{\rho}=+\frac{1}{c}\frac{d\xi}{dt},\ \cdots\cdots \tag{84}$$

若以地球的相对速度 $-d\xi/dt$，$-d\eta/dt$，$-d\zeta/dt$ 代替总速度，则(83)式就与(64)和(65)式的一阶项相同。

严格地说，光行差公式内的光行时 Δt 是光从 $t-\Delta t$ 时天体在空间的点位传播到 t 时观测者位置的距离所需的时间。但除非知道 Δt，否则不能确定这一距离。在实用中，通常不论用 t 或 $t-\Delta t$ 来计算天体的地心距离，两者都没有明显的误差。如要求较高的精度，则可应用逐次近似法。

实际计算时，行星光行差可以由形成行星光行差的相对运动直接来表示。与视线正交的天体的地心速度为

$$-(V_{\oplus}-V_{P})\sin q=\rho\frac{dq}{dt}$$

式中 dq/dt 为由此造成的天体在天球上视运动的角速度。左边的因子为 $-c\,\Delta q$，其中 Δq 为在同一瞬间视位置 P' 离几何位置 P 在 $+(V_{\oplus}-V_{P})$ 方向上的位移。天球上任一视坐标 φ 的位移量 $\Delta\varphi$ 是 Δq 相应的分量，它与 $d\varphi/dt$ 的方向相反，因而

$$\varphi(P')_t-\varphi(P)_t=-\frac{\rho}{c}\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt}\Delta t,$$

由此式，若知道 $\varphi(P')$ 或 $\varphi(P)$ 中的任一个，就可以求得另一

个，因为公式右边的 $d\varphi/dt$ 可由对万有引力理论计算出的几何历表进行数值微分求得。

观测时刻的几何位置 $\varphi(P)$ 是由把光行时间内的视运动量加到观测位置上而得。反之，在任一时刻 t 的视位置，可以由时刻 t 的几何位置中减去光行时间内的运动而得。或者就是按照在时刻 t 的观测位置与在时刻 $t-\Delta t$ 对于地球的几何位置是相同的这一原理，在几何历表中从 t 内插到 $t-\Delta t$ 而得。同样，根据这一原则，不是用改正**观测位置**以得同一瞬间的几何位置，而把**观测时刻**提前为 $t-\Delta t$ 以得到这一瞬间的几何位置。

因此，在实际计算行星视位置的地心历表时，为了求表列时刻 t 的历表位置，常用的方法是对从引力表中计算的时刻 t 的每个坐标 φ 的几何位置加上改正值：

$$\frac{-498.38^{s}\rho}{60\times60\times24\times2}\times(\text{在两天中 }\varphi\text{ 的运动})$$

$$=-0.0028841\rho\times(\text{在两天中 }\varphi\text{ 的运动})$$

这是在光行时间内这个坐标的地心运动的负值，498.38^{s} 为光经过一个天文单位所需的时间的采用值，相应于光行差常数为 $20.47''$。两天的运动是由在 t 后一天的几何坐标减去 t 前一天的值而得。

计算光行差的(67)及(83)式与计算周年视差的公式形式相同，只是以光速代替天体的距离。在恒星光行差中，用观测者速度的负值代替两个不同观测点间的距离，而在行星光行差中则用相对运动速度的负值来代替。因而行星光行差有时称为**光视差**。

当光行时间较长时，上述的几种方法，将有明显的误差，因为这些方法都是以地球和行星作匀速直线运动为前提的。实际上，由于地球轨道的曲率，当光离开行星时它相对于这瞬间地球的位置的几何位置，与光到达观测者时的视位置严格来说不是相同的，同样，在观测瞬间行星的几何位置对于**同一**瞬间它的视位置，既取决于光行时间内它运动的曲率，也取决于地球的瞬时相

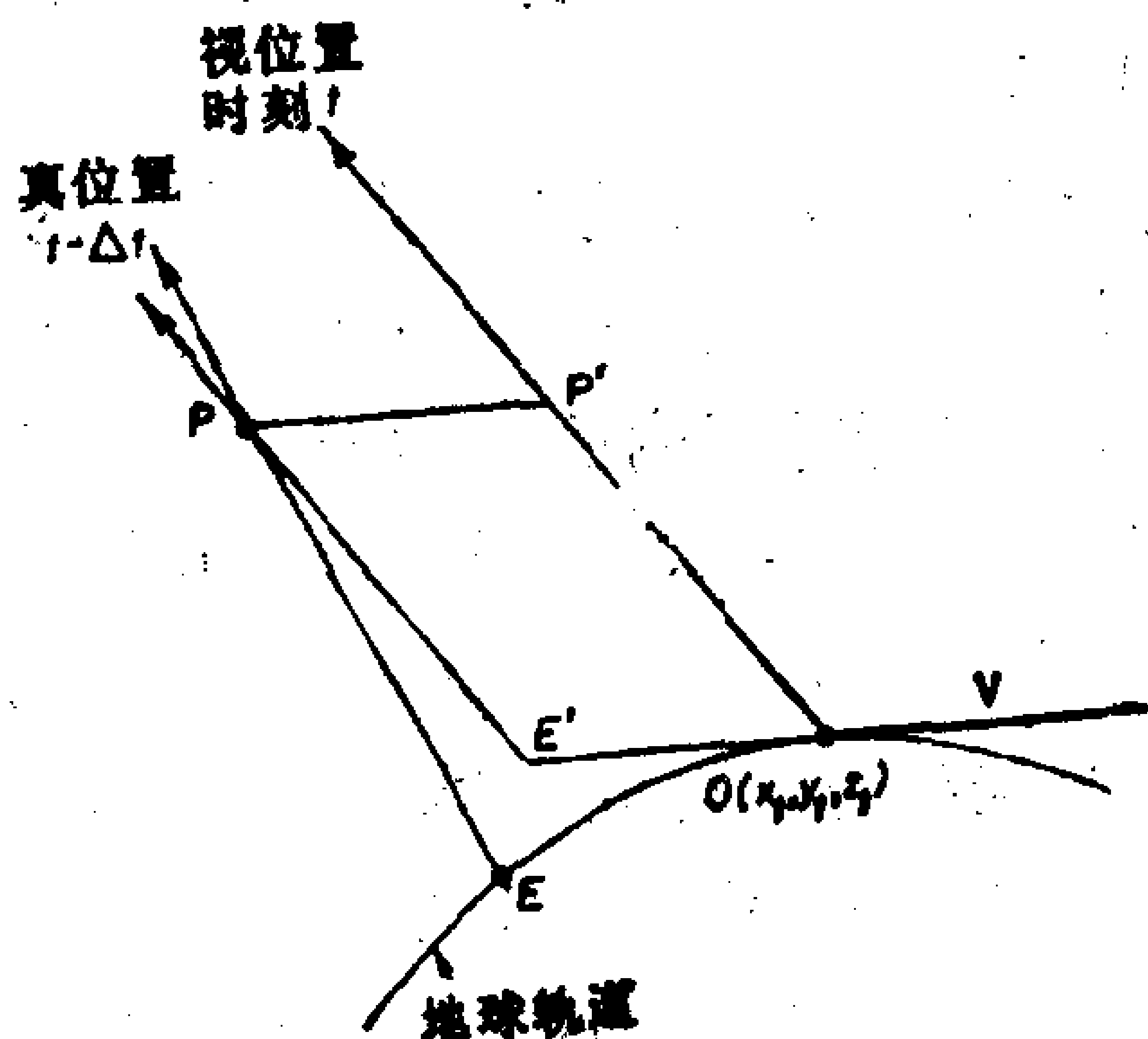


图 25　曲线运动的行星光行差

视位置的方向为 $E'P$，P 为天体在时刻 $t-\Delta t$ 的几何位置，E'为在时刻 $t-\Delta t$ 地球所在的位置，假定它在 Δt 时间中运动的速度如在时刻 t 的瞬时速度一样的话。

对速度。

当 Δt 足够长，使地球的公转运动的曲率比较明显时(图25)，由于观测时刻地球的速度V使得P呈现于OP'方向，在时刻 $t-\Delta t$ 地球到行星的几何方向 EP 不再与 OP'方向平行。对于在与 OP'平行的 $E'P$ 上，E'点位置的坐标为：

$$x_t - V_x\Delta t,\ \ y_t - V_y\Delta t,\ \ z_t - V_z\Delta t,$$

其中 $(x_t,\ y_t,\ z_t)$ 是在时刻 t 地球的位置O的坐标，而$V_x = dx/dt$，……，但在时刻 $t-\Delta t$ 地球的实际位置在E，相应的坐标为：

$$x_t - \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\ \frac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2 - \cdots\cdots,\ 等。$$

因为E偏离 E'，观测到的位置不再直接代表在 $t-\Delta t$ 时的几何位置。

略去高阶项，因为坐标差为$+\dfrac{1}{2}\ \dfrac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2$，……，为了得到 $P(t-\Delta t)$，需对位置 $P'(t)$加的改正值数值相等于位移的

负值$-\frac{1}{2}\ \frac{d^2x}{dt^2}(\Delta t)^2$，…，如果$E'$不变，这就是$P$点的位移，或者如果$O$不变，它就是$P'$的位移。(83)式右端的各项，是地心坐标的位移$-\Delta\xi$，$-\Delta\eta$，$-\Delta\zeta$产生的赤经和赤纬的变化。因为地球公转轨道曲率对$P\ (t-\Delta t)$的改正量是由位移$-\frac{1}{2}\ddot{x}(\Delta t)^2$，…造成的，对(83)式右端以$+(1/2c)d^2x/dt^2\Delta t$，…代$\Delta\xi/\rho$，…，给出在时刻$t$的视赤经和赤纬（$\alpha'$，$\delta'$）所需的改正量，以得到在$t-\Delta t$时的几何坐标。

$$\begin{aligned}\alpha-\alpha' &= \frac{1}{2c}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\sin\alpha-\frac{d^2y}{dt^2}\cos\alpha\right\}\sec\delta\Delta t,\\ \delta-\delta' &= \frac{1}{2c}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha\sin\delta+\frac{d^2y}{dt^2}\sin\alpha\sin\delta-\right.\\ &\qquad\left.\frac{d^2z}{dt^2}\cos\delta\right\}\Delta t.\end{aligned}\tag{85}$$

在从(68)式确定(85)式中的导数时，略去轨道偏心率，且使$X=a\cos\odot$，$Y=a\cos\varepsilon\sin\odot$，$Z=a\sin\varepsilon\sin\odot$，$a\odot/dt=n$，精确度是足够的。以$a$为长度单位，$(\Delta t)^s=498.38^s\rho$，则(85)式成为

$$\begin{aligned}(\alpha-\alpha')^s &= \frac{1}{15}\ \frac{(n'')^2}{2c}498.38\rho\sin 1''\{\cos\odot\sin\alpha\\ &\qquad-\cos\varepsilon\sin\odot\cos\alpha\}\sec\delta,\\ (\delta-\delta')'' &= \frac{(n'')^2}{2c}498.38\rho\sin 1''\{\cos\odot\cos\alpha\sin\delta\\ &\qquad+\sin\odot(\cos\varepsilon\sin\alpha\sin\delta-\sin\varepsilon\cos\delta)\},\end{aligned}\tag{86}$$

式中n及c的时间单位为秒，c必须以天文单位表示，系数的值为$0.00102''\rho$或$0.000068^s\rho$。

计算黄道坐标系的公式，可由令(86)式中的$\varepsilon=0$，且以(λ，β)代（α，δ）而得：

$$(\lambda-\lambda')''=+0.00102''\rho\sin(\lambda-\odot)\sec\beta,$$
$$(\beta-\beta')''=+0.00102''\rho\cos(\lambda-\odot)\sin\beta. \qquad (87)$$

土星的地心黄经改正值可达0.01″；天王星可达0.02″；海王星可达0.03″。

因为根据(86)或(87)式，从时刻 t 的视位置得到的几何位置是 $t-\Delta t$ 时的位置，在光行时间内对行星运动就不需加改正了。但如要求 t 时的几何位置，则必须加行星轨道的曲率改正，而地球运动是没有影响的。

同样，如同计算视星历表那样，要从几何位置求 t 的视位置，当光行时间较长时，可以用下列任一方法：

（a）必须把几何坐标从 t 时的值内插到以前时刻 $t-\Delta t$ 的位置，且加上 Δt 时间内地球公转曲率的改正值；或者

（b）对时刻 t 的几何坐标必须加上在该瞬间地球相对于行星的瞬时速度改正，以及加上光行时间内行星运动曲率的改正值。

在方法（a）中 Δt 时间内的行星运动是不相关的；在方法（b）中地球运动是不相关的。

应用方法（a），内插需用高次差，因为行星的运动是不均匀的。应用斯蒂林内插公式，可得到在 $t-\Delta t$ 时天球上任一坐标 φ 的相对于地球的几何位置：

$$\varphi(t-\Delta t)=\varphi(t)-\frac{\Delta t}{h}\Delta_0'+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2\Delta_0''+\cdots\cdots,$$

式中 h 为星历表中表的间隔。需要加到这个内插位置上的地球轨道曲率改正值是(86)式的负值，但在实用上可从星历表中得到。为了获得 $P'(t)$（图25），对 $P(t-\Delta t)$ 需要的改正值是空间的线性地心位移，等于 E 偏离 E' 的矢量位移，其分量为

$$\Delta\xi=+\frac{1}{2}\frac{d^2x_\oplus}{dt^2}(\Delta t)^2,\ \cdots\cdots$$

其中($dx_\oplus/dt$, ……)为地球相对于行星的速度。达到这一精度的

天球上的角位移（即对 $t-\Delta t$ 时星历表位置所要的改正）为（$\Delta\xi/\rho$, $\Delta\eta/\rho$, $\Delta\zeta/\rho$）。在 $\Delta\xi$ 的方向上，行星的地心速度为

$$-\frac{dx_{\oplus}}{dt}=\rho\frac{d\varphi_x}{dt},$$

式中 $d\varphi_x/dt$ 为在天球上相应的视角运动，因而

$$\frac{\Delta\xi}{\rho}=-\frac{1}{2}\frac{d^2\varphi_x}{dt^2}(\Delta t)^2,$$

对其它坐标方向也是类似的。由数值微分得到的任何视坐标 φ 的改正值为：

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_t(\Delta t)^2=-\frac{1}{2}\frac{\Delta_0''}{h^2}(\Delta t)^2$$

$$+\frac{1}{24}\frac{\Delta_0^{IV}}{h^2}(\Delta t)^2+\cdots\cdots,$$

对取到二阶项而言，地球轨道曲率的改正在数量上等于内插到 $t-\Delta t$ 的二次差改正，且符号相反，而从 t 时的几何位置 φ 到 t 时的视位置的完整的归算为

$$\varphi'(t)-\varphi(t)=-\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_t\Delta t+\Delta\varphi$$

$$=-\frac{\Delta_0'}{h}\Delta t-\frac{1}{6}\frac{\Delta_0'''}{h}\Delta t+\cdots+\Delta\varphi,$$

它与（a）法符合到二阶项。$\Delta\varphi$ 项是行星运动曲率的改正，剩余的部分是以前导出的对直线运动的改正值，但因为运动不是均匀的，运动的瞬时速率必须从对高次差进行数值微分而得。

太阳历表中的光行差

太阳的光行差，除了太阳相对于太阳系质心运动产生的在数量上不大的一部分外，完全是由于恒星光行差引起的。另外两个分量通常使得行星光行差变为零。可是实质上它包括了椭圆光行差，椭圆光行差造成一个幅度为 0.343″的周年周期的变化。

对太阳视位置加上恒星光行差改正，就得到观测时刻 t （而

不是仅对时刻 $t-\Delta t$）在天球上的真实几何位置。从地心观点来看，由地球的公转运动造成的太阳的周年恒星光行差，就是在时间间隔 Δt 内由太阳相对于地球的等量反向运动造成的行星光行差。观测到的位置是光线离开太阳时，太阳在天球上的几何位置。光行差位移在地球公转运动的方向上，因此与太阳周年视运动的方向相反(即在天球上向西)，实际上它是沿着黄道，位移的大小等于在光行时间中太阳黄经视运动的量。

略去太阳的黄纬，我们从(75)及(76)式得到黄经的光行差为：

$$\lambda_{视}-\lambda=-k'\{1+e\cos(\lambda_{\odot}-\Pi)\}=-k'\ \frac{1-e^2}{R}\ ,$$

式中没考虑摄动，且令 $a=1$。

在光通过一个天文单位的时间内，由地球的**平**运动造成的太阳**平黄经**的位移，等于光行差**常数**。在纽康的**太阳表**中，平太阳的赤经所采用的这个常数值为 20.50″。

月历表中的光行差

地球运动造成的月球的恒星光行差，被月球**与地球公共的日心运动**所补偿，但月球**相对于**地球的公转运动使月球从几何位置位移到视位置，其数量为相应的行星光行差的量。光行差位移的量是小的，但不能略去，它反比于距离，在黄经上的平均值约为 0.7″，它的周期变化幅度为 0.02″。

但是从布朗的“**月球运动表**”计算得到的月球历表不需加光行差改正。光行差没有明显地包含在这些表内，但显然它的主要影响都隐含在轨道根数的采用值中了。精密星表中所应当包含的其它的小周期项，从 1960 年开始已加在天文年历中了。

依照一般原理

$$\varphi'-\varphi=-\frac{d\varphi}{dt}\Delta t, \tag{88}$$

地心轨道黄经 λ 的光行差为

$$\lambda' - \lambda = -\frac{r}{c}\frac{d\lambda}{dt}$$

算到偏心率的一阶量，上式成为

$$\lambda' - \lambda = -\frac{na}{c}(1 + e\cos g)$$

其中 g 为平近点角，n 为平均运动及 a 为平均距离。在时间 Δt 内地心距离 r 的变化的一阶量为

$$r' - r = -\frac{na^2 e}{c}\sin g,$$

数值上等于轨道黄经一阶变量的值，可由平黄经的变化 $\Delta L = -na/c = -0.070''$ 及近地点黄经的变化 $\Delta w = -na/2c = -0.35''$ 所产生。平黄经的这种变化同样也会产生 r 的一阶变化的一半。可以认为布朗月历表中采用的 L 及 w 的值包含了这些量，可从中给出黄经和黄纬光行差的主要部分以及正弦视差。二阶效应可以将布朗表达式代替坐标代入(88)式中，并减去 ΔL 及 Δw 的影响● 而得。这些附加改正在黄纬及视差中可以略去，对于轨道黄经，系数值大于 $0.001''$ 的项的附加改正值为

$$+0.018''\cos(g - 2D) + 0.007''\cos 2D,$$

式中 D 为月球对太阳的平距角。

因而月球的表列矢径，不是实际的几何值，而是视值。

相对地讲月球是如此靠近地球，以致地面距小于地心距 r 的比例大到足以使地面行星光行差与地心行星光行差具有明显的差别。从 (88) 式

$$\frac{\Delta(\varphi' - \varphi)}{\varphi' - \varphi} = \frac{\Delta r}{r}$$

取地面距为 $r - \rho\cos z$，精度可足够，这里 ρ 为地球半径，z 为

●见 G.M.Clemence, J.G.Porter and D.H. Sadler, Aberration in the lunar ephemeris, Astr. Jour. 57, 46-47(1952)。

天顶距。仅取地心行星光行差的主项 $\Delta L=-0.70''$，为获得视地面黄经需在月球的视地心黄经上再加上一项：

$$-\frac{\rho\Delta L}{r}\cos z=\frac{-0.70''}{60.266}\cos z=+0.012''\cos z.$$

在把月球的观测黄经与月历表黄经比较以前，除了改正周日光行差外，必须从观测黄经值减去此值。

较差行星光行差

由于光行差取决于相对运动和距离，有时在包含两个或更多天体的情况下具有复杂的效应，例如，食、凌日和卫星系的各种现象中，而以前几个例子已表明这些效应的确定是一个复杂的问题。

在行星经过太阳圆面——凌日时，例如当观测者位于外切太阳及行星的圆锥面上，而圆锥顶点在太阳与行星之间时，发生外接触；观测者位于外切行星及太阳的圆锥上，而圆锥顶点在行星与地球之间时，发生内接触。观测到的接触时刻是行星边缘上一点**视**位置与太阳边缘上一点**视**位置具有相同位置的瞬间，即在接触瞬间T到达观测者几何位置的太阳光线，在路上与行星相切。这一光线在T以前的$T-\tau_2$时离开太阳，而在$(T-\tau_2)+\tau_1$时到达行星。外切的圆锥是由与太阳及行星相切的光线构成的。因此，在接触瞬间，位于其中一个圆锥的同一条直线上的地球和行星上的点，是时刻T地球上观测者的几何位置，和时刻$T-\tau_2+\tau_1$时行星上点的几何位置。所以，在凌日理论的公式中，在任意时刻t所有与时间有关的量值，都必须用行星在$t-(\tau_2-\tau_1)$时的几何坐标(r,l,b)以及地球在t时的几何坐标(r',l',b')来导出。

同样为了确定一天体的坐标，需要把太阳系内天体的观测位置互相作比较或与参考恒星作比较，在对观测作光行差改正时，必需按照所用的不同观测方法和比较方法● 加以特别的注意。

● 关于可能遇到的许多困难中的一例，可见 On the phenomena of Jupiters' satellites" 的论文丛刊。载于 Mon.Not.Roy.Astr.Soc.71，85-101(1910)，596-599(1911)，602-603(1911)。

在食双星系统中，由于这对食双星可能对该系统中第三颗遥远的伴星作轨道运动[●]，使它们与观测者距离发生变化而引起光行时的变化，由此也可能产生周期的视变化。

● 见 J.B.Irwin, Astr.Jour.64, 149(1959).

第七章　周日视运动

我们直接观察到的天球形象，是与观察地点的地理位置有关的，由于天体的周日运动，天球形象在迅速地变化。在任一瞬间从地球中心到天体的几何方向，以及因光行差、视差及大气折射造成的这些方向的角位移，直接决定了观测到的天体在天球上的位置。依据这些位置的坐标值，可用第三章的关系式表示天球的地方形象，这些坐标值取决于该瞬间参考圈在天球上的位置。参考圈不因视差而改变位置，与光行差及大气折射也无关，但由于岁差和章动使赤道及黄道在天球上缓慢地改变着位置，而地平系统中的圈则由于地球自转而迅速地移动。

天体的视运动，主要是由于天球的周日视运动造成的。但是，对于太阳、月球和行星来说，最明显的视运动是该天体在空间相对于地球的真实运动的结果。此外，观测到的周日运动还受到周日路径中视位置偏离几何位置的变化的影响。天体的周日视运动是下述的各个分量的总和：(a)天体的视几何旋转；(b)每个天体在天球上可能具有的自行；(c)由于大气折射、周日光行差产生的不断变化着的视位移，和邻近的天体特别是月球的地心视差，它是由于周日自转中观测者在空间的位置改变引起的。

天球的旋转

在天球作几何旋转时，固定在天球上的任一点的周日视路径，是在与自转轴正交的平面上的一个圆。在恒显圈以外，天体自升至落横过天空的周日运动，总是自东向西的，因为这两个基本点的方向就是由周日运动的方向定义的。各周日圈的公共中心在地平以上的极点处，由极点的方向和周日圈上最高点的方向确定了子午圈或南北方向。从地球表面上看，天体围绕北天极以逆时针

方向作视周日旋转运动，因此从天球上看，则是顺时针方向；而从北极上看，地球自转却是逆时针方向的。在北半球，北的方向是到地平以上天极点的方向；而在南半球，到地平以上天极点的方向则是南。在北半球，背对着地平以上的天极，天体自升到落的方向是自左到右；而在南半球，天体自升到落的方向则是自右到左。东总是在南的左方 90°；西总是在北的左方 90°。

在北半球，太阳的周日运动是顺时针方向；但在南半球则是逆时针方向。逆向风和顺向风这两个名词，在南半球上的意义就不同了。如果依据太阳的运动，在南北半球它们的意义是相反的。在南半球看到的蛾眉月的凹凸方向和在北半球上看到的正好相反。在南半球上月球出现在天空北方，东在右方；而西在左方。在上弦以前蛾眉月向西方凸出，即在南半球向左方凸出；而在北半球则向右方凸出。在北半球的天文望远镜的视场内，西在左面，南在上面；可是在南半球，则西在右面，北在上面。在刊印望远镜视场的照片及图中，往往忽略了这一说明。在北半球制造的供南半球使用的赤道式望远镜，有时会把赤径度盘的刻度方向刻错。

东和西这两个名词，来源于描述天体周日运动的方向，主要仅用于说明在天球上或地球表面上的方向，可是通常还扩展到用于描述空间的运动方向和其它天体表面的方向。天球的周日运动常被说成是自东向西的视旋转，而把地球的自转方向说成是自西向东。地球绕太阳的公转运动以及太阳系其它天体（除少数几个例外）的自转和公转都循同一方向，我们通常将这些运动称为自西向东运转。可是在空间这样的术语已没有多大意义，从参考平面的某一边去看它们的运转，用顺时针或逆时针方向去描述运动，则更为明确无误。如果从地球上去看天空中一个自转的天体，当从黄道北端看这天体是逆时针方向自转时，则看到的这天体圆面上的标志相对于天球从东边缘向西边缘运动；而在天体表面上一个向西的方向，从地球上看，它在天空中则是向东的方向。

周日圈

在恒显圈和恒隐圈之间，周日圈与地平圈相交的角 ψ 由下式给出($\psi \leqslant 90°$)，

$$\cos\psi = \pm\sin\varphi/\cos\delta,$$

式中上面的符号用于 $\varphi > 0°$，下面的符号用于 $\varphi < 0°$。在恒显圈与恒隐圈之外，该式对 ψ 无解，因为右端的因子大于1。在天赤道上，$\psi = 90° \mp \varphi$。

周日圈上任一点的高度和方位，可根据表示旋转天球上位置的坐标和观测者的地理坐标，用第三章的转换公式或由这些公式编制成的表和图来求得。已经出版了对于某些天体，特别是太阳的专门的表和图。

各坐标系之间某些重要的特殊情况，出现在周日运动的某些特殊的几何位置上，特别是在周日圈上的升、落、中天、过卯酉圈及大距的各点上。

在**几何升点或落点**，$z = 90°$，从（26）式得

$$\cos h = -\tan\varphi\tan\delta,$$

因而

$$\tan^2\frac{1}{2}h = \frac{1-\cos h}{1+\cos h} = \frac{\cos(\varphi-\delta)}{\cos(\varphi+\delta)}, \qquad (89)$$

$$2\cos^2\frac{1}{2}h = \sec\varphi\sec\delta\cos(\varphi+\delta).$$

由（28）式得自北点向东点计的方位角为

$$\cos A = \frac{\sin\delta}{\cos\varphi}; \qquad (90)$$

而自东点或西点向南计的幅角 a 则为

$$\sin a = -\frac{\sin\delta}{\cos\varphi}.$$

对于黄道上的一点，它的幅角是地平圈上黄道和赤道的截点之间的弧长 s，它可由（32）式给出。

升点或落点的时角 h，等于在周日圈上从子午圈到地平圈之间的弧长，称为**半周日弧**。对于天球上一固定点来说，它是中天到升点或落点的恒星时间隔。在升点或落点，当 $\delta>90°-\varphi$ 或 $\delta<\varphi-90°$ 时，$\cos h$ 的方程无解，只有当 $\delta=\pm(90°-\varphi)$ 时有唯一解。在其它的情况下，它有两个解，在升点有一解，落点有一解。

在天赤道上任一点的半周日弧，在任何纬度处均为 6^h，除了在纬度 $\pm90°$ 处以外。因此在任何瞬间，天球上地平的位置可由下述方法获得：首先确定赤道上东时角为 6^h，即在该瞬间上升的一点的赤经 α_0，然后建立一个通过该点及赤经为 $\alpha_0\pm6^h$，赤纬在北半球为 $\pm(90°-\varphi)$，在南半球为 $\pm(90°+\varphi)$ 的两个点的**大圆**。用关系式 $\cos h=-\tan\varphi\tan\delta$，计算对应于一系列 h 的 δ 值或对应于一系列 δ 的 h 值，就可求得所需的其它各点的位置。这些点的方位可用 $\sin A=\sin h\cos\delta$ 求得。根据计算得到的这些点或应用投影的特性进行作图画出大圆。

整个天球表面的总面积很接近于 41 253 平方度，在纬度 φ 处能够看到的天球的部分为 $F=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$。

在每一次周日循环运动中，一天体两次过子午圈，根据天球的情况，可以两次都在地平以上过子午圈，也可都在地平以下过子午圈，或一次在地平以上，另一次在地平以下过子午圈。过子午圈时，天体高度角的代数值（在地平以下为负值）较大的那次称上中天，另一次中天为下中天。拱极星上、下中天都在地平以上，下中天用符号 S.P.(Sub Polo)表示，它的意义为“极点以下”，在恒隐圈内的恒星，两次中天都在地平之下。

把恒等式 $\cos h=1-2\sin^2\frac{1}{2}h$ 代入关系式 $\cos z=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos h$ 得

$$\cos z=\cos(\varphi-\delta)-2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}h.$$

这个式子表示，在子午圈两侧相等时角时高度角也是相等的。第二项总是负值，因而在 $h=0$ 时，$\cos z$ 最大，即 z 最小，高度角最大。所以无论什么样的天球形象，上中天的时角恒为 0^h，因此 $\cos z=\cos(\varphi-\delta)$，根据不同的情况，$z$ 值为 $\varphi-\delta$ 或 $\delta-\varphi$。

用自天极以下的子午圈弧段向西计量的时角 h'，则有 $h=180°+h'$ 及

$$\cos z=\cos[180°\pm(\varphi+\delta)]+2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}h',$$

上式右端第二项总是正值，因此，当 $h'=0$ 或 $h=12^h$ 时，$\cos z$ 最小，此时 z 为最大。所以，在天球的所有情况中，下中天的时角 h 恒为 12^h，但 $z=\pm[180°\pm(\varphi+\delta)]$，依据条件分别采用"+"或"−"号。

因为南半球的纬度是以负值计量的，纬度值总是等于北天极的高度(正值或负值)，一个极点在地平上的仰角总是等于另一个极点在地平下的俯角。因而，在上中天时，天顶距的**数值**恒为 $\varphi-\delta$。若 z 从天顶向南计量为正，向北计量为负，则在南北两半球上中天时，关系式

$$z=\varphi-\delta$$

在**代数上**总是成立的。

当在**地平以上**下中天时，z 的数值小于 $90°$，因而在北半球，由于 φ 和 δ 都为正值，则有

$$z=180°-(\varphi+\delta),$$

而在南半球，φ 和 δ 都是负值，则有

$$z=180°+(\varphi+\delta).$$

当 $h=0$ 时，在子午圈上中天的各关系式是重要的基本公式，因为关系式 $z=\varphi-\delta$ 及 $\tau=\alpha$(其中 τ 为恒星时或春分点♈的时角)，提供了用观测天体过子午圈时的天顶距及记录这时的时钟

读数来确定纬度或赤纬及时刻或赤经的简便的方法。实际上，不论是天文工作或测绘和航海的实际应用中，定位观测总是尽可能在天体过子午圈时进行的。

不论在北半球或南半球，关系式

$$\varphi=\delta+z$$

在代数上总是正确的，不论天体在地平**以上或以下**也都能成立。这里假定（a）δ 自赤道的顶点(即赤道与上半部子午圈的交点)向北计量为正（即赤道自 $-180°$ 到 $+180°$）对在下中天的恒星，要过极点计量，和（b）z 自天顶向南计量为正，从 $-180°$ 到 $+180°$。

应用关系式 $\varphi=90°-H_z+D_z$，可对纬度、赤纬和子午高度之间的关系作普遍的描述，其中 H_z 指自南点量起的子午圈上的任一弧段，在地平以上为正，由 $0°$ 到 $\pm180°$；D_z 为自赤道与上半部子午圈的交点量起的子午圈上的任一弧段，向北量为正，由 $0°$ 到 $\pm180°$。在**上中天**时，如天体在**南方**，令 $H_z=$ 观测得到的高度 H_0 和 $D_z=$ 赤纬，则有

$$\varphi=90°-H_0+\delta;$$

如天体在**北方**，则令 $H_z=180°-H_0$。在**下中天**时，$D_z=180°-|\delta|$，正负号与赤纬的符号相同。

事实上，实际的观测或多或少是在严格过子午圈前后进行的，这是由仪器设计或调整仪器的微小误差所决定的。因此需要导出从子午圈附近的观测归算到子午圈上的改正值。在子午圈两侧各作若干次观测，取各次观测归算值的平均值，能得到最大的精确度。

以 z_0 表示过子午圈的天顶距，且令

$$y=2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}h,$$

得 $\cos z=\cos z_0-y$。以 z 作为 y 的函数，由马克劳林级数得

$$z(y)=z_0+(dz/dy)_0y+\frac{1}{2}(dz^2/dy^2)_0y^2+\cdots\cdots;$$

以弧秒表示的式子为

$$z = z_0 + \frac{2\sin^2\frac{1}{2}h\cos\varphi\cos\delta}{\sin 1''\sin z_0}$$

$$-\frac{2\cot z_0\sin^4\frac{1}{2}h}{\sin 1''}\left(\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin z_0}\right)^2$$

$$+\cdots\cdots,$$

如果是为了确定纬度，从最靠近子午圈中天的观测得到的 φ 的暂定值，对于右边各项的计算是足够的。

利用这个式子编制了一些便于归算的表。也可应用一些图解法来计算，例如，可将观测时刻作为横坐标，观测所得的高度角作为纵坐标，通过 n 个观测点作平滑曲线，测量 $n-2$ 个等间距的纵坐标值，根据下式即可求得过子午圈的高度角

$$a_0 = \frac{3}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n-2} a_i}{n-1},$$

因为这曲线是一条抛物线，它的面积等于底乘纵坐标的平均值，即底与最大纵坐标值乘积的 2/3。

在拱极星周日路径上，恒星离天极的方位角最东或最西的两点分别称为东或西**大距**。在每一个大距点上，周日圈与地平经圈相切，因而时圈与地平经圈正交，$q=90°$，再分别应用(27)、(29)、(26)式，略去双重符号，得

$$\cos h = \frac{\tan\varphi}{\tan\delta}, \quad \sin A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}, \quad \cos z = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}. \tag{91}$$

在任何情况下，h 和 A 的象限可以根据在子午圈以东或以西大距而明确地确定。

在**卯酉圈**上，必然有 $\delta<\varphi$，从 (26) 和 (29) 式

$$\cos h=\frac{\tan\delta}{\tan\varphi},\qquad \cos z=\frac{\sin\delta}{\sin\varphi},\qquad \sin q=\frac{\cos\varphi}{\cos\delta}.$$

(92)

当 δ 和 φ 近于相等时，对（91）式各式求平方，并对等式两边各减 1，则可得更精确的结果，令

$$k=\{\sin(\delta+\varphi)\sin(\delta-\varphi)\}^{1/2},$$

大距时的公式为

$$\sin h=k/\cos\varphi\sin\delta,\qquad \cos A=k/\cos\varphi,$$

$$\sin z=k/\sin\delta.$$

同样，在卯酉圈上的公式为

$$k'=\{\sin(\varphi+\delta)\sin(\varphi-\delta)\}^{1/2},$$

$$\sin h=k'/\sin\varphi\cos\delta,\qquad \sin z=k'/\sin\varphi,$$

$$\cos q=k'/\cos\delta.$$

将（92）式的第一式乘上落点的时角 h' 的余弦的公式，得

$$\cos h\cos h'+\tan^2\delta=0$$

由此，从 h 或 h' 可求得过卯酉圈和落点之间的间隔。

当 $\delta>\varphi$ 时，天体不能过卯酉圈，因为这时 $\cos h$ 超过 1，天体在天顶与天极之间过子午圈，而方位角在子午圈摆动的量各为 $\arcsin\{\cos\delta\sec\varphi\}$。当 $\delta<0$ 时，$\cos h<0$，则在地平以下过卯酉圈。

由（27）式，

$$\tan\varphi\cos\delta=\cot q\sin h+\sin\delta\cos h,$$

以 δ 为常量对 φ 微分得

$$(\cot q\cos h-\sin\delta\sin h)\Delta h=0,$$

这时星位角最大，当

$$\cot q=\sin\delta\tan\delta,$$

即当 $\cos A=0$，恒星在卯酉圈上。

运动的速率

将（26）式对 h 微分，解出 dz 和 dA，就得到随着天球几何

旋转的天顶距 z 的变率和自北经过东的方位角的变率：

$$\frac{dz}{dt}=-\cos\varphi\sin A\frac{dh}{dt}=\pm\cos\delta\sin q\frac{dh}{dt},$$

$$\sin z\frac{dA}{dt}=(\sin\varphi\sin z-\cos\varphi\cos z\cos A)\frac{dh}{dt}$$

$$=\pm\cos\delta\cos q\frac{dh}{dt}, \qquad (93)$$

式中 q 为星位角，dh/dt 值取决于所用的时间计量，符号的选取是使 dz/dt 在子午圈以西为正，而 dA/dt 在北半球恒为正。

在天体过子午圈时，A 为 180° 或0°，高度角达最大值或最小值，周日运动的方向沿着地平纬圈，dz/dt 为零。在大距，$q=0°$，方位角达最大值或最小值，运动的方向沿着地平经圈，dA/dt 为零。在卯酉圈和在地平圈上时，$dA/dt=\sin\varphi(dh/dt)$；在卯酉圈上高度角的变率最大。

应用在子午圈上高度变率为零，以及拱极星在大距时方位角的变率为零这两个特性，可以导出通过观测确定子午圈的两种方法。

时角的变化（对于一定的 φ 和 δ 值而言）使星位角 q 产生的变化为

$$\Delta q=\pm\cos\varphi\operatorname{cosec}z\cos A\,\Delta h.$$

星位角是地平经圈与时圈之间的夹角，因而它是周日运动的方向与地平所交的角，即周日圈与地平纬圈的交角，因为地平纬圈与地平经圈正交而周日圈与时圈正交。由（93）式：

$$\tan q=\pm dz/\sin z\,dA.$$

沿着周日圈的运动速率为

$$\frac{dz}{\sin q\,dt}=\cos\delta\frac{dh}{dt}, \qquad (94)$$

因为周日圈弧段 ds 的长度为 $\cos\delta dh$，由此直接可得上式。

由（93）第一式，时角随天顶距的变率为

$$\frac{dh}{dz} = -\sec\varphi \operatorname{cosec} A = (dh/dt)(dt/dz),$$

由此可以得到引起天顶距微小变化所需的时间的公式为

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\sec\varphi \operatorname{cosec} A}{dh/dt} \qquad (95)$$

式中 $\frac{dh}{dt} = 3609.856473^{s}$ 每平太阳时

$= 15.0410686'$ 每分钟

在子午圈以西为正，以东为负。

对于太阳来说，时角的运动由太阳在旋转天球上的向东运动引起，它的速率与每平太阳时正是 3600^{s} 的平均值相差不大，因而具有足够精确度的公式为

$$(\Delta t)^{m} = \frac{1}{15}\sec\varphi \operatorname{cosec} A(\Delta z)'.$$

从这个表达式在地平时的数值，加上日出和日落时间的改正，可以求得可见地平的俯角或其不规则性，或在地平处大气折射的变化●。在 $z=90°$ 处由 (90) 式，可得 $\sec\varphi \operatorname{cosec} A = (\cos^{2}\delta - \sin^{2}\varphi)^{-1/2} = (\cos^{2}\varphi - \sin^{2}\delta)^{-1/2}$。

对于月球，由每平太阳分钟 $dh/dt = 0.2415347°$ 的平均值，得

$$(\Delta t)^{m} = 4.14(\cos^{2}\varphi - \sin^{2}\delta)^{-1/2}(\Delta z)°.$$

视周日路径

由于天体在天球上视位置离开它们的几何投影的位移的连续变化，它们的实际视周日路径对于当天球旋转时它们的几何位置描绘出的周日圈偏离了一个变化的量。

● 例如，见1946年“美国天文年历”的补篇中“日出、日落、晨昏蒙影”的表V。

特别是，大气折射随时角的正常变化，对于每一个天体的周日视运动，除了由于大气扰动引起的不规则暂时起伏外，还造成了有规则的系统变化。这种效应可达比较大的数量，对于长时间曝光的拍照，尤其是在大时角时特别重要。

同样，地心视差使周日轨迹产生系统的变形，对于月球这一效应很大。此外，对不同的天体这种影响并不相同。例如月球相对于地平的周日轨迹的实际形式与恒星完全不同。因而，月球在周日环行中于恒星间的视运动，并不完全是由于月球在天球上的自行引起的。

周日光行差也影响周日视运动，但周年光行差与观测者随地球的自转运动无关，因而对天体在周日环行中的视位置没有影响，仅仅是使旋转天球上本身的视位置发生变化，并且对周日轨迹上每一点的视位置影响相同。同样，行星光行差对周日视运动也没有影响，例如，太阳的周日视运动是由于地球自转造成的，而不是太阳的实际运动造成的，因此在旋转天球上太阳的视位置实际中天，是在我们看见太阳在子午圈上的那个瞬间发生的。

大气折射对周日视运动的影响

因为观测到的天体位置的高度角，比它在天球上的几何位置的高度角要大，所以当恒星的几何位置在地平正下方与地平相差地平大气折射 R_0 时，它出现在地平上。因而，与天球上天体实际位置在周日旋转中穿过地平圈相比，天体提前上升，延迟下落。它们从上升到下落经过天空的视轨迹与天球的几何旋转描绘出的周日圈不同。

大气折射使上升提前及下落延迟的量，等于在天球上两个几何位置之间的时角差所相应的时刻差，一个是在地平上的位置，一个是在地平以下高度差为 R_0 的位置。将 $\sin A=\cos\delta\sin h_0$ 代入（95）式，得

$$dh=R_0/\cos\varphi\cos\delta\sin h_0, \qquad (96)$$

式中 h_0 为天体在升点或落点的时角。通常正常地平折射的数值

取为 $R_0 = 34' = 136^s$。

升点和落点的位置在北半球向北移动，南半球向南移动，将（28）式的第一式对 z 微分并令 $z=90°$，得相应的移动量为

$$dA = \frac{\tan\varphi}{\sin A} R_0 \tag{97}$$

由于沿周日轨迹折射的变化，时角的视运动速率与天球的几何旋转速率不同。令 $h = (\tau - \alpha) + \Delta h$，其中 Δh 为折射使观测到的时角与几何值 $\tau - \alpha$ 的差值，因此有

$$\frac{dh}{d\tau} = 1 + \frac{d(\Delta h)}{d\tau},$$

根据赤经大气折射的公式(56)，仅取天顶距大气折射公式的第一项，得

$$\begin{aligned}\Delta h &= \pm(k\ \tan z)\sec\delta\sin q\\ &= -k\frac{\cos\varphi}{\cos\delta}\ \frac{\sin h}{\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos h},\end{aligned} \tag{98}$$

其中 q 为星位角和 k 为大气折射常数。因此除了很近地平以外，有

$$\frac{d(\Delta h)}{d\tau} = -k\frac{\cos\varphi}{\cos\delta}\ \frac{\cos\varphi\cos\delta + \sin\varphi\sin\delta\cos h}{[\sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos h]^2}.$$

令 $\sin\varphi = \cos m$ 和 $\cos\varphi\cos h = \sin m$，得

$$\begin{aligned}dh/d\tau = 1 - \frac{1}{2}k\sin 2m\{\tan\delta + \cot\varphi\sec h\}\\ \times\operatorname{cosec}^2(\delta + m),\end{aligned}$$

其中 $$\tan m = \cot\varphi\cos h.$$

即大气折射减少了时角的变化速率，其值为右边的第二项。以 $k = 60.3''$ 代入，系数的值为 $\frac{1}{2} \times 60.3\sin 1'' \times 3600 \times 1.003$

$=0.54^s/h$。对于赤道星，减少的速率约为每天 $26^s \sec^2 h$，即使在近子午圈时这种情况也是重要的。

由于 $\sin h$ 的正负根据 $h \leqslant 12^h$ 而定，根据（98）式自子午圈开始向东或向西计量一直到 180° 的时角数值，总是被大气折射所减少，在子午圈上这个减少量为零。在上中天两侧的一定间距内，天体运动的速率由于大气折射而减低，在中天前，周日轨迹中视位置超前几何位置的量逐渐减少，而在上中天后，视位置落后几何位置的量则逐渐增加。在下中天时，情况正好相反。

大气折射效应使近地平的周日轨迹产生明显的曲率变化。

同样，以 $\Delta\delta$ 表示大气折射引起赤纬几何值 δ_0 的变化量，且令

$$\delta=\delta_0+\Delta\delta=\delta_0-\cos q\Delta z=\delta_0+(k\tan z)\cos q$$

$$=\delta_0+k\frac{\cos\delta\sin\varphi-\sin\delta\cos\varphi\cos h}{\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\cos h},$$

则在周日环行中，由于大气折射造成的赤纬的视变化为

$$\frac{d\delta}{d\tau}=+k\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sin h}{[\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\cos h]^2} \tag{99}$$

$$=+k\cot\varphi\sin h\,\mathrm{cosec}^2(\delta+m)\cos^2 m,$$

取 $k=60.3''$，则系数为

$$60.3\sin 1''\times15\times3600\times1.003=16.3''/\text{小时}$$

在北半球 $\cot\varphi$ 为正值，使子午圈以西的视赤纬增加，子午圈以东则减少。

大气折射不影响天极的位置，但在天极位置处，大气折射的一阶量为 $k\cot\varphi$，因此天球上在天极以上这一距离处的点位可以当作**视天极** P'。对于 P' 而言，根据天文三角形的微分关系可得到天体视位置的时角 h'，

$$h'-h=\Delta\varphi\sin h\tan\delta+\Delta z\frac{\sin h\cos\varphi}{\sin z\cos\delta},$$

令 $\Delta\varphi=+k\cot\varphi$，$\Delta z=-k\tan z$，对于 $\varphi>0$，有

$$h'-h=+k\left\{\cot\varphi\tan\delta-\frac{\cos\varphi}{\cos z\cos\delta}\right\}\sin h$$

$$=-k\sin h\cot\varphi\tan z\cos q.$$

则

$$\frac{d(h'-h)}{dt}=+k\cot\varphi\left\{\tan\delta-\frac{\sin\varphi}{\cos z\cos\delta}\right\}\cos h\frac{dh}{dt}$$

$$-k\frac{\cos\varphi\sin z}{\cos^2 z\cos\delta}\sin h\frac{dz}{dt}$$

$$=-k\left\{\cot\varphi\cos h\tan z\cos q+\cos^2\varphi\sin^2 h\sec^2 z\right\}\frac{dh}{dt}.$$

在上中天时，$h=0$，$\delta=\varphi-z$，及

$$\frac{dh'}{dt}=\{1-k\cot\varphi\tan z\}\frac{dh}{dt},$$

如果把赤道式望远镜的极轴调整到指向视天极，并把转仪钟调到这一速率，则望远镜将能跟踪到子午圈附近的恒星。

地心视差对周日视运动的影响

根据赤经和赤纬的视差公式(43)，视差随时角的变化为

$$\Delta(\alpha-\alpha')=H\cos\varphi'\cos h\sec\delta\Delta h,$$

$$\Delta(\delta-\delta')=H\cos\varphi'\sin h\sin\delta\Delta h, \qquad (100)$$

式中H为地平视差，φ'为地心纬度，α为地心赤经，而

$$(\alpha-\alpha')=(\tau-h)-(\tau-h')$$

$$=-(h-h').$$

移动量$\alpha-\alpha'$的符号与$\sin h$相同，即在子午圈以西为正，以东为负。因而，在子午圈以西$\alpha'<\alpha$，以东$\alpha'>\alpha$，但因为时角总是自子午圈向西计量取为正值，所以反过来说，由于视差的影响，在子午圈以西时角是增加的，在子午圈以东是减少的，因此不论在子午圈以东或以西，离开子午圈的角距离在数值上都是增加的，这与大气折射的效应正好相反。

因为$H=(\rho/r)8.80''\sin1''$，其中ρ以地球的赤道半径为单

位，$\Delta h = 3609.86^s$ 每平太阳时，视差随时角的变化为

$$3.69^s \frac{\rho}{r} \cos\varphi' \sec\delta \cos h \quad \text{每天的赤经变化，}$$

$$2.3'' \frac{\rho}{r} \cos\varphi' \sin\delta \sin h \quad \text{每小时的赤纬变化，}$$

式中系数$3.69^s = 3609.86^s \times 24 \times 8.80'' \sin 1''$，而系数 $2.3''$ 为每小时的量。

不考虑地球的扁率，在纬度 φ 处，赤纬方向的视差位移一阶量为

$$\delta' - \delta = -\pi[\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\rho \cos h],$$

式中 δ 为地心赤纬。该式表示在天文三角形(图26)中极距的增量 $\Delta\delta$，它是由天顶距的增量 $\Delta z = +\pi \sin z$ 派生的，而方位角则不改变。天极 P 的天顶距 $90° - \varphi$ 也不变，而根据全微分公式，得

$$\Delta\delta = -\cos q \, \Delta z + \sin h \cos\varphi \Delta A + \cos h \Delta\varphi, \quad \varphi > 0$$

式中 q 为星位角，把 Δz 和 ΔA的视差位移代入，得

$$\Delta\delta_1 = -\pi[\sin\varphi \cos\delta - \cos\varphi \sin\delta \cos h] + \cos h \, \Delta\varphi$$
$$= (\delta' - \delta) + \cos h \; \Delta\varphi,$$

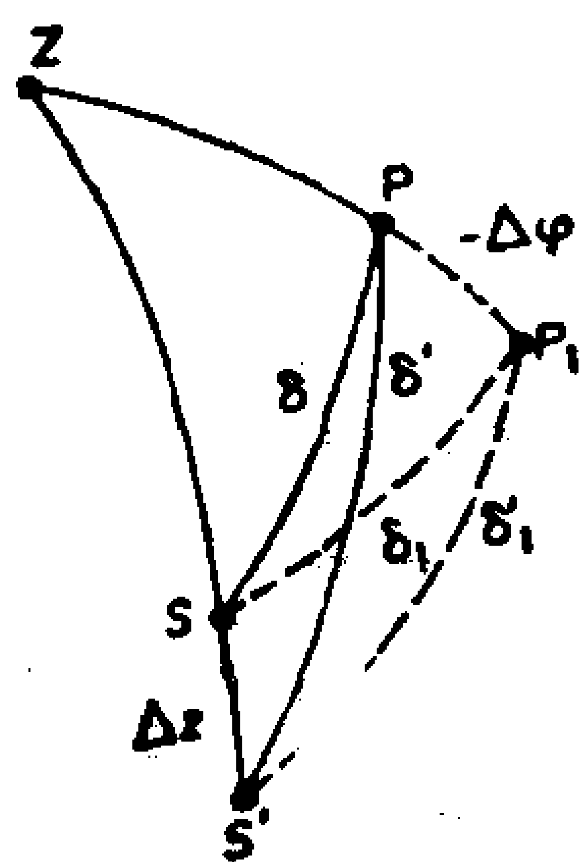


图 26　天文三角形

然后令 $\Delta\varphi = -\pi \cos\varphi \sin\delta$，以消除 h 的各项，这样就确定了在极点下面不变的距离 $\pi \cos\varphi \sin\delta$ 处的 P_1点，从这一点到周日轨迹上所有点的距离为常量 $90° - \delta + \pi \sin\varphi \cos\delta$。这就是说，在这些表达式的精度范围内，视差使周日轨迹的位置发生了变化，从中心为天极，半径为$90° - \delta$的小圆，变到了中心右天极以下距离为 $\pi \cos\varphi \sin\delta$ 处，半径为 $90° - \delta + \pi \sin\varphi \cos\delta$ 的小圆。

移动天体的周日视运动

对于除了由于天球旋转造成的视运动以外，还具有在天球上

的实际运动的一个天体，为了确定其周日视运动，需要该天体的星历表，一般来说要用逐次趋近法来精确计算一些天象，如升、落、中天的时刻，为此必需知道天体在需要确定它的位置的时刻的坐标值。对于迅速移动的邻近天体，如月球，计算这些天象是很复杂的事。

天体在天球上的移动，是由它们地心坐标的导数 $d\alpha/dt$，$d\delta/dt$ 表示的，可以星历表中 α 和 δ 的表差得到所要求的任何精度的值。

由天文三角形的全微分公式，可求得天体在方位角和天顶距上的运动速率为

$$\sin z \frac{dA}{dh} = \pm \cos q \cos \delta + \frac{\cos \varphi \sin h}{\sin z} \frac{d\delta}{dh},$$

$$\frac{dz}{dh} = -\cos \varphi \sin A \mp \cos q \frac{d\delta}{dh},$$

式中上边符号适用于北半球，A 由北向东计量到 360°，这对南北半球都是一样的，以及 $dh = d\tau - d\alpha = 3609.86^s - \Delta\alpha$ 每平太阳时。

若不考虑 $d\delta/dh$ 的平方项，相应的周日运动方向与地平的交角的正切为

$$\frac{dz}{\sin z dA} = \pm \tan q - \sec^2 q \sec \delta \frac{d\delta}{dh},$$

上面的符号用于 $h < 12^h$（北半球）和 $h > 12^h$（南半球）。第二项是由于赤纬运动引起 $\tan q$ 的变化，因而 q 的变化为

$$-\sec \delta (d\delta/dh) = -0.26 \sec \delta \Delta \delta,$$

式中 $\Delta\delta$ 为每小时的弧秒数，系数 $0.26 = 15 \times 3600 \times \sin 1''$。

因此，一个天体过子午圈时，只有当它的赤纬不变时才能达到最大高度。中天这个名词，通常用作过子午圈的同义词，同时还扩展到表示过周日子午圈的上、下中天。然而严格地说，中天是天体经过周日轨迹中最大高度的那点，而一个赤纬移动的天体

在过子午圈时，一般来说并不能精确地达到它的高度的最大值或最低代数值。对于一个赤纬逐渐增加的天体，在北半球上中天发生在过子午圈以后。由 dz/dh 的方程式，当时角 Δh 满足下列关系时，高度的移动为零

$$\sin\Delta h=(\tan\varphi-\tan\delta\cos\Delta h)\frac{d\delta}{dh},\quad \varphi>0$$

或当 Δh 为小量时，

$$(\Delta h)^{s}=\frac{(\Delta\delta)''}{15\times1296000\sin1''}(\tan\varphi-\tan\delta),$$

式中 $\Delta\delta$ 为在该瞬间赤纬的每日变量。对太阳来说，在两分点时，Δh 的值约为 $\pm15^{s}\tan\varphi$。在足够高的纬度处，太阳可以在任一方位中天，甚至在北极附近的小范围内可在正北中天。

赤纬的移动使升点和落点的方位变化的值，可用天文三角形中 $d\delta$ 的微分表达式求得，令 $dz=d\varphi=0$ 和 $z=90°$，有

$$\begin{aligned}dA&=d\delta/\cos\varphi\sin h\\&=d\delta/\pm\cos\varphi(1-\tan^2\varphi\tan^2\delta)^{1/2},\end{aligned}$$

当赤纬增加时，它指向北方。同样，由 dh 的微分表达式，相应在升点或落点的时角变化为

$$dh=\pm\frac{\cos\varphi}{\cos\delta}dA\qquad\begin{matrix}\varphi<0, & -\\ \varphi>0, & +\end{matrix}$$

$$=\frac{\sin\varphi}{\cos^2\delta}dA.$$

例如，太阳在升点和落点的方位的日变化为 $15\,\Delta t\cos^2\delta\operatorname{cosec}\varphi$ 弧分，其中 Δt 为以时分表示的升、落时的时间变化。

如不考虑二阶项效应，视周日轨迹倾角的实际移动的效应可以加到折射和视差效应上去。令

$$z'=z-k\tan z+\pi\sin z,$$

式中 z 为地心几何天顶距值，k 为大气折射系数，以及 π 为地平视差，因此有

$$\frac{dz'}{\sin z'dA}=\frac{dz}{\sin z\,dA}\quad\frac{1-k\sec^2 z\sin 1''+\pi\cos z\sin 1''}{1-k\sin 1''+\pi\cos z\sin 1''}$$

$$=\pm\tan q[1-k\tan^2 z\sin 1''],$$

式中 q 为地心几何倾角值，对一阶项而言，视差没有影响。因此，加到由大气折射和视差引起的 q 上，得 $-k\sin q\cos q\tan^2 z$，再加上天球上的移动效应，得

$$q'=q-k\sin q\cos q\tan^2 z-\sec\delta(d\delta/dh),$$

精确到一阶项的视周日轨迹的移动速率为

$$\frac{dz'}{\sin q'dh}=\cos\delta\{1-k(\sec^2 z-\cos^2 q\tan^2 z)+\pi\cos z\},$$

对一阶精度而言，将不受赤纬改变的影响。

因为恒星没有明显的地心视差，太阳、月球和行星在周日运动中由于视差变化引起的赤经和赤纬变化的总量，产生了一个相对于恒星的视运动，它直接与地心运动 $d\alpha/dt$，$d\delta/dt$ 合并在一起。到一阶项的式子为

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{测}=\frac{d}{dt}[(\alpha_{测}-\alpha)+\alpha]$$

$$=\frac{d\alpha}{dt}-\sin\pi\cos\varphi'\sec\delta\cos h\frac{dh}{dt},$$

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)_{测}=\frac{d\delta}{dt}-\sin\pi\cos\varphi'\sin\delta\sin h\frac{dh}{dt},$$

在恒星中运动的视轨迹与赤纬圈的交角 J 由下式给出，

$$\tan J=-\frac{d\delta_{测}}{(\cos\delta\,d\alpha)_{测}}$$

$$=-\frac{(d\delta/dt)_{测}}{(\cos\delta\,d\alpha/dt)_{测}}$$

$$=+\frac{(\Delta\delta)''-(15\sin 1''\cos\varphi')\pi''\sin\delta\sin h(\Delta h)^s}{15\cos\delta(\Delta\alpha)^s-(15\sin 1''\cos\varphi')\pi''\cos h(\Delta h)^s}$$

式中 $\Delta h=3609.86^s-\Delta\alpha^s$，$\Delta\delta$ 和 $\Delta\alpha$ 为地心坐标的每时变量。自

北向东量测的移动方向的位置角为 $90°-J$，在地球表面上的观测者看来它是逆时针方向移动的。

这个表达式也可以由白塞耳食掩原理的公式直接得到。取地球中心为原点，从地球中心到天球上的一点 (α, δ) 为正 Z 轴（图 27），通过地球中心与 Z 轴正交的平面为基本平面，这基本平面与赤道平面的交线为 X 轴，向东为正，以及正 Y 轴指向北，由此可以定义一个直角坐标系。当月球靠近 (α, δ) 点，在该点运动方向的位置角 $90°-J$，利用月球坐标 x 和 y 的变率 x' 和 y' 及相应的观测者坐标的变率 ξ' 和 η' 可求得该点运动方向的位置角 $90°-J$ 为

$$\tan(90°-J)=\frac{x'-\xi'}{y'-\eta'},$$

图 27　移动天体的周日运动

式中 $\sin(90°-J)$ 与分子的符号相同，$dh/dt=(0.26252-$

$\Delta\alpha_{☽}$)弧度/小时，及

$$x' = (1/\pi_{☽})''15\cos\delta_{☽}(\Delta\alpha_{☽})'',$$
$$y' = (1/\pi_{☽})''(\Delta\delta_{☽})'',$$
$$\xi' = \rho\cos\varphi'\cos h(dh/dt),$$
$$\eta' = \rho\cos\varphi'\sin\delta\sin h(dh/dt).$$

月球的大视差和迅速运动能产生显著的效应。月球地心轨迹的赤纬倾角 J_0 在天赤道上最大，约为 28°，因而地心运动为 $d\alpha/dt = n\cos J_0$，$d\delta/dt = n\sin J_0$，其中 n 为轨道黄经的运动速率，平均约为 0.55°/小时，$\tan J_0 = (d\delta/dt)/(d\alpha/dt)$。在这些条件下，当月球在华盛顿子午圈上时，取 $\pi = 1°$ 及 $dh/dt = 14.3°$/小时，J 角约为 41.5°，由于视差而比地心值大13.5°。

在极端条件下，甚至太阳的很小的视差值都能造成明显的效应。例如，在地球的南、北极，该处天赤道与地平重合，由于地平视差使在地平上的太阳下降，延迟了上升及提前了下落的时间，这是太阳在黄道上移动 8.80″ cosec ε 弧段所需的时间，按每天的平均速率 3548″ 来计，需要 3.6^m cosec ε。因而太阳停留在地平下的时间总计增加约 7^mcosec ε 或 18分钟。

时角的视运动

天体时角的运动特别重要，因为这是实用上测量时间的基础，也因为当需要研究单个天体时，这几乎是要求天文仪器跟踪的全部运动量。

确定天体在周日运动中升或落、中天或到达其它特定位置的时刻，首先要计算出现这些天象时天体的时角，其次再确定达到相应时角的时刻。这样的时角就是在周日轨迹中的几何时角，它与视时角不同，因为时角的视运动与天球自转引起的时角的几何运动不是相同的。例如，天体的视升或视落的关系式为

$$\cos h = -\tan\varphi\tan\delta + \sec\varphi\sec\delta\cos z,$$

对于恒星而言，δ 为恒星的视赤纬，z 为视位置的几何天顶距，$z = 90° +$ (地平处的大气折射)，因而 h 不是升点或落点的视时

角。对于太阳或月球来说，δ 是圆面中心的视地心赤纬，$z=90°+$ 大气折射＋半径－视差，虽然对于太阳的情况，其视差可以不加考虑。对一个特定天体，确定它到达时角 h 的时刻，取决于该天体时角的几何周日运动与用来定义时间标准的天体的周日运动之间的关系。

对于太阳来说，它的时角可以直接量度视太阳时，应用时差关系，可以把视太阳时和平太阳时互相转换。时差可以理解为平太阳和真太阳的赤经圈在天赤道上所夹的弧段或理解为真太阳过子午圈的时刻。同样，月球和行星过子午圈的时刻可以看作是由月球和行星的时角的周日运动定义的月球时和行星时的时差，因为这些过子午圈的时刻同样是平太阳与月球和行星的赤经圈在天赤道上所夹的弧段。月球和行星的时差已作为某些航海历书的基础，也是求到达某一给定时角的平太阳时 t 的一种有效方法。求在任一经度地方的中天时刻 t_m，可以由刊在天文年历中的格林尼治中天时刻用内插得到，当时角为 h 时，

$$t=t_m+h$$

式中应用表载的 t_m 差数把 t 内插到 h 值。

平时也可由恒星时的转换而得，由下列关系式直接得到

$$\tau=h+\alpha$$

因为在计算时角时要应用天体的坐标，对于移动的天体需要应用逐次近似法。例如上升或下落的近似时刻，可以由过子午圈中天时刻和根据中天时的赤纬计算的半周日弧段的等量时间来求得。由内插到这个近似时刻的赤纬算得的时角是第二次近似值。

因为在旋转天球上太阳在黄经方向上连续向东移动，它的时角的运动速率比春分点的周日运动慢，太阳连续两次过子午圈之间的时间间隔比春分点的相应量要长些。又因为黄赤交角这个差值在一年中不同，而在太阳黄经移动一整周时，太阳过子午圈的次数正好比春分点过子午圈的次数少一次。因此在一回归年中视太阳日数比恒星日数少一天，太阳日与恒星日日长的平均比率为

366.2422/365.2422＝1.00273791。太阳日与恒星日每天差的平均值为 $0.00273791^d = 3^m56.56^s$，这是以春分点的平均周日运动计量的时刻比平太阳的周日运动计量的时刻在每一天中快的时间。有时被认为是由于春分点的加速或固定恒星的加速造成的。

对于任一个沿着或靠近黄道的天体，这些周日现象在时刻上的延迟或提前，可以直接用黄道系与地平系的关系来表示。例如，在日出或日落时，如不考虑太阳的黄纬，有

$$\sin\tau\cos\varepsilon+\cos\tau\cot\lambda+\sin\varepsilon\tan\varphi=0,$$

其中 τ 为恒星时，利用微分这一关系式，以黄道对地平的倾角 B' 和幅角 ζ 表示的每天**恒星时**的延迟为

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= +\frac{\operatorname{cosec}\lambda\cos\tau}{\sin\lambda\cos\varepsilon\cos\tau-\sin\tau\cos\lambda}\Delta\lambda\\ &= -\sec\zeta\operatorname{cosec}\lambda\cos\tau\,\Delta\lambda\\ &= +\sec\zeta\sin B'\sec\varphi\,\Delta\lambda,\end{aligned}$$

式中 $\sin B' = -\cos\tau\cos\varphi/\sin\lambda$ 及 $\sin\zeta=\sin\delta/\cos\varphi$。这是仅仅因天体的运动引起的延迟的直接度量，用平时度量，延迟值要小于 3.9^m。

为了用目视或照相方法在相当长的时间中对天体作精确观测，需要设计出把星象保持在仪器视场内或固定在照相底片上的方法。

抵消时角视运动的经典方法是应用转仪钟带动的赤道式望远镜，使仪器绕着平行于地球自转轴的一根轴线旋转，旋转的速率等于地球的自转速率而方向相反，在以这种速率跟踪对某一特殊天体进行观测时，如果需要的话还需改正时角视运动与平均速率的偏离量。对于天体的其它视运动则用手来调节望远镜进行跟踪。作照相观测，特别是观测移动的天体时，除望远镜的驱动外，还用马达驱动的底片盒，或以驱动底片盒代替驱动望远镜，以做到完全跟踪天体的视运动，只有不规则宁静度的影响不能跟踪。

当底片以匀速沿直线轨迹移动时，经过时间 t 后，相对于天球真实几何运动的位置误差，根据(93)式（t 以时分表示），有

$$E=\frac{1}{2}t^2\left\{\left(\frac{d^2z}{dh^2}\right)^2+\left[\frac{d}{dh}\left(\frac{\sin z\,dA}{dh}\right)\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}t^2\frac{\cos\varphi\cos\delta\cos A}{\sin z}(15\times60'')^2\sin1''$$

$$=(1.96''\cos\varphi\cos\delta\,\mathrm{cosec}\,z\cos A)t^2.$$

从测量照相底片来精确确定相对位置，需要考虑大气折射、光行差和视差对不同天体较差效应。当这些效应大到足以产生明显的不同的周日运动时，或当不同的天体在天球上具有很大的不同的实际运动时，就会面临如何设法同时抵销所有天体的视运动这样一个难题。特别是月球相对于众恒星的迅速而复杂的视运动以及月球圆面的很大亮度和直径，阻碍了使用照相方法确定月球位置，直到 1952 年马可维茨● 发明了精巧的特殊的月球双速照相仪才解决了这个问题。

对于要求望远镜是固定位置的那种天文观测，需用一个辅助仪器把光线导入不能转动的望远镜中。通常应用的是定天镜，它包括一个平面镜，这平面镜能绕平行于地轴方向的直径旋转(图 28)。镜面法线与天球相交于 M 点，该点恒在天赤道上。根据反射定律，由天体 S 射到平面镜的光线与法线的交角为 i，以相等的反射角射出，反射光线位于入射光线和法线的平面内，因此 S，M 和反射光线射向的 T 点都位于同一个大圆上，$SM=MT=i$，而 T 点离赤道的距离等于 S 点离赤道的距离。为了使反射光线的方向不变，必要和充分的条件是使法线对镜面不断保持与固定方向和入射光线的角平分线相平行。用 h_M 表示 M 的时角，H 表示 T 的时角，得 $h_M-h=H-h_M$ 或 $h_M=\frac{1}{2}(h+H)$，需

● 见 W. Markowitz, Astr. Jour. 59, 69-73(1954).

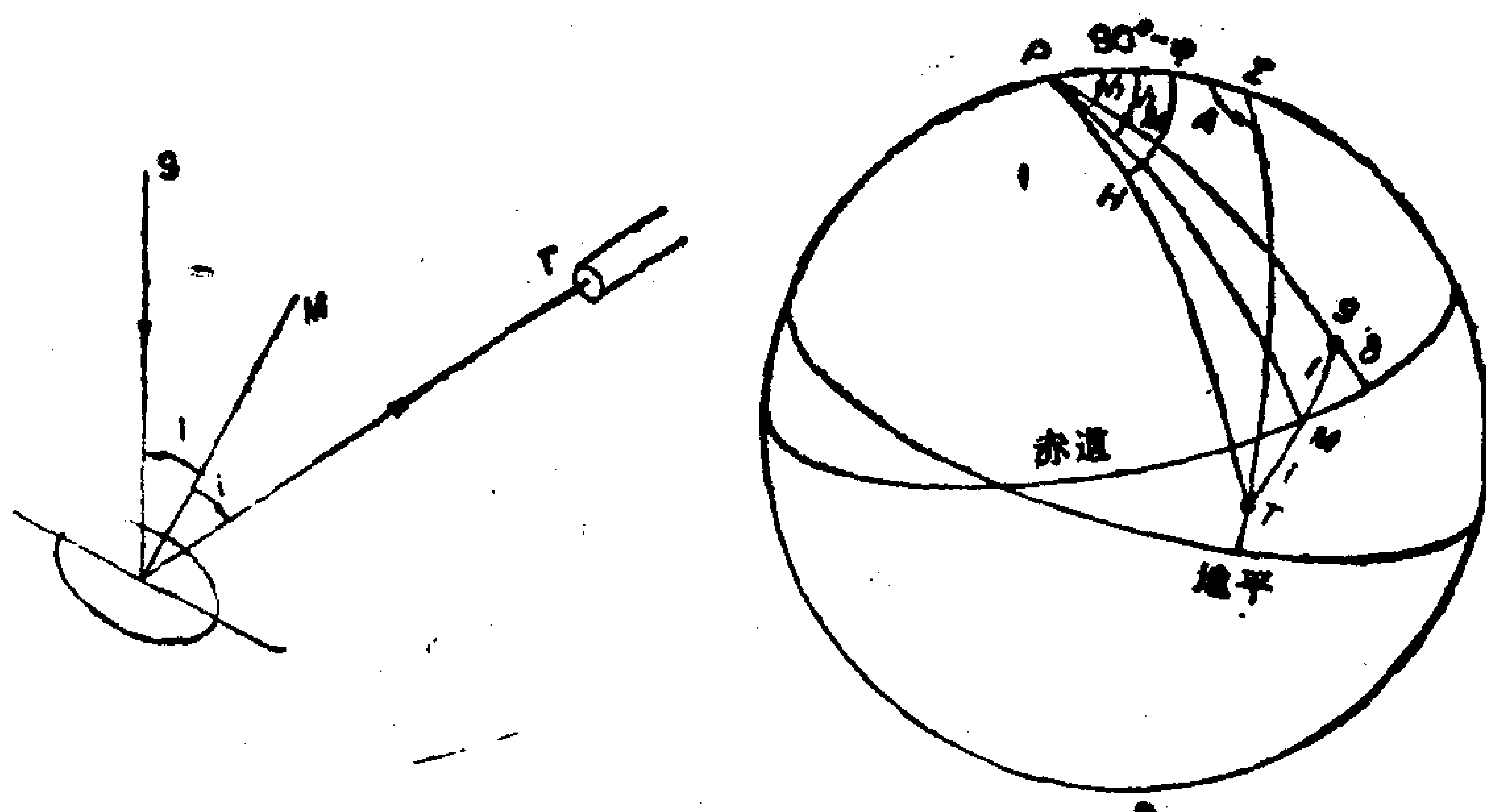


图 28 定天镜原理

要满足H=常量的条件，为此$dh_M/dt=\frac{1}{2}dh/dt$，即平面镜旋转的速率必需等于所观测的天体的周日运动角速率的一半。

固定的望远镜安置的位置，以T的方位角A和天顶距z表示。观测一个赤纬为δ的天体，T的坐标必需满足关系式$-\sin\delta=\sin\varphi\cos z+\cos\varphi\sin z\cos A$。例如，若需要把望远镜水平安置，则$z=90°$，$A$可由$\cos A=-\sin\delta\sec\varphi$，$\delta+\varphi\leqslant 90°$来求得。一般来说需使$i$角保持相当小，以使$\cos i$>(物镜直径/平面镜直径)，这是物镜为反射光束所照射的条件。

为了特殊要求或使用方便，还经常附加副镜和其它设备。如果仪器设计得使反射光束导向地平南面的弧段，就称为定星镜，如果导向地平北面的弧段，就称为定日镜。

太阳阴影的周日运动

在白天太阳阴影的方向和长度的变化是太阳时角和高度运动的图解描述，尤其是竖杆的阴影。在任何时刻，观测阴影就能得到太阳的时角和高度。这个原理很早就用于以日晷来测定实用的时刻以及用日圭进行许多天文观测，这是古代的主要天文仪器之

一，现在的天文学家偶尔被邀请在法律案件中，应用照片上拍摄的阴影来确定拍摄照片的时刻。

竖杆投射在地平面上的阴影，从杆的底端延伸到从太阳过杆顶的直线与地平面的交点为止。如果不考虑大气折射、视差、半径和太阳在天球上的运动，那末在每次太阳的周日运动中，这条线产生一个以杆顶为中心，绕着平行于地轴的一根轴旋转而成的圆锥。这个圆锥的一叶与天球相交于太阳的周日圈，另一叶与地平面的交线就是阴影端点的轨迹。

圆锥的锥面与轴的交角为 $90^\circ-\delta_\odot$，而这轴与地平面的交角等于该地的纬度 φ。因此，在纬度小于 $90^\circ-\delta_\odot$ 的地方，太阳周日轨迹的一部分在地平面以下，阴影轨迹为一双曲线。在纬度 $90^\circ-\delta_\odot$ 地方，子夜太阳在地平上，轨迹为一抛物线。而在纬度大于 $90^\circ-\delta_\odot$ 地方，太阳的整个周日轨迹全在地平面以上，轨迹为一椭圆。

在热带和温带，当北半球春季和夏季时，太阳轨迹是凹向北方的双曲线，在二分点时，轨迹是一条直线，而在北半球上整个秋季和冬季中，这双曲线凹向南方。在寒带，在一天中太阳仅有一部分时间在地平以上的那些日子里，轨迹是双曲线。在极点地方，太阳阴影的轨迹，是椭圆轨迹的特殊情况——圆，它的半径在二分点时为无穷大逐渐减小到在二至点时的最小，然后到下一个分点时又逐渐增加到无穷大。

竖直的圭表，不适宜应用它的时角盘上的太阳阴影来读出视太阳时，因为经竖杆投向空间的阴影，同时取决于太阳赤纬和时角。因而在日晷上，影杆不是竖直的，而是指向地平以上的天极点，与地平的交角等于纬度，因此平行于地轴。从日晷投射出的阴影方向仅依赖于太阳时角，因而对于某一时角来说，阴影总是落在盘面上的同一地方，即在日晷刻度盘某一固定的位置上。在一个盘面与影杆正交的日晷上，盘面平行于赤道平面，它的阴影实际上是围绕影杆均匀移动的，每小时的刻线均匀地每 15° 一根分布在盘

面上。如果盘面是按其它位置安放的，盘面极点D的北极距为ρ，西时角为k(图29)，则刻度盘平面与天球的交线是一个大圆ST，ST上任一点离D点都为90°。S点位于这个圆与通过D和天极P的大圆的交点，称为**晷针下点**，弧段$SP=90°-\rho$称为**晷针高度。**对于太阳的西时角h，小时线在盘面上的位置用$SH=\theta$表示，这是从球面三角形PDT应用下式求得的，

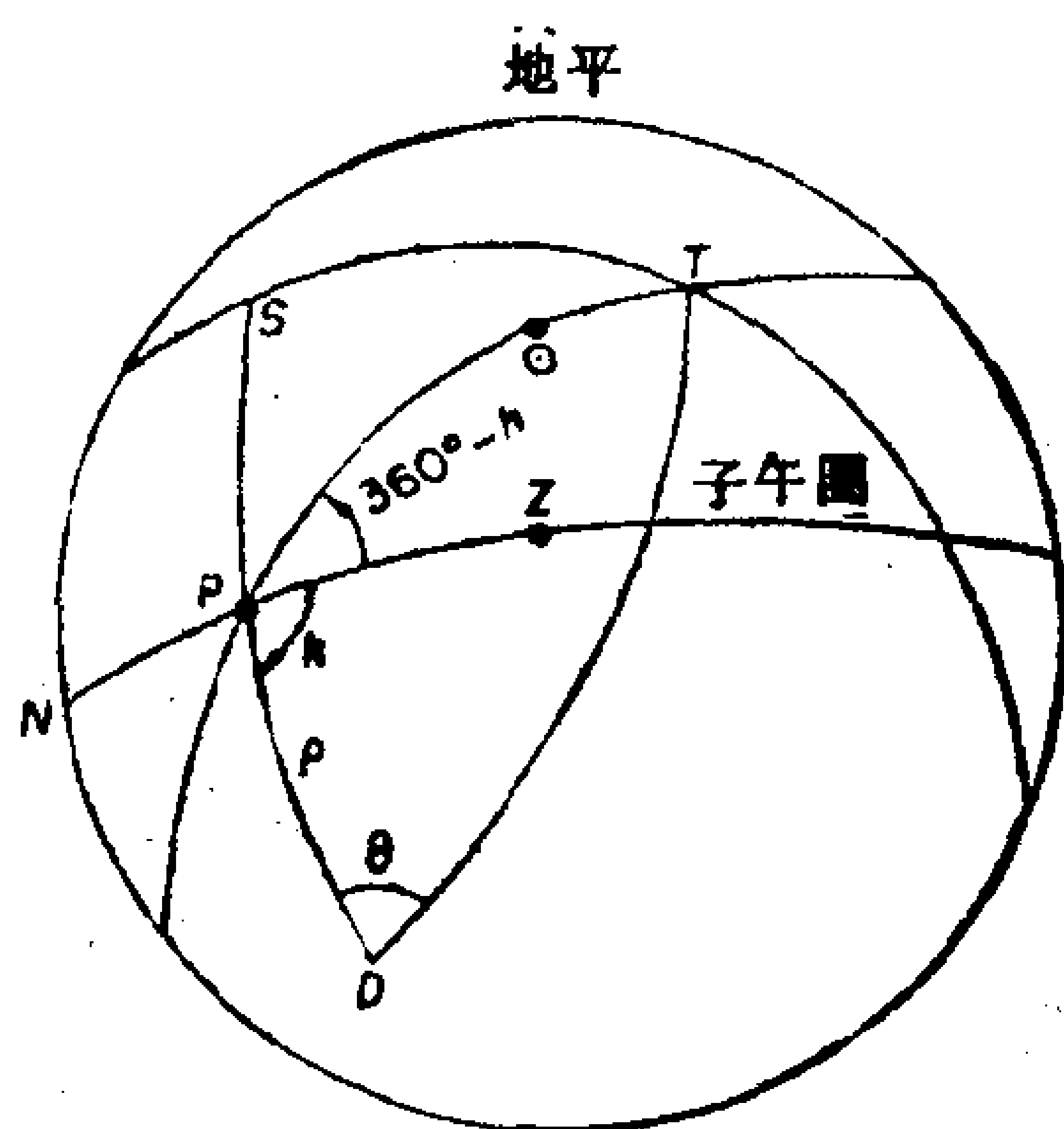


图 29　日晷原理

$$\tan\theta=\cos\rho\tan(h-k).$$

对于地平式日晷(图30)，D在天顶Z；因而$k=0$，$\rho=90°-\varphi$以及

$$\tan\theta=\sin\varphi\tan h.$$

θ角是地平上从北点或南点到地平经圈与时角圈在地平上的垂足交点的弧段。以晷针在地平上的投影长度MS以及M到东西方向线与时线的交点R的长度MR表示的θ角值为$\tan\theta=MR/MS$，因为$x=180°-\theta$或$MR=MS\sin\varphi\tan h$。从这关系式，时线SR可以用图解法求得；取$MO=MS\sin\varphi$和从O点向MS两侧相继划分角度$h=15°,30°,45°\cdots\cdots$，以确定在东西线上的各$R$点的位置。在这样确定的各个点上，$MR/MO=\tan h$，即这些点的各$MR$值要求等于$MS\sin\varphi\tan h$。

在科普文章中常常是这样叙述的：当能够看到太阳时，可以

图 30 地平式日晷

用一个表来找出南点的方向，把表水平放置，将时针对着太阳的方向，则时针和表面上数码 12 之间的角平分线方向即向着正南。但从上述对日晷原理的讨论中，显然可知这个规则常常带有很大的误差，特别是在低纬度地区，有时完全不能定出方向。如果把表面朝上放得与赤道平面平行，并使表按地方时运行时，那么在北半球地方，除了时差的影响外，这个方法是正确的，因为在正

午当把时针对着太阳时，这时时针指向12且指向南点，由于时针在24小时内转动2周，因而在这以后，时针转过的角度是太阳转过的角度的2倍，但如时表水平放置时，这个规则最多不过是或多或少的一种近似方法，精度与条件有关。例如，在纬度51.5°处，于6月21日下午4时的误差为23°，而在3月21日下午4时的误差则小于6°。举一个极端的例子，在纬度0°的任一地方，当太阳过天顶的日子，中午以前太阴总是在正东，午后总是在正西。

一般来说，为了建筑或其它目的，利用物体上选定的一些点子沿着指向太阳的高度和方位的直线上的投影，可以把物体的阴影粗略地描绘出来，并定出它们的周日变化和季节性变化。反之，一天的日期和一天中的时刻，可以由测量一个点的阴影与该成影物体点位竖直投影在地平上位置之间的距离及方位而获得。如果对在一张照片上留下阴影的一个物体，不能得到必需的定位测量，就可以应用下述原理：对于某一日期，由物体的铅垂线与该物体到阴影的直线所交的角度在与视线正交平面上的投影，仅取决于一天中的时刻而确定时刻。测量照片上的若干个拍摄点的高度角和方位，就可由照片上成影物体相对于所测量物体(拍摄点)的位置，来确定成影物体的高度和方位。由阴影的相对位置可求得太阳的方位和高度，因而就能得到拍摄照片的时刻❶。

晨昏蒙影的时间

在日出前和日落后的一段时间内，地球表面上的大气仍被阳光照明着，在被照明区域内被空气在各个方向上散射的阳光和由此造成的明亮的天空，使得地球几何阴影内的地球表面得到照明。随着太阳在地平下的俯角逐渐增加，被太阳照亮的大气区域的范围逐渐减少，天空亮度和地面照度也逐渐变小，直到除了星

---

❶ 见 W.F.Meyer 和C.D.Shane，"The Determination of time from shadows shown on a photograph"．Pub.Astr.Soc.Pac.48，90-96(1936)。

光或月光外的完全黑暗状态。

晨昏蒙影的时间取决于纬度，一年中的日期和地面的海拔高程。昏影终(或晨光始)是一种难以明确定义的现象，但近似地可以规定为太阳必须在地平下18°，此时在观测者视野内的大气没有任何部分被照明，可是太阳在地平下到达这一角度以前很久地面照度已经很暗，实际上早已看不见物体了。一般采用太阳俯角为6°时，作为在良好气象条件下自然照度的极限，在此极限内可以清晰地辨明地面物体和进行户外活动，此时刚开始可以看到最亮的恒星。日出或日落到此限度之间的时间称为**民用晨昏蒙影**，一直到太阳在地平下18°的时间称为**天文晨昏蒙影**。在下降到12°的时间为**航海晨昏蒙影**，此时地面物体的轮廓仍能看到，但地平线已看不清楚，能看到所有的航海恒星，而不用人工照明就不能进行精细的操作。

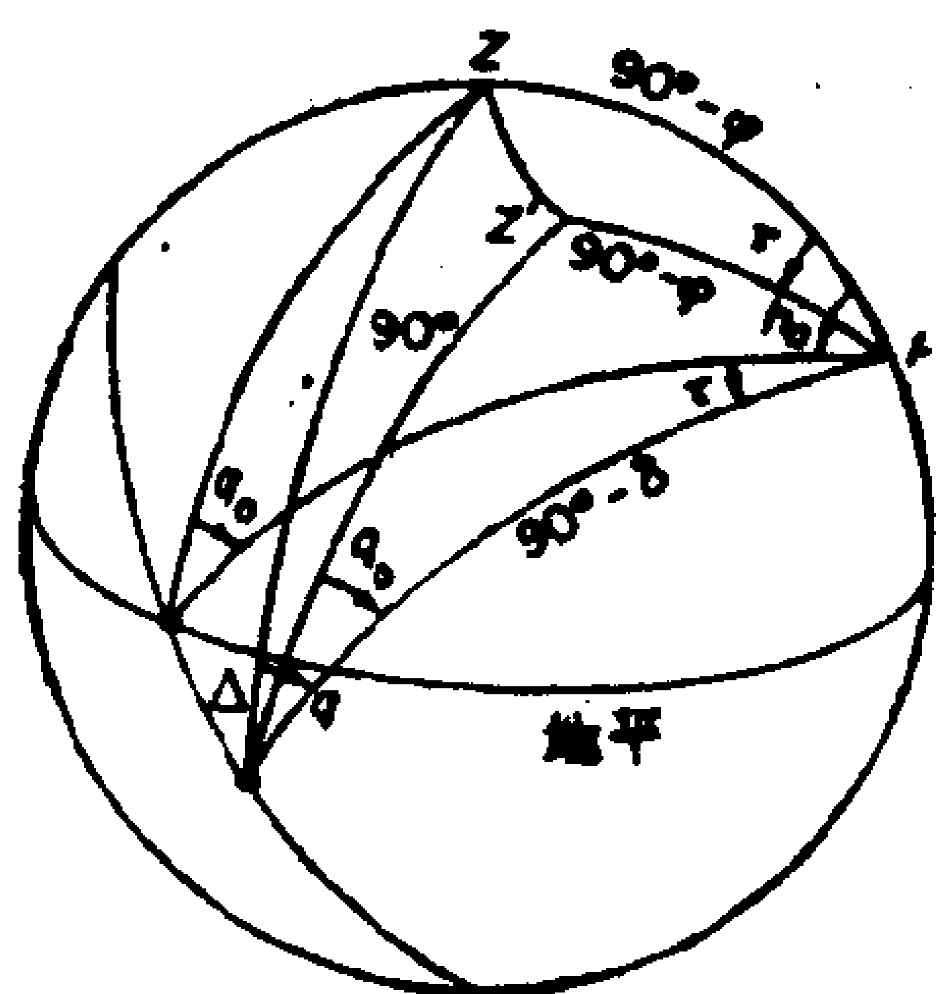


图 31 晨昏蒙影时间

太阳圆面中心从日落后到达几何俯角为Δ或日出前从离地平这一俯角到日出的时间，由几何时角 $h=h_0\pm\tau$ 度量，其中 h_0 是太阳在地平时的几何时角，因而由图31得

$$-\cos h=\sin\Delta\sec\varphi\sec\delta+\tan\varphi\tan\delta,$$

或令 $H=90°-\varphi+\delta$,

$$\sin^2\frac{1}{2}(h_0\pm\tau)=\frac{\sin\frac{1}{2}(H+\Delta)\cos\frac{1}{2}(H-\Delta)}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

当太阳在俯角Δ时，天顶在天球上的点 Z，当太阳在地平时，天顶在天球上的点 Z'，以及天极点，这三者构成一个三角形，在天极点的角为 τ。如不考虑天球旋转时角 τ 时间内，太阳的微小运动，那么由 Z'，天极点和太阳在俯角Δ处位置构成的

三角形与Z，天极点和太阳在地平的位置构成的三角形，这两者是相同的。因而

$$\cos ZZ' = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cos\tau = \cos\Delta \cos(q - q_0),$$

式中 q 和q_0为星位角，令 $\cos\tau = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\tau$，

$$\sin^2\frac{1}{2}\tau = \frac{1 - \cos\Delta\cos(q - q_0)}{2\cos^2\varphi},$$

因此，当 $q_0 = q$ 时，τ 具有极小值；即 Z' 与太阳在同一地平经圈上。τ 的极小值由 $\sin\frac{1}{2}\tau = \sin\frac{1}{2}\Delta/\cos\varphi$ 给出，而太阳在地平时的方位角和在俯角Δ时的方位角之和是180°。对于$\Delta = 18°$，在 $\varphi = 81°$及 $\delta = -9°$时，τ的极小值为 12^h。对于更大的 δ 值或更大的φ值，τ就不存在固有的极小值。

第八章　天文坐标系的动力学基础

天球坐标系内各参考圈在恒星间的位置，必须用实测的方法通过对定义这些参考圈的各种视运动的观测来加以确定。但是，因为这些视运动反映了地球以及其它天体的实际运动情况，所以我们就可以利用太阳系内天体运动的引力理论，从而把位置和时间的参考系建立在某种动力学的基础之上。为了根据坐标系在实测工作中的几何学定义，通过观测把它们建立起来，并使之达到目前所要求的高精度，参考系的动力学理论是一种必不可少的辅助工具，特别对确定那些由于地球自转轴和轨道位置的变化而引起的基本圈的运动来说更是如此。

由视差、光行差、大气折射所引起的天体坐标的变化，表现为天体在天球上观测位置的位移，而位移的具体情况则同测站的地理位置以及其他观测条件有关。我们必须很仔细地把它们同并非由于天体在天球上位置的任何移动，而是由于赤道和黄道坐标系的参考圈的运动所引起的天体坐标的另一种变化区分开来。再有，为了用天体的天球坐标以及观测者的地理坐标来表示天球的局部形象，还必须识别出在地球表面某固定点处地理天文坐标系所发生的一些微小的变化。从动力学的角度来看，无论是天球上还是地球表面上的天文坐标系，它们都是由地球的自转与公转运动以及重力的地理分布所决定的，前者确定了基本圈的位置，后者则确定了天文垂线的方向。根据地球运动的动力学理论，利用观测得到的参数，可以导出有关坐标系运动的理论表达式。

从运动学角度来说，地球作为一个整体的运动是由具有质心运动速度的平动和绕着过质心的某根轴的自转所合成的结果。这两个分运动从动力学角度来说是彼此独立无关的。质心的运动就

好象是一个质点在运动，质点的质量等于地球的总质量，全部作用力都作用在这个质点上，而相对于质心的运动情况则可以把质心当作静止不动，由对于质心的外力矩来加以确定。

质心的运动主要是由太阳所施加的中心引力所决定的，因而它的轨道非常接近于一个椭圆，太阳则是在这个椭圆的一个焦点上。但是，这个运动不断受到太阳系内其它天体引力作用的干扰，结果质心的实际运动轨道便是一条不规则的、处于不断变化之中的空间曲线。由上述运动所引起的太阳在恒星间的视运动相应地也是既不规则而又是变化着的，但是，由于这种不规则性在古代的天文测观中是觉察不到的，因而最初人们就把黄道看作是太阳在恒星间的实际周年运动轨迹，而且在把黄道作为天球面上几何坐标系的基础时，便根据实测经验认为它是一个大圆。然而，一旦把太阳的周年视运动解释为地球轨道运动的反映，而且黄道是按动力学方法根据行星运动的引力理论来加以确定的话，那么就需要一种与动力学定义严密地联系在一起的，更为严格的实测性定义。为了使黄道可以作为天球上某个坐标系的基本参考圈，那它必须是一个大圆，所以就需要下一个定义，而在这一定义下的大圆则是由太阳在天球上的实际不规则视运动所决定的。

因此，我们就把黄道定义为地球平均轨道平面同天球所交的大圆。这个平面以一种有规则的、渐近的方式改变着它的空间位置，并且始终通过太阳的中心，而在每个瞬间由矢径和速度矢量所决定的瞬时轨道平面，则以某种不规则的周期运动方式在上述平均轨道面附近来回摆动，因此黄道在天球上的缓慢的长期运动，以及太阳的视轨迹对于作渐进运动的黄道的不规则偏离，这两种运动可以用地球公转运动的引力理论来加以确定。

地球相对于质心的运动主要是由日、月引力作用所决定的，这两种作用力不断地干扰着地球的自转运动，但是问题进一步复杂化的原因则在于自转轴与形状轴并不严格地重合，也还在于不断发生着的地球的形变，以及地球表面和内部的质量迁移，后者

是由地球物理过程的作用所造成的。在每一瞬间，相对于质心的运动总是绕着某根轴的一种自转，自转轴始终通过地球的质心，但是对不同的瞬间来说，这根轴无论是在地球内部的位置还是在空间的方向都是不相同的。而且，绕着瞬时轴的自转角速度也是变化的。

自转轴在空间方向的改变使天球上天极和天赤道的位置发生变化，而它在地球内部位置的变化则造成了地理极在地球表面的连续不断的运动，后者限于直径约为 100 英尺的一个很小的范围之内。每一瞬间的天赤道是依据地球绕瞬时轴自转所引起的天球的视周日旋转，用实测的方法加以确定的。这种动力学的解释和黄道的定义不同，它对最初的直观概念并没有本质上的影响，这种直观概念所依据的是把观测到的恒星的周日视运动解释为某个球的实际转动，恒星就固定在这个球面上，而地球则是静止不动的，它位于这个球的中心。

地理极的运动是地球表面天文经纬度发生微小变化的主要原因，并进而对地平坐标系发生影响，但是局部重力方向的变异也会引起地理参考系和地方地平坐标系的一些更为微小的变化。重力的方向和强度主要取决于地球的万有引力以及自转的向心加速度，不过日、月引力也会对它们产生少量的影响。日、月作用力的不断改变使天文垂线的方向发生变化，同时使地理坐标发生变化，并使天文天顶和天球子午圈产生位移。

赤道面的运动同瞬时轨道平面的情况相类似，它也可以用对于某个作渐进运动的平均平面的一种可变的周期性摆动来加以描述。这个平均平面确定了天球上的一个大圆，它同黄道一样仅有位置上的长期变化，这个大圆称为**平赤道**，平赤道的有规则的渐进运动形成日月岁差。赤道运动中的可变周期性成份称为**章动**。对于许多问题来说，平赤道作为坐标系的参考圈要比真赤道更为方便。黄道对于平赤道的升交点称为**平春分点**，而黄道与平赤道的倾角就是**平黄赤交角**。

从有关这些基本参考圈运动的动力学理论表达式可知，参考圈在天球上任一瞬间的位置可以用对于它们在某个任意初始瞬间的位置的相对关系来加以确定。这个选来作为参考瞬间的初始时刻称为**历元**。参考圈的历元位置在地球运动理论中是用运动微分方程解算结果中的一些积分常数来表示的，它们必须通过实测的方法来加以确定。

对于需要在天球上建立静止坐标系的那些问题来说，我们利用的就是某一选定的历元时间的黄道和赤道所定义的坐标系。基本圈固定在天球表面该历元时黄道和赤道所占有的位置，称为历元固定黄道和历元固定赤道，而黄道升交点就是历元固定春分点。任何瞬间的实际参考圈则称为瞬时黄道和瞬时赤道。

黄道的长期运动

黄道面的空间运动是由其它行星对地球的引力摄动所引起的。由于这个平面始终通过太阳中心，因而在每一瞬间的运动必然是一种转动，转动轴位于黄道面上并且通过太阳。黄道面绕其旋转的这根轴便在运动着的黄道面内缓慢地退行。

黄道面的空间**运动**，以及由此而引起的黄道在天球上的长期变化，是用运动着的旋转轴的瞬时位置以及绕该轴的转动角速度 κ 来描述的。轴的位置则用黄道的瞬时位置同前一瞬间位置的升交点端的黄经来加以表示。

t 时刻的运动黄道面相对于空间某个固定参考系的**位置**，用它对于某个选用历元 t_0 的固定黄道面的倾角 π_1 以及它同这个固定平面交线的位置来表示，其中后者可以用运动黄道对于固定黄道的升交点黄经来加以确定。

有关 κ 值和旋转轴黄经的理论表达式是用诸行星的质量及其轨道要素来表示的，它们可以从在太阳系内其它天体引力作用下的地球质心运动的动力学理论求得，而通过积分的方法还可以确定有关倾角 π_1 以及对固定黄道升交点黄经的表达式。

任何瞬间的旋转轴与天球的交点是一个大圆的极，而黄极E就沿着这个大圆不断地作瞬时运动（图32），运动黄道对于其前一瞬间位置的升交点R，即北黄极运动方向所指向的位于黄道上的那个点以东 90°。

图 32　基本圈的岁差运动

黄极在天球上的实际运动轨迹并不是一个大圆。黄极的瞬时运动大圆同这条轨迹相切，从这个大圆起向东量到瞬时平二至圈象限线的角度N便指明了瞬时运动的方向，而北天极即位于二至圈上。从瞬时平春分点起算，沿着瞬时黄道所量得的旋转轴的黄经为 $L = 180° - N$。

随着黄道的旋转，位于历元固定赤道上的春分点便向东移动。随着天极的岁差运动，二至圈独立地绕着运动黄极朝西旋转，而历元时刻二至圈所在的位置同黄极的瞬时运动方向的交角为N_0。在运动黄道上，从历元时刻春分点所在的那一个点起所量得的旋转轴的黄经便是$L_0=180°-N_0$。κ和N_0的数值表示在空间相对于固定参考系的运动，这两个量是从行星理论取得的，N从N_0及春分点的岁差运动求得，而岁差则又是从地球绕其质心的运动理论求得的。

瞬时黄道对于历元固定黄道的交点，通常用它的黄经Π_1来表示，Π_1是沿着固定黄道从历元固定平春分点起算的；但有时也用沿瞬时黄道从瞬时平春分点量得的黄经来表示。Π_1处的交点是运动黄道对于固定黄道的**日心**升交点。其地心黄经同日心黄经是一样的，不过当地球位于升交点时，从地球来看太阳便位于地心黄经大于180°的降交点上。交点的黄经也可以表示为$\Pi_1=180°-N_1$，其中N_1便是历元二至圈同连接历元黄极与瞬时黄极的弧π_1之间的夹角。连接黄极这两个位置的弧π_1并不是黄极从其中一个位置运动到另一个位置的实际轨迹。

瞬时黄极的位置可以用它在以历元黄极为原点的一个直角坐标系内的坐标来表示，该坐标系的X轴指向历元平春分点，Y轴沿历元平二至圈指向黄经为90°的天极。严格来说，在由x，y，π_1所构成的直角球面三角形中，我们有$\sin x=\sin\pi_1\sin N_1$和$\sin y=\sin\pi_1\cos N_1$，或$\tan x=\tan\pi_1\sin N_1$和$\tan y=\tan\pi_1\cos N_1$，但是对于历元前后几个世纪的时间范围来说，黄极运动所及的小范围内的球面曲率是可以忽略不计的，因而这个三角形便可以看作为一个平面三角形，与历元相距五个世纪之后，π_1^3仅仅约为0.000 000 4″，而π_1，$\sin\pi_1$，$\tan\pi_1$这三者在数值上可以互相替换。因此，黄极的坐标为

$$x=\pi_1\sin N_1=+\pi_1\sin\Pi_1,$$
$$y=\pi_1\cos N_1=-\pi_1\cos\Pi_1,$$

为方便起见，历元之前 π_1 取负值。

黄极E（x，y）在天球上的瞬时线速度是一个与天球相切于E点的矢量，因而它便与黄道面相平行，它的两个分量是

$$\frac{dx}{dt}=\pi_1\cos\Pi_1\frac{d\Pi_1}{dt}+\sin\Pi_1\frac{d\pi_1}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\pi_1\sin\Pi_1\frac{d\Pi_1}{dt}-\cos\Pi_1\frac{d\pi_1}{dt}.$$

由于E的运动速率为$\kappa=d\pi_1/dt$，方向指向黄经$90°-N$，因而它在指向瞬时春分点及沿着黄经为$90°$的瞬时二至圈的这两个方向上的分量，分别为$\kappa\sin N$和$\kappa\cos N$，**在历元时刻**，这两个分量等于dx/dt，dy/dt。

运动黄道对于历元固定黄道的相对位置的数字表达式是根据行星理论求得的，它们是以时间的幂级数形式来表示的两个直角坐标的展开式：

$$\pi_1\sin\Pi_1=p_1t+p_2t^2+\cdots\cdots,$$
$$\pi_1\cos\Pi_1=q_1t+q_2t^2+\cdots\cdots.\tag{101}$$

关于π_1和Π_1的表达式可以从（101）式求得，即设

$$\pi_1=s_1t+s_2t^2+s_3t^3+\cdots\cdots,$$
$$\Pi_1=\Pi_0+S_1t+S_2t^2+S_3t^3+\cdots\cdots.\tag{102}$$

把它们代入（101）式，并令t的同次幂的系数相等，这样就可以确定上式的系数，由于

$$\sin\Pi_1=\sin\Pi_0+(S_1\cos\Pi_0)t+\left(S_2\cos\Pi_0-\frac{1}{2}S_1^2\sin\Pi_0\right)t^2+\cdots\cdots,$$

$$\cos\Pi_1=\cos\Pi_0-(S_1\sin\Pi_0)t-\left(\frac{1}{2}S_1^2\cos\Pi_0+S_2\sin\Pi_0\right)t^2-\cdots\cdots,$$

我们发现取到三阶项，则有

$$p_1 = s_1 \sin \Pi_0,$$
$$p_2 = s_2 \sin \Pi_0 + s_1 S_1 \cos \Pi_0,$$
$$p_3 = \left(s_3 - \frac{1}{2} s_1 S_1^2\right)\sin \Pi_0 + (s_2 S_1 + s_1 S_2)\cos \Pi_0,$$
$$q_1 = s_1 \cos \Pi_0,$$
$$q_2 = s_2 \cos \Pi_0 - s_1 S_1 \sin \Pi_0,$$
$$q_3 = \left(s_3 - \frac{1}{2} s_1 S_1^2\right)\cos \Pi_0 - (s_2 S_1 + s_1 S_2)\sin \Pi_0,$$

从这些式子就可以求得用 p_i 和 q_i 表示的系数 s_i 和 S_i。不过对于数字计算来说，利用下面这些关系式比较方便：

$$\begin{aligned}
\tan \Pi_0 &= p_1/q_1, \\
s_1 &= \sqrt{p_1^2 + q_1^2}, \\
s_1 S_1 &= p_2 \cos \Pi_0 - q_2 \sin \Pi_0, \\
s_2 &= p_2 \sin \Pi_0 + q_2 \cos \Pi_0, \\
s_1 S_2 &= p_3 \cos \Pi_0 - q_3 \sin \Pi_0 - s_2 S_1, \\
s_3 &= p_3 \sin \Pi_0 + q_3 \cos \Pi_0 + \frac{1}{2} s_1 S_1^2.
\end{aligned} \tag{103}$$

严格说，(101) 式的左边应该根据动力学理论所推导的形式，用 $\tan \pi_1$ 或者 $\sin \pi_1$ 来取代 π_1。从数值上来说，在使理论表达式保持有效的任何时间间隔内，这三个量总是可以互相替代的，但是，在 π_1 和 Π_1 的代数表达式中，到三阶项就有所不同。要是用 $\tan \pi_1 = \pi_1 + \frac{1}{3} s_1^3 t^3$ 来代替 π_1，就要把 $+\frac{1}{3} s_1^3 \sin \Pi_0$ 这样一项加在前面关于 p_3 的表达式中去，同时把 $+\frac{1}{3} s_1^3 \cos \Pi_0$ 加到 q_3 中去，于是对 s_3 就要加上 $-\frac{1}{3} s_1^3$。如果用 $\sin \pi_1 =$

$\pi_1-\frac{1}{6}s_1^3t^3$，则加在 p_3 上的一项是 $-\frac{1}{6}s_1^3\sin\Pi_0$，$q_3$ 上加的是 $-\frac{1}{6}S_1^3\cos\Pi_0$，因此对 s_3 就要加上 $+\frac{1}{6}s_1^3$。某些作者给出了这些公式，但是，如果以世纪为时间单位，则 $s_1^3<0.000\,003''$。

地球相对于它的质心的运动

地球作为一个整体来说非常接近于一个刚体，因而它相对于其质心的运动理论便可以建立在有关理想刚体运动的一般性理论的基础之上。可以预料，实际运动同地球假想是一个理想刚体时的运动情况是十分接近的。实际运动对于刚体运动的偏离取决于地球的物理结构和内部构造，以及地球物理过程中地球表面和内部质量的重新分布。这种偏离不可能单单用理论来准确地加以确定，因而最好是用对理论刚体运动的一些改正项的形式分别地加以表示。理论运动同天文和地球物理观测结果的比较对于确定这些改正项是很有效的，而作为在解释所观测到的实际运动时的一种参考标准，理论刚体的运动则具有它的基本重要性。

在外力作用下刚体相对于其质心的运动主要取决于主惯性矩，它是用主惯性轴的空间运动以及刚体相对于这些轴的运动来加以确定的。最大惯性矩轴就是动力形状轴。地球近乎是一个同心均质的旋转球体，所以这根轴实际上（尽管未必严格）同几何形状轴、也就是同大地测量中所常用的参考椭球的旋转轴相重合。另外两根主轴所在的平面是动力形状赤道面。没有任何明确的证据可以说明在两个赤道惯性矩的数值之间有显著的差异，因而在推导运动理论时假定 $A=B<C$ 就足够了，其中 C 是对于极形状轴的惯性矩。

动力学理论[1]给出了有关主惯性轴的空间运动以及自转轴相对于动力形状轴的运动的表达式。从运动学角度来说，地球相对于其质心的运动是由三个分量组成的一个复杂的合运动。尽管地球绕着一根始终通过质心但又并不同形状轴相重合的轴旋转，然而它对于自转轴的相对位置不断地发生着少量的改变，形状轴在这个运动中围绕着自转轴在空间描绘出一个不规则的、可变的锥面，而自转轴的方向则没有显著的改变。结果，自转轴便沿着地球内部的一个锥面不断地改变着它的位置。同时，由于太阳和月球的引力作用，自转轴在空间作锥形运动，地球是作为一个整体参与这一运动的，它对于自转轴的相对位置并没有任何的变化。

自转轴在地球内部位置的变化，表现为天文经纬度随地理极在地球表面上的移动而产生某种变化，但是，因为这完全是由于地球作为一个整体相对于它的自转轴出现了某种位移，而决不是自转轴的一种空间运动，所以它不会影响到天极在恒星间的位置。与此相应的，自转轴的空间运动并不改变该轴在地球内部的位置，所以地理经纬度不会因此而发生变化，但它使天极和天赤道在恒星中的位置产生位移，因而也就改变了天球上点的天球坐标。

从本质上来说，地球的这些运动取决于整个地球内部的质量分布和物理性质。然而，在刚体运动理论中唯一明显出现的密度分布函数就是参数（$C-A$）/C，称为**力学扁率**，该值不是从地球的内部结构，而是从对于天极岁差运动速率的观测获得的。同样，自转轴对于形状轴的偏离是直接通过对处于不断变化着的地理极位置的观测来求得的。

在常见的初等教科书中，解释岁差时所依据的是地球的几何形状而不是各个主惯性矩的相对数值，除非所讨论的是一个匀质

[1] 有关详细的数学理论，参见 E.W.Woolard, Theory of the rotation of the Earth around its center of mass. Astr.Pap Amer.Eph.XV.Pt.I (1953) 。

旋转椭球，否则这种说法从动力学角度来看是不恰当的。把地球当作是“围绕着一圈凸出的物质环(赤道隆起带)的一个球”的看法是不正确的，因为赤道的多余部分并不仅仅是一种表面隆起，而是由里到外都在离开中心朝外扩展。地球大致是同心均质的，每一层差不多有着相同的扁率，因而对 $C-A$ 都有所贡献。所以，半径等于极半径的球只是一个**几何上的**球体，而不是动力学上的球。完全不同的质量分布有可能给出同样大小的 C 和 A 值，从而便产生同样的岁差运动。

地球同刚体之间的差异对**自转**轴的空间运动不会产生任何显著的效应，这一点已经是确定无疑的，尽管理论研究表明有可能出现一些极其微小的影响。但是，相对于运动着的自转轴来说，**形状**轴的空间运动同理论刚体运动有相当大的偏离，无论从特征或大小上来说都是如此，其原因就在于地球对于刚体存在着各种差异。这些差异也引起了绕瞬时轴自转速率的变化，其变化程度之大对于高精度时间测量的实测工作来说是很重要的。

天赤道的日月运动

任何瞬间，运动着的天赤道平面的位置是用 ε_1 和 ψ 这两个量来表示的，其中 ε_1 是天赤道对于选用的历元固定黄道的交角，ψ 是天赤道对固定黄道的降交点的位移，后者从历元固定平春分点起向西计算（图 32）。通过对运动方程的积分所得到的这两个角度（作为时间函数）的表达式是

$$\begin{aligned}\psi = {} & f_1 t + f_2 t^2 + \cdots\cdots \\ & -17.233''\sin\Omega + 0.209''\sin 2\Omega \\ & -0.204''\sin 2L_{\leftmoon} - 1.273''\sin 2L_{\odot} \\ & + \cdots\cdots, \qquad (104) \\ \varepsilon_1 = {} & \varepsilon^0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \cdots\cdots \\ & +9.210''\cos\Omega - 0.090''\cos 2\Omega \\ & +0.088''\cos 2L_{\leftmoon} + 0.552''\cos 2L_{\odot} \\ & + \cdots\cdots,\end{aligned}$$

式中ε^0，f_i，θ_i是常数；Ω表示月球升交点的平黄经，而$L_{\odot}$，$L_{☾}$为太阳和月球的平黄经。在关于ψ的完整表达式中包含有导数≥0.000 2″的69个周期项，而在ε_1的表达式中有40项。

全部周期项代表了赤道平面由于自转轴相对于某个平均位置的章动所引起的一种不太规则的周期性摆动，而这个平均位置又因为轴的岁差运动而逐渐地变化，其中后一种运动是用一些长期项来表示的。由长期项所确定的作渐进运动的平均平面就是平赤道面，该平面与天球所交的大圆是平天赤道，它的几何极就是平天极。

常数ε^0为历元平黄赤交角，它是一个积分常数，而且必须通过观测来求得。常数f_i，θ_i和各周期项的系数同地球与月球的质量和轨道要素，以及地球的惯性矩有关。在ψ表达式中t项的系数f_1称为日月岁差常数，而ε_1表达式中$\cos\Omega$的系数是章动常数，这两个系数是直接通过观测加以确定的，因为没有任何行之有效的方法可以用来直接确定地球的惯性矩。ψ和ε_1表达式中其它系数的数值是从动力学理论以及f_1和章动常数的观测值求得的。

自转轴的日月运动是同时发生着的两种圆锥运动合成后的结果：其中一个是绕瞬时黄极的圆锥运动，它是太阳的作用力引起的；另一个是由月球的作用力所造成的、绕着运动着的月球轨道极的圆锥运动(图33)。这两种运动都不太有规则，而且速率也是在变的。随着月球轨道极绕着黄极的旋转，因月球作用力所引起的自转轴的运动就在太阳所造成的运动的方向的两边来回摆动。所以，北天极在天球上绕着固定黄极描绘出一条不规则的波形曲线，其运动速率是不规则变化的。它大约在26 000年内完成一整周，从地球表面来看运动方向是反时针的，波形曲线的主周期就是月球轨道极的旋转周期，即约为18.6年。

从地球表面来看，北天极在天球上的这种运动可以表述为以某种可变的速率绕平极的一种反时针旋转，运动的轨迹是不规则

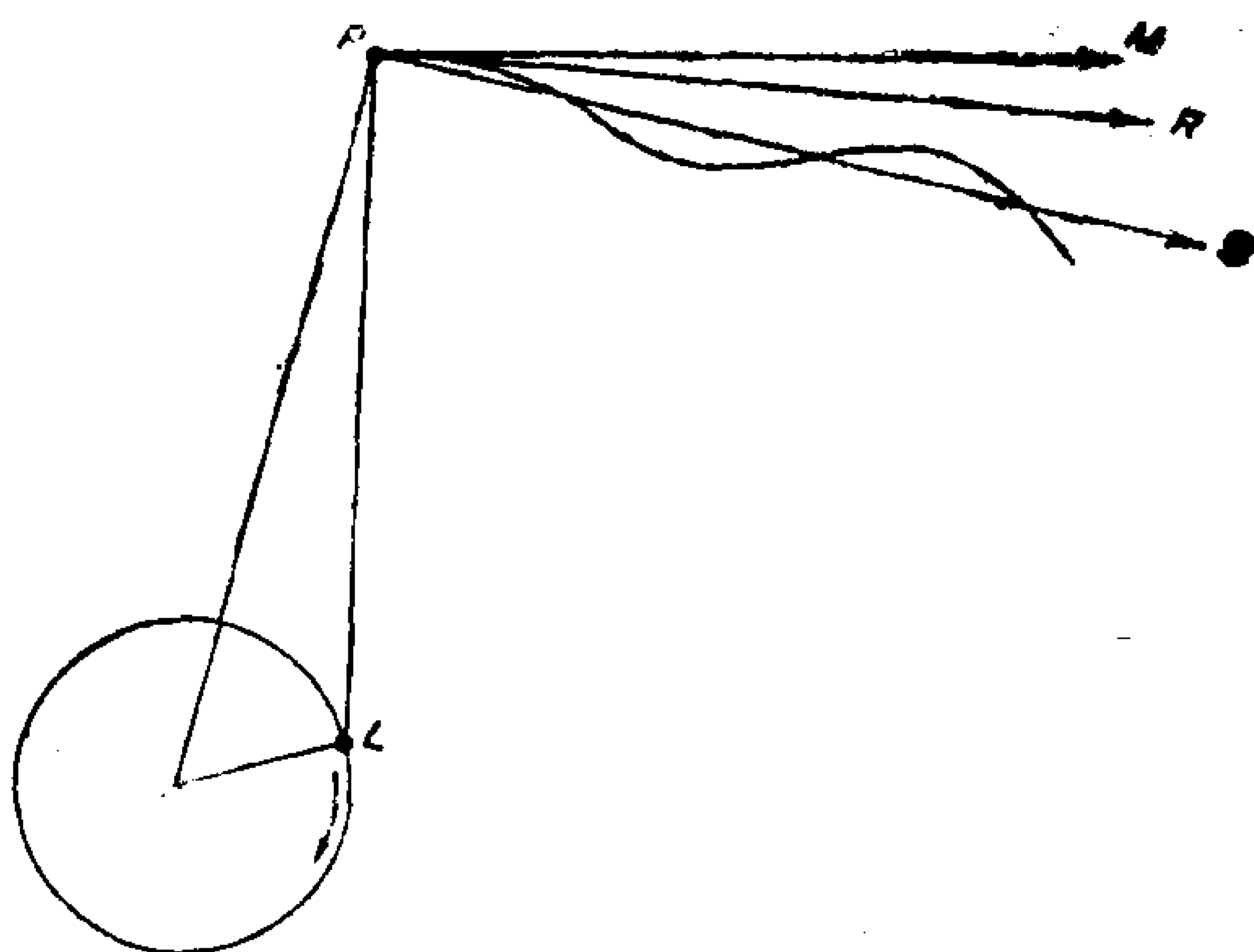


图 33　地球北极的日月运动

图中所画的是从该极上方所看到的情况。在太阳的作用下，极 P 绕着黄极 E 沿 PS 方向运动。在月球的作用下，P 绕着月球轨道极 L 沿 PM 方向运动，而 L 则绕 E 旋转。P 的合运动方向为 PR，它取决于 L 对于 P 和 E 的相对位置，以及在 PS 和 PR 这两个方向上运动的相对速率。

的，然而近乎为一椭圆，椭圆的半长轴约为 9″，而平极则沿着一个圆绕历元固定黄极按反时针方向均匀地运动，不过运动的速率以及圆的半径 ε_1 则有着微小的长期变化。平极的这种均匀圆周运动就是由（104）式中 ψ 和 ε_1 的长期项所表示的自转轴的日月岁差，其中大约有 1/3 的运动量来自太阳的作用，而 2/3 则是由月球所造成的。真极绕运动着的平极的运动是自转轴的日月章动，也就是（104）式中的周期项，章动主要起因于月球，不过太阳也有一定的作用。平极是平二至圈与平二分圈的交点，显然，在任何时刻真极对于平极的位移在分至圈上的两个分量，在二至圈方向上约为 $x=\Delta\varepsilon$，在二分圈方向上为 $y=\Delta\psi\sin\varepsilon$。因此，由主项 $\Delta\varepsilon=9.2''\cos\Omega$ 及 $\Delta\psi=-17.2''\sin\Omega$ 可知，真极相对于平极的运动轨迹方程是一个椭圆

$$\frac{x^2}{(9.2'')^2}+\frac{y^2}{(17.2'')^2\sin^2\varepsilon}=1.$$

因平极运动所引起的春分点沿固定黄道的连续西行是黄经的日月岁差，用ψ的长期项来表示。由真极绕平极的运动所造成的周期性摆动是黄经的日月章动，或者说得更确切一些就是黄经的二分差，以ψ的周期项表示。天赤道对固定黄道的交角的周期性摆动以ε_1的周期项来表示，这是黄赤交角的日月章动，它几乎构成ε_1的全部变动，不过黄赤交角还会发生极其微量的岁差。

在某些问题中，用任意时刻平赤道对于选用的历元固定平赤道的交点和交角来表示该时刻平赤道的位置，要比用对于固定黄道的相对位置更为方便。因为天极的日月岁差和黄道的长期运动都是十分缓慢的，所以瞬时平赤道对于历元平赤道的升交点赤经在好多个世纪内部接近于 90°，而历元平极的赤经总是在 180°附近。因此，瞬时平赤道的位置通常就用它对于历元平赤道的倾角J以及它的升交点对于赤经为 90° 的那一点的偏离来加以表示。

对于**瞬时**平春分点来说，瞬时平赤道对于历元平赤道的升交点赤经用 $90°+z$ 来表示，这时历元平极的赤经为 $180°+z$。

对于**历元**平春分点来说，瞬时平赤道的升交点赤经用 $90°-\zeta_0$ 来表示，瞬时平极的赤经为 $360°-\zeta_0$。

我们可以根据动力学方法推算出来的赤道对于固定黄道的相对位置，并利用球面三角公式来求得ζ_0，z和J这三个值，其中涉及到的三角形是由瞬时赤道对于历元赤道的升交点以及这两个赤道与固定黄道的两个交点所构成的。

地理极的运动

自转轴对于形状轴的偏离几乎完全是由地球物理原因造成的，但是其中也有很小的一部分起因于日月引力的作用。极移中地球物理分量的出现与外力无关，而且即使没有任何外力的作用它也会一直存在下去。这部分极移称为**欧拉章动**。极移中日月分

量的大小同太阳和月球的黄经有关，它是一种周日变量。在理论刚体的欧拉运动中，有$A=B$(图 34)，由于形状轴在空间的圆锥运动，自转轴便在地球内部绕着形状轴描绘出一个圆锥，结果，自转极便在地球表面上绕着形状极在一个圆上运动，运动的速度是均匀的，周期大约为305天。极移的日月分量在这个圆周运动上迭加了某种周日旋转，后者的轨道就是一个本轮，其中心为不断运动着的欧拉位置，由于太阳和月球的轨道位置的变化，本轮的半径变化在0到0.02″之间，0.02″相当于地球表面2英尺范围。从北极上方看来，这种因日月作用所致的周日本轮运动是按顺时针方向进行的，但是地极的地球物理运动是反时针的，它同地球的自转方向一致。

瞬时自转极的位置可以用两个量γ和Γ来表示，其中γ是自转极和形状极C之间的角距离，而Γ是通过C点的任意一条起始形状子午圈与过瞬时极的形状子午圈之间的交角，Γ从起始子午圈起向东计算。角位移γ是很小的，因而沿着Γ起算方向的子午圈CA的分量就是$\gamma\cos\Gamma$，而在与CA相垂直的方向上的分量为$\gamma\sin\Gamma$。我们可以选格林尼治子午圈作为CA，实际工作中，地理极的瞬时位置通常总是用朝格林尼治以及格林尼治以西90°这两个方向上的直角坐标来表示：

$$
\begin{aligned}
x &= +\gamma\cos\Gamma \\
&= +\gamma_0\cos\Gamma_0 \\
&\quad +0.0087''\sin\varphi \\
&\quad -0.0062''\sin(\varphi-2L_{☾}) \\
&\quad -0.0029''\sin(\varphi-2L_{\odot}) \\
&\quad +\cdots\cdots \\
y &= -\gamma\sin\Gamma \\
&= -\gamma_0\sin\Gamma_0 \\
&\quad -0.0087''\cos\varphi \\
&\quad +0.0062''\cos(\varphi-2L_{☾})
\end{aligned}
$$

$$+0.0029''\cos(\varphi-2L_{\odot})$$
$$+\cdots\cdots,$$

其中γ_0，Γ_0是对欧拉位置而言的，而φ为CA和春分点方向之间的交角(见图34)。

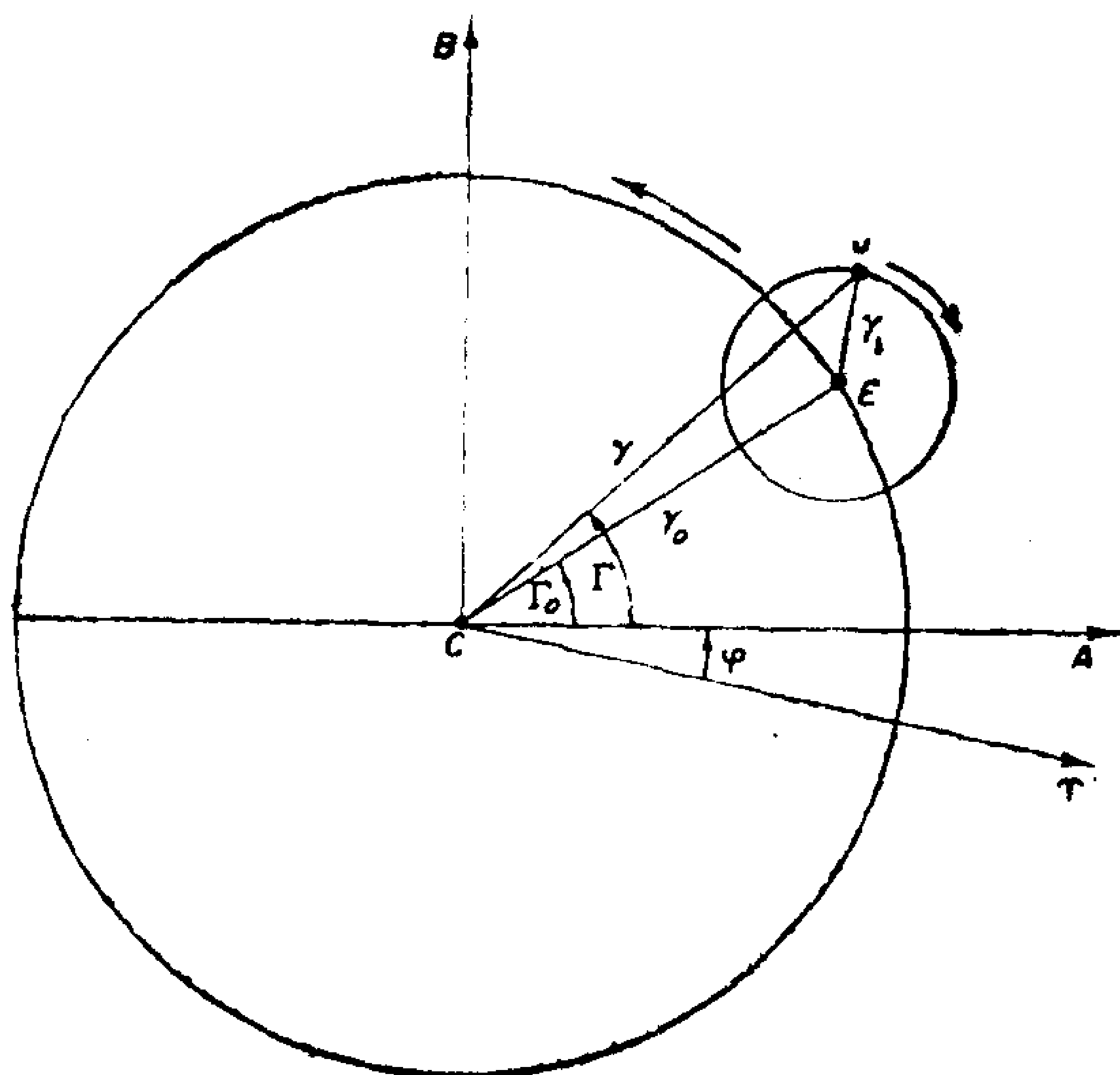


图 34 地理极的运动

C——形状极；J——自转极；E——自转极的欧拉位置；
γ——地球物理位移；γ_1——日月位移，$0\leqslant\gamma_1\leqslant0.02''$

地球表面地理极运动中的实际地球物理分量，要比刚体地球的理论欧拉运动复杂得多，也不规则得多。因为地球的形变，欧拉运动周期平均延长到14个月左右，而来自气象及其它地球物理过程的连续不断的扰动又附加了一项可变的周年分量。在19世纪人们企图通过观测来确定地理极是否确实存在任何欧拉运动，其中最出名的是彼得斯、盖尔丹和尼伦于1842到1873年间在普尔科沃所做的工作，但是第一批明确的结果是由柏林的居斯特纳从1884年开始做的一些研究中取得的。居斯特纳的结果导致国际大地测量协会组织几个站进行了观测，几年内这些观测明

确无疑地证实了极移的存在，但是它们也说明了这可能不是欧拉理论所给出的那种运动。

根据1891年张德勒对所累积的观测资料进行的分析，纽康所作的动力学解释是第一次对观测结果作出了正确的说明。张德勒通过对观测的初步讨论，发现极移由西朝东的转动周期为427天，其运动轨迹的半径为30英尺。纽康认识到这一运动可以用地球的弹性变形以及由此而来的形状轴的位移这两方面效应来加以解释，其中后一个效应使自转向心加速度发生变化，因而引起自转轴在地球内部运动。纽康所作的基本上是一种定性的讨论，但是他的论证为后来有关非刚体自转运动的更为详细的分析理论所证实。在较后的一些讨论中，张德勒确认，他所观测到的运动是两种成分合成的结果，它们的方向都是朝东的，其中一个的周期为427天，半振幅约为0.12″，另一个周期为一年，其移动范围在过去的半个世纪内变化在0.04″和0.20″之间。

从1899年下半年以来为此组织的国际纬度服务（ILS）一直对极移进行连续的观测。地极移动局限于直径约为100英尺的一个范围内，还没有任何确凿的证据可以证明存在连续性的长期位移。地理极在地球表面绕着形状极运动的速度是不均匀的，运动的轨迹是可变的而且极不规则，一般说来离开形状轴的距离不超过0.4″左右。这条轨迹基本上是一个近乎圆形的运动分量和一个近乎椭圆形的分量两者合成的结果，前者的周期是可变的，平均值约为14个月，后者的周期是一年，但是，观测表明还存在着其它一些运动分量，它们至今还没有完全解释清楚。

14个月的分量代表着因受到地球形变影响后的基本的自由欧拉运动。周年分量代表了一种受迫运动，它是对于理论刚体欧拉运动的进一步干扰所引起的，其中产生干扰的原因是在气象和其它一些地球物理过程中，地球内部以及海洋和大气中的质量不断地进行着重新分布，也在于由大气中的风、洋流以及可能还有地球内部的物质流动所引起的角动量的变化。这两个分量在形态

和幅度上都是可变的，有时候还会发生突变。高精度观测说明存在极微小的日月周日运动以及由于地球的潮汐形变所引起的其它一些效应。

潮汐、气象以及其它地球物理过程造成了质量的重新分布，从而使惯性矩和惯性积发生变化，结果，形状极在地球表面上的位置就不再是固定不变的。自转极的直角坐标 x 和 y 在实际应用中通常是对某个选为原点的平均位置而言的，但是，选用的平极对于动力学理论中所用到的形状极的关系是有些不确定的。

天文垂线

局部重力决定了当地的天文垂线，它是由该点的引力和地球的自转角速度所确定的。自转地球的表面是一个非惯性参考系，而相对于这个表面，也就是对于同这个自转表面保持相对固定的任何坐标系来说，动力学现象并不遵守牛顿运动定律。在地球引力场中的任何一点处，自由物质质点相对于惯性参考系的运动完全取决于由牛顿力学的定律所规定的引力强度，但是，由于自转，地球表面的每一点都具有朝向自转轴的某种加速度，而质点相对于该表面则具有大小相等、方向相反的加速度，后者并不是由于有什么力作用在这个质点上而引起的。然而，在考虑对于自转地球表面的相对运动时，实际情况就好象这个表面是一个惯性系，同时还有一个同该表面的加速效应相当的力附加在实际的作用力之上。在研究地球表面或地球表面附近的某个自由质点对于该表面的相对运动时，作用在单位质量质点上的表观力就是重力。它是由引力强度所产生的实际作用力和相对于地球表面的加速度所引起的表观力这两者合成的结果，后者从运动学角度来看是由地球的绕轴自转所产生的。

在地球表面或地球表面附近，作用在任一点上的引力几乎完全是由地球的吸引力造成的，但是月球和太阳也起着一定的作用。既然把重力定义为作用在地球表面或表面附近单位质量上的

表观作用力，那它就可以用一个作自由落体运动的质点相对于地球表面的加速度来量度，因此，重力就是三个分力的合力：

（1）地球的万有引力，它取决于整个地球的质量分布情况，其中包括地形的不规则起伏和内部物质的不均匀分布，沿任意方向 s 的引力强度为 $\partial V/\partial s$，其中 V 是地球的引力位。

（2）相对于地球表面的离心加速度，它是由地球自转运动造成的，地球表面上一点的加速度的方向是朝向该点的圆形周日运动轨迹的中心，其大小为

$$v^2/R = R\omega^2 = \omega^2 r\cos\varphi'$$

式中 r，φ' 是该点的地心坐标，R 是周日运动轨迹的半径，v 是自转的线速度，而 ω 为角速度。

（3）外部天体的万有引力，其中只需要考虑太阳和月球的作用。

合成后的表观力的大小就是重力的强度，而它的方向便确定了天文垂线。

太阳和月球的吸引力对重力所施加的影响是极其微小的。质点**相对地球**的加速度并不随太阳和月球的引力分量而发生改变，因为这个力同太阳或月球对地球上每单位质量物质的吸引力大小相等，而且方向是平行的。对重力大小有影响的仅仅是其中的剩余分量，即引潮力，这个力是很小的，而且在不断地变化，因此就把它同离心加速度和地球万有引力两者的合力分开来单独加以考虑。

精确到视差三次项的引潮力的位是

$$U = k^2\frac{M}{2}\ \frac{a^2}{r^3}(3\cos^2 z - 1),$$

式中 M 是引力体的质量，r 是地心距离，k^2 是引力常数，a 是地球半径，z 为引力体的地心天顶距。相对来说这个力是很小的，因而在上述表达式中用 $k^2M_\oplus/a^2 = g$ 代入后，仍然可以有足够的精度，其中 g 代表重力的强度，因此，以重力代入后就有

$$\frac{U}{g}=\frac{1}{2}\frac{M}{M_{\oplus}}\frac{a^4}{r^3}(3\cos^2 z-1). \qquad (106)$$

在对U/g进行微分时，必须记着g内含有a。

函数

$$W=V+Q+U$$

是包括日月分量在内的重力的力函数，$V+Q$称为**重力位**，其中

$$Q=\frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi',$$

通常把重力的等位面称为**水准面**，它们在任何一点都与重力矢量相正交。

重力的方向和强度的面分布

地球表面重力的方向和强度随着点位的不同而不同，而且变化是不规则的，这主要是由地形的不规则起伏和岩石圈的不均匀分布造成的，就任何一个固定点来说，由于日月引潮力以及地球物理因素的影响，重力的方向和强度也在不断地变化。

地球上重力强度和方向的分布情况只能通过观测来加以精确的测定，它们的理论计算通常同特定的假设有关，而某些假设不可避免地会带有一定的不确定性。但是，把地球作为一个整体来看，重力随地理位置而变化的主要部分是很有规则的，它取决于地球的形状和自转，所以比较好的做法是根据所采用的假设引入一个理论参考标准，而观测所得到的实际重力则可以同这个理论值来加以比较。

作为重力**方向**的天然参考基准是大地测量中所用的标准旋转椭球的法线，而重力的观测方向及其地理分布就用垂线偏差来表示。为了对**强度**的分布给出相应的表示，可以建立一个在参考椭球面上重力强度的理论公式。这样，从地球表面归算到旋转椭球后的观测强度，就用它们对于椭球面上理论重力值的偏差来表示。实际强度同理论公式给出的数值的偏差通常称为重力异常。

地球上大陆区域的实际物理表面的形状是不规则的，它不是一个等位面，但是同地球的大小相比，由地形所造成的几何不规则性以及同等位面的差距都是相当小的。海洋覆盖了地球表面的大部分，海洋区域的平均海水面必然同重力处于均衡状态，因而它就同某个等位面相重合。所以，作为一个整体来说，地球表面可以相当准确地用一个特定的重力等位面来加以表示，这个等位面与海洋的平均海水面相重合，并且作为平均海洋水准面的几何扩展而延伸于大陆区域之下。这个特殊的等位面称为大地水准面，它是一个数学面●，通常就用它来表示略去了地形起伏的不规则后的地球总体形状。

大地水准面上重力强度的分布可以通过地球表面上的重力测量来加以确定，其中需要对直接测得的重力强度加上一定的改正，而把它们归算到海水面上去。大地水准面上的重力强度同理论公式并不一致，这是因为除了等位面内质量的引力作用以外，还存在地形起伏不规则性所造成的局部引力，还有，大地水准面同参考椭球也并不严格一致。准确计算这些附加效应是不可能的，只能通过观测，并把观测值同理论值进行比较后，才能精确地把它们测定出来。利用重力异常，并根据物理大地测量学中所推证的原理，就可以确定大地水准面对于参考面的差距，而理论重力公式就是为后者所用的。大地水准面以及实际重力的其它水准面都是极不规则的，特别在地球表面附近更是如此，但是同地球的大小相比，它们对于理论重力的规则等位面的差距是相当小的。波多黎各岛的情况有点极端，该岛中心的大地水准面高了6英尺，它的曲率比无扰动海洋水准面的曲率大了好多，以至与这一曲率相吻切的球在直径上要短260英里。

● 严格说来，应该把大地水准面看作为一个物理面，它是由地球的引力场决定的，而象参考椭球面这样一类可以用一个数学公式来表述的才应称为数学面。作者的原意可能是指大地水准面并不是一个实际存在的表面。——译者注

旋转椭球外部的各个理论重力水准面是一些绕极轴的旋转曲面，但是它们之间是有区别的，因为一般来说它们都不是严格的椭球面，而且彼此之间既不相似又不平行。随着离开参考椭球面距离的增加，这些水准面就越来越变得平坦，结果对任意两个给定的水准面来说，它们在赤道部分的差距要比两极部分的差距来得大。这个曲面族的法线轨迹是朝向赤道凸起的（也就是说**天文垂线是弯曲的**），而且对于离海洋水准面具有同一几何高度的某个曲面来说，重力与这个曲面并不正交，它会有一个朝向赤道的分量。

局部重力的变化

对于地球表面任意一个固定点来说，重力无论在强度和方向上都在不断地变化。一般来说，强度的变化大约不超过 1 mGal（即 $g\times10^{-6}$），而方向的变化不会超过 0.1″。这些变化中最有规律的部分是由日月引潮力的直接作用产生的。剩下的部分则是由地球物理原因造成的，它占了总变化量中的一大半，有时候它的性质是不清楚的，并且潮汐变化会受到地球物理因素的重大影响。

引潮力是同地球的万有引力迭加在一起的，它使力场发生改变，并使重力的方向和强度都会发生变化。除了这种直接效应之外，日月引力对重力还存在着间接的影响，这就是使地球发生形变并产生固体潮，从而进一步使力场发生改变；另一种间接影响就是在海洋和大气中产生潮汐现象。无论是运动着的海潮所引起的万有引力的变化，还是在由海潮和大气潮造成的负荷变化所引起的地球表面形变中的质量的重新分布，这两方面的原因都会使许多地区的重力产生显著的变化。一天内潮汐变化对强度的影响约为 0.1 mGal，对方向的影响为 0.02″。

海潮的局部负荷，大气压力和温度的变化，以及或许还有地质过程造成的物质的移动，这些都会引起地球表面发生形变，这种形变使天文垂线对于地面的相对方向发生变化，但是这一变化

是**地球表面**相对于垂线的某种偏斜，它不是垂线本身的变化，因而对天文经纬度便毫无影响。垂线相对于地球自转轴的实际变化是由于以下因素造成的地球引力场的变化而产生的：日月引潮力，地球及其流体外层部分（指海洋及大气——译者注）的潮汐形变以及其它各种由地球物理过程所引起的地球表面及地球内部质量的重新分布。一般来说，垂线相对于自转轴的变化也会引起它相对于地球表面的某种变化，但是，相对于表面的变化是相对于自转轴的位移和可能出现的地球表面自身的任何形变这两方面因素合成后的结果。相对于附近地表面的变化可以用高灵敏度的水平摆或者用装有一部分水的长导管来直接加以观测和测定，相对于瞬时自转轴的变化则可以通过对有关的天文观测资料的分析来加以确定。

鉴于天文垂线在方位天文学的观测中具有根本性的意义，重力方向的变化对天文工作的重要性就是十分明显的了，这种变化尽管非常微小，然而通过对长时间的高精度观测序列的分析很容易把它们探测出来。目前来说，强度的变化对天文工作并不太重要，这是因为摆钟已为石英钟所代替，而后者是不受重力影响的。

由位的（106）式，**朝着**引力体的方位角方向上的水平引潮力的大小是

$$k^2 \frac{3}{2} M \frac{a}{r^3} \sin 2z$$

$$= g\left\{\frac{3}{2} \quad \frac{M}{M_\oplus}\left(\frac{a^3}{r^3}\right) \sin 2z\right\}, \tag{107}$$

而**朝上**的垂直引潮力是

$$k^2 M \frac{a}{r^3} (3 \cos^2 z - 1)$$

$$= g \frac{M}{M_\oplus}\left(\frac{a}{r}\right)^3 (3 \cos^2 z - 1), \tag{108}$$

式中 $a/r=\sin\pi$，其中 π 表示M的视差。对月球来说，$(M/M_{\oplus})\sin^3\pi=1/17\ 800\ 000$，而对太阳来说为 $1/38\ 800\ 000$。

垂直引潮力对重力的**强度**起着直接的影响。如果地球是一个理想的刚体，平衡海潮对于无扰动平均海洋水准面的高度应当是

$$S=\frac{U}{g_0},$$

其中 g_0 表示海洋水准面上无扰动的引力强度。月球平衡潮的幅度约为54cm，而太阳潮的幅度约为25cm。根据地球形变服从均衡理论这样一个假设，岩石圈对于平均水准面的潮高可以用 hS 来表示，其中 h 由地球的弹性性质所确定，$h<1$。在形变后的地球表面上，也就是离开地球中心的距离为 $d=a+hS$ 的地方，原始质量分布的重力位为 $g_0(a^2/d)$，而由于质量分布上的变异所引起的位的变化为 $kg_0S(a^3/d^3)$，其中 k 是另一个常数，它同地球的内部结构有关，把离开地心距离为 d 处的引潮力位本身 $U(d^2/a^2)=g_0S(d^2/a^2)$ 算在内，总的重力位是

$$\Omega=g_0\left(\frac{a^2}{d}+S\frac{d^2}{a^2}+kS\frac{a^3}{d^3}\right),$$

而精确到 S/a 的一阶项的**重力强度**是

$$g=-\frac{\partial\Omega}{\partial d}=g_0\left\{\frac{a^2}{d^2}-2S\frac{d}{a^2}+3kS\frac{a^3}{d^4}\right\}$$

$$=g_0\left\{1-2\frac{S}{a}-2h\frac{S}{a}+3k\frac{S}{a}\right\},$$

上式可以写作 $g=g_0+\Delta g$，其中

$$\Delta g=-2g_0\frac{S}{a}\left\{1+h-\frac{3}{2}k\right\}. \tag{109}$$

Δg 中的第一项代表日月引潮力的直接作用（108）式。因子 $1+h-\frac{3}{2}k$ 是地球形变使这一作用放大的倍数；第二项是地球

表面的潮高所引起的结果，而最后一项是由形变后质量的重新分布引起的。放大因子的数值同地球在外力作用下形变的性质有关，而且随环境的不同而不同。在岩石圈**弹性**形变的情况下，地球和海洋的联合形变所造成的放大因子约为1.15，但是在甚长周期性力的作用下，可能出现**塑性**形变，其特征是在某个不变应力的作用下应变逐渐增大，从而给出比较大的放大因子。

朝着引力体方向上的**水平**引潮力F同g_0迭加在一起，它使天文天顶**远离**引力体而移动，如果把地球的形变略去不计，则在天球上移动的角距离大小约为（以弧度为单位）

$$\frac{F}{g_0}=\frac{3}{2}\frac{M}{M_\oplus}\sin^3\pi\sin 2z. \qquad (110)$$

当自转轴在地球内部的位置发生变化时，离心加速度上所出现的变化便使重力产生少量的变化。离心加速度的任何变化使地球和海洋发生形变，而这种形变便会改变地面上某一点的万有引力。对于离心力位Q的影响取决于地理极的运动所引起的纬度变化，但是，对重力影响的大小还同在离心加速度作用下地球形变的特征有关，也就是同弹性形变或是塑性形变有关。

第九章　地方参考系的变化

地平坐标系和地理天文坐标系合在一起，便构成了用以表示任何特定地理位置处的天球实时形象的地方参考系，这两种坐标不但都和天文垂线有关，而且又都和地球的自转轴有关。因此，垂线的变化和自转轴在地球内部位置的变化对这两个系统所产生的影响，在高精度天文观测中显然是十分重要的。地球作为一个整体参与了自转轴在空间的岁差和章动，这两项运动无论对地平坐标系还是对地理参考系都是没有任何影响的。

地理坐标系取决于**垂线相对于自转轴的方向**，因此既要受到垂线变化的影响，又要受到自转轴在地球内部位置变化的影响。

从几何学角度来看，地平坐标系是由天文地平圈和天文子午圈决定的。地平圈完全由垂线所确定，但是子午圈则既同垂线有关，又和天极有关。因此，地平坐标系就受到两方面因素的影响，一个是垂线的**变化**，一个是由于地球绕着它的质心相对于自转轴的运动所引起的垂线在空间的**进一步位移**。垂线参与了地球的这一项运动，同时它与地球的相对关系并没有发生任何的变化，因此尽管天顶在天球上移动，但是天极在恒星间的位置保持不变，所以天球子午圈就在天球上移动。还有，地球表面上的地方天文子午线同样也是在移动的，因为这条子午线就是天球子午面同地球表面的交线。

地方地平坐标系

在地球表面上某固定位置O点处，地方子午面是通过天文垂线和从O点指向天极的直线的平面，它不但确定了天球子午圈，而且确定了地方地理子午线。这个平面与天球相交的大圆就是通

过天顶和天极的天球子午圈。该平面与地球表面的交线是地方天文子午线，又叫地方南北线，它与过O点的天文经圈局部地相重合，后者是不规则的。

一般说来，地方子午面并不通过地球的自转轴，原因即在于局部重力方向的不规则性，但是它始终与瞬时轴相平行，并且随地球一起围绕着这根轴而自转，恒星相对于天球子午圈的周日视运动就是地方子午面在空间的这种自转运动的反映。然而，由于垂线的变化，以及地球围绕质心相对于自转轴的运动，地方子午面在地球内部的位置不是固定不变的。在实际天文观测工作中，地方子午面同地球表面的交线以及同天球的交线（后者是在旋转的）是地球上和天球上主要的直接参考线，但是，地方子午线在地球表面的位置并不是绝对固定不变的，而天球上天球子午圈相对于恒星的周日旋转不是完全由地球绕其瞬时轴的角运动所造成的。

子午面的变化

地方子午面的运动决定了天球子午圈和地理子午线的变化，这是绕着联结点O和天极的那根直线的一种空间旋转运动（图35）。无论是垂线的变化还是地球绕其质心相对于自转轴的运动，都不会改变联结点O和天极的这条直线的空间位置。子午面必然随垂线一起运动，但是始终与自转轴相平行，而且总是通过过天极的这根固定的直线，因此，子午面就在空间绕着这根直线而旋转。

垂线的日月位移所产生的旋转，是因**相对于地球**的垂线方向变化的东西分量引起的，而引起这部分变化的原因并不是地球的任何一种运动，而是在于日月引潮力的作用。垂线也**随同地球一起**参与地球相对于自转轴的运动。这种运动使垂线指向天球上不同的一点，同时它相对于地球表面的方向则没有任何变化，但是，自转轴始终指向天球上的同一点，因此在**空间**从O点到天极方向保持不变，正因为如此，它**相对于地球表面**的方向就必然会发

生变化。所以，这种垂线运动的东西分量就使地方子午面在空间绕着指向天极的直线作进一步的旋转运动。

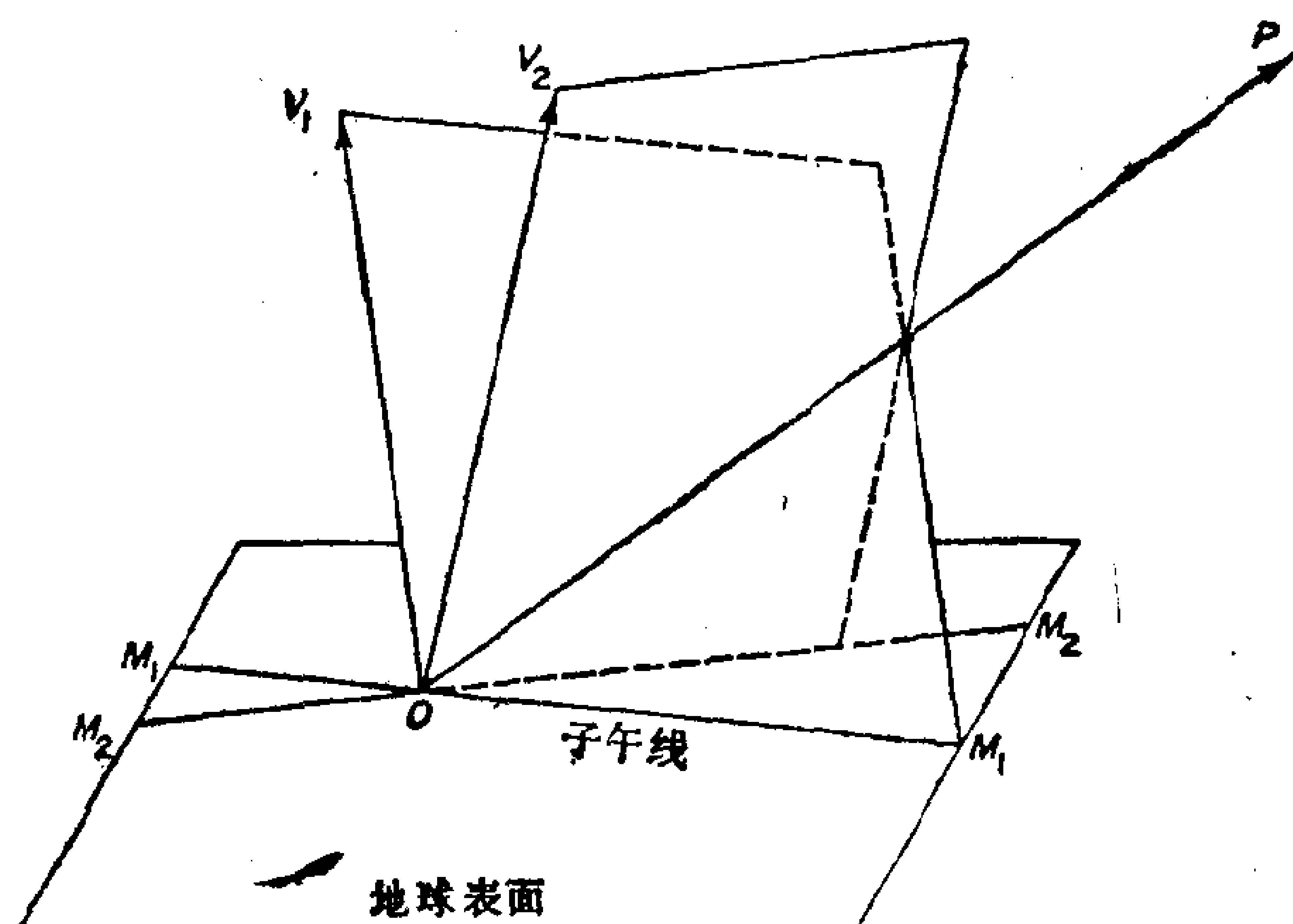


图 35　子午面的变化

地方子午面绕着指向天极方向的这种旋转，使天球子午圈在天球的时角方向上产生某种位移，这种位移便同绕瞬时自转轴的周日运动迭加在一起。而且，地球表面上的地方子午线就在这个运动的表面上绕着垂线作少量的转动，而通过O点的子午线方向上的这种变化，便引起固定在地球上的直线的天文方位角的变化。天球子午圈和地理子午线的这些变化是由在空间垂线方向变化的**东西**分量造成的，而引起垂线变化的原因是日月潮汐力和地球绕其质心的运动，后者使自转轴在地球内部的位置发生变化，并造成地理极在地球表面上的运动。**南北**分量改变天文垂线和自转轴之间的夹角，因而会使O点的天文纬度发生变化。这两种分量都使天文天顶在恒星间的位置发生位移，但是天极和天赤道在天球上的位置则不受其影响。

天球地方形象的变化

天体对于瞬时子午圈的地方时角，同由于垂线的日月变化和地理极在地球表面上的运动所引起的子午圈的变化有关。

因极移引起的地方时角的变化，可以用天文子午面同形状子午面之间的关系来加以表示，这里的形状子午面是由地球绕其质心运动的动力学理论所确定的。由于地理极对于形状极的偏离在不断变化，同时垂线偏差是不变的，因此过地球表面上O点的地方天文子午圈同过该点的形状子午圈在O点交一个角度 Δm（图36），Δm 就是天球子午圈同天球与形状子午面交线在天文天顶处的交角，它从瞬时天文子午圈起**向东**计量。

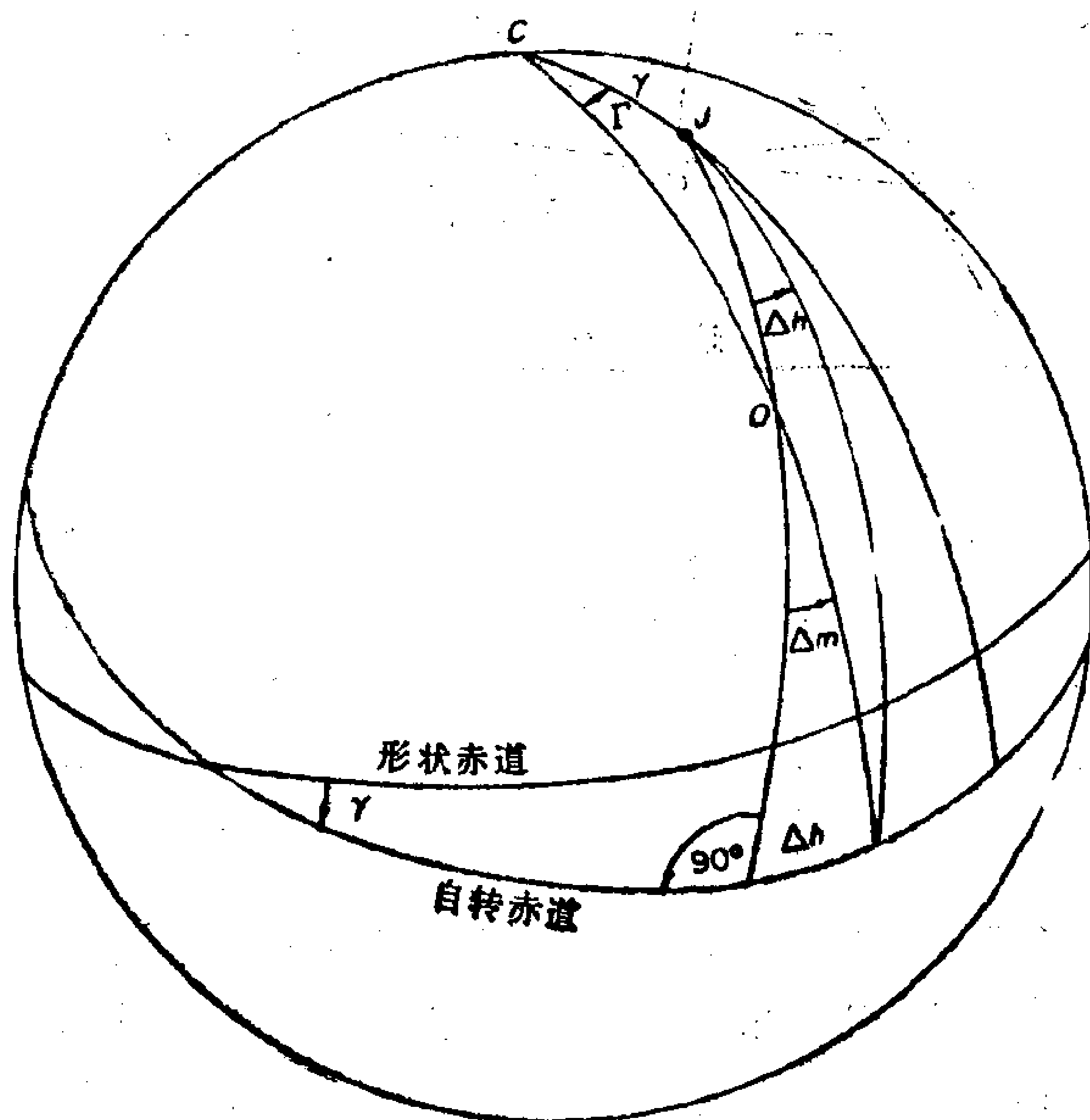


图 36 天球子午圈的变化

C——形状极；J——自转极；O——天顶；$OC=90^\circ-\Phi_0$；$OJ=90^\circ-\Phi$

对于地球表面形状纬度为 Φ_0的任一固定点来说，地方天文子午圈相对于过该点形状子午圈的瞬时位置，由这两个子午圈之间的交角 Δm 来表示。这个角度取决于地球表面瞬时自转极J同形状极C之间的相对位置，而这一相对位置是在不断变化的，由于

自转极偏离形状极的位移所造成的天球子午圈的天文方位角 Δm 由下式给出，

$$\sin \Delta m=\frac{\sin \gamma \sin \Gamma}{\cos \Phi}, \qquad (111)$$

其中 Δm 从形状子午圈南半圈朝西计量，γ 为自转极偏离形状极的角距离，Γ 是在 C 点处由形状子午圈起朝东量到 CJ 的角度，而 Φ 为瞬时天文纬度。

因此，天文子午圈与自转赤道的交点和形状子午圈与该赤道的交点之间的角距离 Δh 由下式给出，

$$\tan \Delta h=\sin \Phi \tan \Delta m,$$

这里 Δh 从后一个交点起朝西计量，它也就是瞬时子午圈与过上述第二个交点的时圈之间的交角，有

$$\Delta h=\gamma \sin \Gamma \tan \Phi+\gamma^{3} \sin ^{3} \Gamma \tan \Phi \frac{1+2 \cos ^{2} \Phi}{6 \cos ^{2} \Phi}+\cdots\cdots, \qquad (112)$$

式中 Γ 从过 O 点的形状子午圈起算。

角 Δh 就是天球子午圈对于形状子午圈在时角上的向西位移量，它是由于方位角上的位移 Δm 所引起的，而天极 J 在恒星间的位置仍然保持不变的。J 对于 C 的偏离使得向西计算的地方时角减小 Δh。

因垂线的日月变化引起的地方时角的进一步变化，是由水平引潮力产生的天顶位移的卯酉圈分量造成的。如果地球是一个刚体，由（110）式可得纬度 Φ 处天顶向东的位移是

$$\begin{aligned}\Delta z &= -\frac{3}{2}\frac{M}{M_{\oplus}}\sin^{3}\pi \sin 2z \sin A \\ &= +\frac{3}{2}\frac{M}{M_{\oplus}}\sin^{3}\pi(\cos \Phi \cos^{2}\delta \sin 2H \\ &\quad + \sin \Phi \sin 2\delta \sin H),\end{aligned} \qquad (113)$$

其中方位角 A 从北向东计量，H 是引力质量 M 的向西计量的时

角，而δ为它的赤纬。在保持有足够精度的前提下，可以把这一向东位移看作为过天顶的赤纬圈上的一段弧，因此天球子午圈在时角上的向东位移为$\Delta z/\cos\Phi$，它使恒星的时角增加，并使中天时刻提前，时角增加和中天时刻提前的量就是$\Delta z/\cos\Phi$。因月球的作用所引起的天顶向东位移为$-0.0173'' \sin 2z \sin A$，而太阳作用引起的为$-0.0082'' \sin 2z \sin A$。但是，对于天顶的这一理论位移，需要考虑地球同一个不变刚体间的差异而引起的修正。

天体的高度和方位角的变化同样也是由天顶和子午圈的变化而引起的。天极的高度总是等于天文纬度，由于天极在恒星间的位置是固定不变的，因而天极高度的变化使周日运动相对于天文地平圈的几何关系发生少量的变化。

地平参考系的变化对高精度天文测量有显著的影响，这是因为观测必然是同天文垂线联系在一起的，但是，它们对直接可见的天球形象的影响是觉察不出来的。天文天顶和天文地平圈在天球上的位置的日月变化完全是一种几何效应，它们不会产生任何明显的变化。因极移引起的变化，是由观测者在空间的实际位移所产生的，而造成这种位移的原因是地球绕其质心的运动，它使可见地平在恒星间的位置发生移动，并且改变了基点在可见地平上的方向。恒星中天时可见地平上的基点位置是在变化的，而在天顶处中天的恒星也是不同的。然而，这些效应不是累积性的，因而可见的天球形象的这些变化极为微小，对于普通的观测工作来说是发现不了的。

通过对恒星的绝对观测和较差观测之间的比较，证明了因地方参考系的变化所带来的中天天顶距的变化，完全是由天顶的变化造成的，而与天顶和天极的同时变化毫无关系。

地理坐标系的变化

通过地球表面固定点上天文经纬度观测所能精确测定的变

化，实际上完全是由地理极的运动和垂线的日月变化引起的，尽管其中许多特征乃是因地球同刚体间的差异所造成的结果。这些变化中的主要部分是由极移引起的。

人们常常还提到其它一些起因不明的变化，但是一直没有得到很好的证实。然而，一些显著的效应有时候也许很可能是由岩石圈的较差位移引起的，造成这种位移的原因有地震活动和板块活动，或者是地球表面自然地理条件的大尺度变化，例如岩石圈的热变形。质量的地质位移除了对极移产生间接影响外，偶然也可能产生直接的影响。观测所能给出的只是由极移、垂线变化以及各种地球物理过程共同作用下所决定的地理坐标。观测不可避免地带有观测误差，要受到仪器外部条件的影响，以及还会受到所观测的恒星的视位置采用值误差的影响。要消除这些误差，找出虚假的效应，以及确定每一项因素所引起的相应的那部分变化和各自的原因，这一切都需要对长时间内连续进行的一系列高精度观测结果进行正确的分析。

极移产生的变化，可以用地理极 J 相对于形状极 C 的直角坐标 x、y 来加以表示。如果以 Γ 表示从格林尼治形状子午圈起向东计量的角度值（图 37），则上述坐标为 $x=+\gamma\cos\Gamma$，$y=-\gamma\sin\Gamma$，这里 x 轴指向格林尼治，y 轴指向西经 90° 的子午圈。以 Φ_m 表示地球表面 O 点的形状纬度，而以 λ_m 表示从格林尼治起**向西**计量的形状经度，则过 O 点的形状子午圈与 CJ 子午圈方向的交角为 $\Gamma+\lambda_m$。

为了求得因 J 偏离 C 的位移 γ 所引起的纬度变化，从天球上 C、J 和 O 点的天顶所构成的三角形，我们有

$$\sin\Phi=\sin\Phi_m\cos\gamma+\cos\Phi_m\sin\gamma\cos(\Gamma+\lambda_m),$$

其中 Φ 是观测所得的 O 点的瞬时天文纬度。因此，在保证足够精度的前提下有

$$\sin\Phi-\sin\Phi_m=\gamma\cos\Phi_m\cos(\Gamma+\lambda_m),$$

图 37 纬度和经度的变化

或

$$(\Phi-\Phi_m)\cos\frac{1}{2}(\Phi+\Phi_m)=\gamma\cos\Phi_m\cos(\Gamma+\lambda_m),$$

此式可以写为

$$\Phi-\Phi_m=\gamma\cos(\Gamma+\lambda)=x\cos\lambda+y\sin\lambda, \qquad (114)$$

式中对于右端的 λ 来说，可以用瞬时天文经度，也可以用它的平均值 λ_m。

根据这个关系式，以及用动力学理论求得的关于 x、y 的（105）式，就可以确定由以下三方面因素所引起的 Φ 的变化，这就是地极的自由欧拉运动，地极的受迫周年运动，以及直接由太阳和月球对地球的引力作用所造成的周日运动。此外，还可能存在另外一种日月周日变化，那是由日月引潮力的间接作用引起的，原因在于海潮和固体潮对地球形状和惯性矩的影响。实际上，由于观测直接得到的天文纬度的精度是很高的，对于 Φ 的这些变化的观测，乃是确定地理极实际运动情况的主要方法，只有直接的日月周日变化才能从理论上加以精确的计算，或者说可以事先作出可靠的预测。

德西特❶曾经注意到纬度变化中的日月项，他指出，两倍月球平黄经项可以利用国际纬度服务（ILS）的观测结果来加以检测，而其它诸项，连同恒星的平均周年视差一起，可以解释观测到的纬度变化中的木村项的一半左右。后来也确实在纬度观测中发现了这一月球项❷。

因垂线的日月变化造成的 Φ 的变化，表现为由引潮力引起的天顶距位移中的南北分量。如果地球是一个**刚体**，那么由于引潮力的直接作用同重力合在一起，并造成天顶**向北**位移，同时使纬度**增加**，根据（110）式天顶的向北位移为

$$\Delta z_n=\frac{3}{2}\frac{M}{M_{\oplus}}\sin^3\pi\Big[\frac{1}{2}\sin 2\Phi\cos^2\delta\cos 2h$$

$$-\cos 2\Phi\sin 2\delta\cos h+\frac{1}{2}\sin 2\Phi(1-3\sin^2\delta)\Big].\tag{115}$$

---

❶ W. de Sitter, Über die von der Anziehung von Sonne und mond herrührenden Breitenvariationen. A.N.166,331 (1904).

❷ H.R.Morgan, The short period terms in the nutation as given by observation. Astr.Jour.57,232 (1952).

因月球作用所引起的纬度增加的数值为 0.0173″sin 2z cos A，而由太阳作用引起的为 0.0082″ sin 2z cos A，其中方位角A从南点起向西计量。对于实际地球来说，这个数值要乘上因地球潮汐形变的质量重新分布所引起的修正因子。另外，还存在一项垂线变化，它是由海潮的直接引力作用产生的。海潮的直接引力作用和由潮汐负荷引起的地球表面的形变所产生的作用在不同的地区是不同的，其作用影响可延伸到内陆很远的地方。

极移引起地方天文子午圈方向的变化，从而造成了经度的变化，这种变化在数量上等于天球上地方时角的变化 Δh。由于极 J 在地球表面上运动，使得过固定点 O 的子午圈绕着 O 点旋转，并且在平均位置两边来回振荡，同时，它的方向还绕着运动极在振荡。角 Δh 是子午圈离开 J 点平均方向的变化的一种量度，而 Δm 代表了离开 O 点平均方向的变化。运动子午圈偏离其平均位置的位移 Δh 使得 O 点的西经增加，增加的量为

$$\gamma \sin(\Gamma+\lambda_m)\tan\Phi=\tan\Phi(x\sin\lambda_m-y\cos\lambda_m), \qquad (116)$$

其中 Γ 从格林尼治形状子午圈起计量，这就是向西计量的地方时角的减少量。因垂线日月变化所造成的经度变化的情况是类似的。

过格林尼治的天文子午圈同样要受到这些变化的影响。因此，由于存在极移，瞬时格林尼治子午圈相对于其平均位置的西经为

$$\lambda_G=\gamma\sin\Gamma\tan\Phi_G.$$

因此，从瞬时格林尼治子午圈到 O 点的瞬时西经为

$$\lambda=\lambda_m+\gamma[\tan\Phi\sin(\Gamma+\lambda_m)-\tan\Phi_G\sin\Gamma]. \qquad (117)$$

地球表面固定方向的天文方位角的变化由角 Δm 来表示。极移使方位角 A 减小，这里的方位角从南点向西计量，减小的量为

$$\Delta A=\frac{\gamma\sin(\Gamma+\lambda)}{\cos\Phi}$$

$$=(x\sin\lambda-y\cos\lambda)\sec\Phi. \qquad (118)$$

例如，由于存在极移，一架固定的子午仪就会有可变的方位差。

第十章 地方参考系中位置的确定

在天体测量观测中所作的直接角度测量结果，以及它们同天体和观测者在地方参考系中的坐标值之间的关系，都和所采用的具体观测仪器和观测方法有关。直接从仪器度盘读数所得到的角度，代表了被观测天体相对于基准点的位置，后者是由可见参考标记来加以确定的。例如，在用航海六分仪来确定天体高度的工作中，观测所直接求得的角度是天体对于可见地平的角距离。为了得到在地平坐标系中的高度，必须确定因这一可见参考圈对于抽象的几何大圆之间的偏差所引起的改正，这是因为天文地平圈是由后者定义的。但是，无论是用铅垂线来具体地表示天文垂线，或是用一个静止的液体表面来具体地表示天文地平圈，这些都可以通过各种不同的方式在一定的仪器上反映出来，利用这些仪器可以确定代表了天顶和地平圈方向的基准点，因而就可以直接测出一个天体的天顶距或高度。例如，相对于天文地平圈的高度，是利用经纬仪或者气泡六分仪，直接从度盘读数求得的。

为了测量方位角，就必须确定子午圈，而要做到这一点除了天顶的位置之外，还需要有天极的位置。没有一种方法能够直接测出天极的位置，但是在实际工作中，可以用一条由观测拱极星的周日运动来加以确定的子午线，并且可以用一些照准标具体地表示出来。

通过这种方法，就可以把一个天体，或者旋转天球上的任何可见参考系(比如一组比较星)，同地方地平坐标系联系起来。通过这种中间媒介，就可以根据第三章中所导出的旋转天球上的坐标系同地方参考系之间的几何关系，把观测结果同旋转天球上的坐标系联系起来。相反，由于这些关系明显地同地理坐标有关，因而利用它们作为一种手段，就可以根据天文观测来确定地理坐

标，而这些关系也正是大地测量和导航中所采用的实际工作方法的基础。

地平坐标系中观测结果的归算

除了同仪器类型和观测方法有关的改正项之外，根据观测工作的目的，可能还需要考虑由于大气折射和其它观测环境条件引起的，以及由于坐标系变化所引起的，对于仪器上直接读数的另外一些改正项。

地球在不断地运动，它的表面又在不停地自转，而由于大气折射和光行差的原因，从地球表面上某一个地点通过大气所看到的天体在天球上的位置，同该天体在天球上的几何投影是不一致的，而且如果地心视差是相当可观的话，那么这个位置还同观测者的地理位置有关。在观测天文学以及它的实际应用中，作为一项既定的常规工作是要把经过大气折射改正后的观测位置，再加上一些改正数以消去由于地心视差和周日光行差造成的位移，从而归算到地心。同样，星历表中通常给出的是地心位置，这是因为针对可能应用这些星历表的每一个观测者的环境条件来提供各种星历表显然是不切实际的。地平坐标系中的观测位置，以及旋转天球上坐标系中的导出位置，都是同天球上以及地球表面上的瞬时参考系联系在一起的，这两种瞬时参考系由观测时刻自转轴的空间方向以及它在地球内部的位置所确定。

此外，天文观测就象所有的物理测量一样，不可避免地要受到观测误差的影响，其中一部分是系统误差，一部分是随机性的偶然误差，它们是由于仪器在构造和校正上的不完善、外界干扰、观测员的人差以及其它一些因素所造成的。必须针对这些误差，尽可能地对直接从仪器上取得的读数加以改正，然后才能用这些读数来求得被观测天体的坐标。

观测的改正，从直接观测得到的角度值确定在某个特定参考系中的坐标，以及与其它参考系的坐标转换，所有这些工作合在

一起便构成了观测归算的内容。

半径的归算

有时候需要针对个别的天体，特别是对于那些有明显圆面的天体进行一些特殊的归算。天体的位置是由圆面中心的坐标来表示的，但是，直接对圆面中心进行高精度的观测是不可能的，在实际工作中只能观测圆面边缘上的一些点，然后对这些观测结果加上半径改正，从而导出圆面中心的坐标。几何半径的大小取决于视差，但是圆面的视大小还同诸如光渗这样一类的光学效应有关。然而，因为天体的形状是扁圆的，因为相位的关系整个圆面可能没有完全被照亮，大气折射也会造成圆面变形，由于这些原因可见圆面可能就不是一个正圆。对于月球来说，由于月面地形起伏的关系，它的圆面边缘是很不规则的。

一般说来，采用微分公式对于求得所需要的改正项来说是有利的。例如，为了通过观测来确定圆面中心过子午圈的时刻，必须对观测所得到的圆面边缘的中天时刻加以改正，而这个改正数就是圆面半径通过子午圈所需要的时间。在任一瞬间，半径S所张的时角Δh，就是圆面中心和圆面边缘上具有相同赤纬的那一点之间的赤经差$\Delta\alpha$，$\Delta\alpha$是通过该点和圆面中心的两个时圈在天极所张的角，因为它是一个小量，我们就有

$$\Delta\alpha = S\sec\delta.$$

如果圆面**中心**在子午圈上的赤经为α，赤纬为δ，则恒星时就是$\theta=\alpha$，那么这时东西两边缘的时角Δh就是$\Delta\alpha=\alpha_C-\alpha_L$，对东边缘$\Delta\alpha$为负，西边缘则为正。圆面中心通过这一时角的速度为$d\theta/dt-d\alpha/dt$，其中$\theta$表示春分点的时角。因此，在边缘中天之后，圆面半径通过子午圈所需要的恒星时间隔τ为

$$\tau=\frac{\Delta\alpha}{1-d\alpha/d\tau}.$$

又由于边缘在子午圈上的恒星时为$\alpha-\tau$，而同一瞬间边缘的赤经为$(\alpha-\tau\,d\alpha/d\tau)-\Delta\alpha$（因为这时中心的赤经为$\alpha-\tau\,d\alpha/dt$），只

要令两者相等也可以得到同样的表达式。

因此，如果用恒星秒来表示，那么圆面中心中天和任一边缘中天之间的时间间隔为

$$\tau^{s}=\frac{S''\sec\delta}{15(1-d\alpha/d\tau)},$$

式中S和δ是圆面中心中天瞬间的视地心半径和视地心赤纬，$d\alpha/d\tau$为每恒星秒在赤经方向上的运动速度，在间隔τ内可以认为它是一个常数。

确定圆面半径过子午圈所需要的时间，是确定圆面通过任意给定大圆所经过的时间，这样一个一般性问题中的一个特例。例如，圆面升或落所需要的时间，就是直径$2S$经过地平圈的时间。当上边缘位于地平圈上时，下边缘就处于比它低$2S$的地方，又因为$dz/dt=\cos\delta\sin q(dh/dt)$，其中$q$为星位角，那么以秒表示的升或落的恒星时间隔为

$$\frac{2S''}{15\cos\delta\sin q(1-d\alpha/d\tau)}$$

$$=\frac{2S''\sin z}{15(1-d\alpha/d\tau)\cos\varphi\cos\delta\sin h}$$

$$=\frac{2S''}{15(1-d\alpha/d\tau)(\cos^2\varphi-\sin^2\delta)^{1/2}}.$$

同样，中心和边缘的方位角差为$\Delta A=S/\sin z$，因为在由天顶、圆面中心以及某一地平经圈同边缘的切点所构成的直角三角形中，$\sin\Delta A/\sin S=\sin 90°/\sin z$，又因为$\sin z(dA/dt)=\cos\delta\cos q(dh/dt)$，所以圆面半径过任意地平经圈所需要的恒星时为

$$\frac{S''}{15\cos\delta\cos q(1-d\alpha/d\tau)}.$$

在子午圈上$q=0$，上式就简化为前面所求得的表达式。位于卯酉圈上时，由（92）式有

$$\cos q = \left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\delta}\right).$$

在用经纬仪或者工程经纬仪进行测量时，角 ΔA 就是把观测圆面边缘时水平度盘的读数归算到圆面中心所需要的改正值。

对于观测月球和行星来说，因相位引起的圆面非完全照明、圆面的扁率以及边缘不规则性的改正项是因不同的天体而异的，而且还同具体所采用的方法和仪器有关。

角半径和视差的关系

设天体的地心距离为 r，线半径为 R，则 R 所张的地心角 S_0 由下式给出

$$\sin S_0 = R/r = \frac{R}{a}\ \frac{a}{r} = \frac{R}{a}\sin H_0,$$

式中 H_0 是赤道地平视差。

观测所得到的角半径由公式 $\sin S = R/r'$ 给出，其中 r' 为地面距，因此，由（41）式，严格的数值为

$$\sin S = \frac{R}{r}\ \frac{r}{r'} = \frac{r}{r'}\sin S_0 = \sin S_0\frac{\sin(\delta'-\gamma)}{\sin(\delta-\gamma)}$$

$$= \frac{k\sin H_0\sin(\delta'-\gamma)}{\sin(\delta-\gamma)}, \tag{119}$$

其中 $k = R/a$。

利用导出（39）式的那两个方程中的第二式所给出的有关 r/r' 的表达式，以及辅助公式

$$\cos\Gamma = \rho\sin H_0\cos\varphi'\cos h\sec\delta,$$

我们有

$$\sin S = \frac{\cos\delta'\cos(\alpha-\alpha')\sec\delta}{1-\rho\cos\varphi'\sin H_0\sec\delta\cos h}\sin S_0$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos\delta'\cos(\alpha-\alpha')}{\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}\Gamma}\sin S_0$$

为实际工作中数值计算的方便，科姆里(Comrie)●把这些公式的形式作了变换，使之能克服当 $\cos h$ 为小量时在计算 γ 中所出现的困难，以及当 φ' 为小量时在计算 $\operatorname{cosec}\gamma$ 中所出现的困难，并且把需要列表的项目数减少到最低限度。令

$$A=\rho\cos\varphi'\sin H_0,$$

$$B=A\sin h,$$

$$C=\cos\delta-A\cos h,$$

$$\tan(\alpha-\alpha')=+\frac{B}{C},$$

$$D=\sin\delta-\rho\sin\varphi'\sin H_0,$$

$$E=C+\frac{1}{2}B\tan(\alpha-\alpha'),$$

以及因为 $D=(r'/r)\sin\delta'$ 和 $E=(r'/r)\cos\delta'$，有

$$\tan(\delta-\delta')=-\frac{D\cos\delta-E\sin\delta}{D\sin\delta+E\cos\delta}$$

$$\sin S=\frac{k\sin H_0}{(D^2+E^2)^{1/2}}.$$

当要求不太严格时，可以令

$$m=H_0\rho\sin\varphi'\cos(\gamma-\delta)\operatorname{cosec}\gamma,$$

$$\delta-\delta'=m\tan(\gamma-\delta),$$

再略去三阶项，从（119）式我们有

$$S=S_0\frac{\sin(\gamma-\delta')}{\sin(\gamma-\delta)}=S_0\frac{\sin[(\gamma-\delta)+m\tan(\gamma-\delta)]}{\sin(\gamma-\delta)}$$

$$=S_0[1+m-\frac{1}{2}m^2\tan^2(\gamma-\delta)]. \qquad (120)$$

在子午圈上时 $\gamma=\varphi'$。

超过地心半径数值的余量部分 $S-S_0$ 称为半径增量，对于月

● L.J.Comrie, Jour.Brit.Astr.Assoc.51, 159—161(1941).

球来说这个数值是非常可观的。如果计算到一阶项，那么可以略去地球扁率，并在m的表达式中令 $\tan\gamma=\tan\varphi/\cos h$，则(120)式就变为

$$S-S_0=(H_0\cos z)S_0.$$

但是，为了高精度计算月球视差和半径，需要更精确的公式。严格的数值可以从（36）式求得，但是从（36）式的前一个方程可以导出一个公式，其可能有的最大误差为0.05″。利用近似公式

$$\frac{\cos(\varphi-\varphi')}{\cos\gamma'\cos\frac{1}{2}(z'-z)}=1,$$

式中 $\gamma'=(\varphi-\varphi')\cos A$，我们有

$$r'/r=1-m',$$

其中

$$m'=\rho\sin H_0\cos\left[\frac{1}{2}(z'+z)-\gamma'\right],$$

$$z'-z=\rho\sin H_0\sin(z'-\gamma').$$

因此

$$S=\frac{r}{r'}S_0=\frac{1}{1-m'}S_0$$
$$=S_0(1+m'+m'^2+\cdots\cdots).$$

如果保留到二阶项，取 $\rho=1$，即略去地球扁率，这时 $\gamma'=0$，有

$$m'=\sin H_0\cos\left[z'-\frac{1}{2}(z'-z)\right],$$
$$=\sin H_0\cos z'+\frac{1}{2}\sin^2H_0\sin^2z',$$

以及

$$S-S_0=S_0\sin H_0\cos z'$$
$$+S_0\sin^2H_0\left(1-\frac{1}{2}\sin^2z'\right).\qquad(121)$$

大气折射对半径和视圆面形状的影响

太阳和月球的视角直径大致上等于正常地平大气折射。因此，在看到它们的下边缘与地平圈正好相切的那一瞬间，从几何关系上来说整个圆面实际上都位于地平圈之下。但是，在地平附近大气折射的数值随着高度的变化是非常剧烈的，其结果是大气折射使圆面上边缘抬高的角度通常要比下边缘少 6′左右，因此，圆面就很明显地发生变形而成为一种椭圆状。此外，在地平附近往往还出现不规则和反常的大气折射，这就会使圆面变形，而成为种种复杂的形状。

垂直方向半径的缩短量，就是圆面中心与上边缘或下边缘的大气折射之差，又由于地平经圈向天顶会聚，因而水平方向半径也要缩短。设圆面边缘任意一点的几何位置为P，离开圆面中心的距离为S，它因正常大气折射$R=k\tan z'$的影响而位移到某个视位置P'，P'离开圆面中心的视位置C'的距离为S'。如果用θ表示P'对于圆面最高点的位置角，应用第五章中有关角距离的较差折射公式，同时略去三阶项，则我们从关于$d\Delta$的公式(式中$p_1-q=\theta$)，有

$$S'=\frac{S(1-k-k\tan^2 z\cos^2\theta)}{1+S\tan z\cos\theta}.$$

对于$\theta=90°$，S'就是缩短了的水平半径

$$a=S(1-k);$$

而对于$\theta=0°$，就是缩短了的垂直半径

$$b=\frac{S(1-k\sec^2 z)}{1+S\tan z}.$$

除了高度很低的情况之外，有关S'和b的表达式中的分母可以取为1，垂直半径的缩短量也就是圆面中心和边缘在天顶距上的简单较差折射$k\sec^2 z\Delta z$。彼此成直角的两条半径的平均值则为

$$\overline{S}=S(1-k-\frac{1}{2}k\tan^2 z).$$

高度超过 17°时，两条彼此垂直的半径之差不会超过 0.1″。

将（120）式代入上式，并略去其中含有 mk 的项，则得到以**地心**半径 S_0 表示的表达式

$$\overline{S}=S_0\left[1-k-\frac{1}{2}k\tan^2 z+m-\frac{1}{2}m^2\tan^2(\gamma-\delta)\right].$$

光渗

光渗是由对比度引起的一种光学效应，在目视观测中它会给天体视半径的测定带来误差。

例如，在黑暗的天空背景上，月球看上去是一个亮的圆面，这时用望远镜所观测到的月球视直径就要比它的几何直径来得大，但是，日食期间在太阳背景上月球看上去就是一个黑的圆面，这时所测得的直径要比几何直径来得小。

同样地，在用航海六分仪观测太阳时，光渗会给观测结果带来系统误差。太阳的视半径会测得偏大，而同时由于地平圈上部的明亮天空使得地平圈测得偏低。所以，观测得到的上边缘的高度就偏高了，但是在观测下边缘时，两种效应往往会互相补偿。这两种效应的大小同观测者、仪器以及其它的观测条件有关，而且这种关系是很复杂的，但是，大体上可以用下面原因来解释这样一个事实：对海上所作的六分仪观测的分析表明，如果不加光渗改正，观测下边缘时给出了正确的船位，而观测上边缘时，平均来说会给船舶位置带来大约 1.2′ 的误差。

地平俯角

在利用相对于可见地平的观测来确定天体在地平坐标系中的位置时，可以假定海洋地平是一个小圆，它比天文地平圈来得低，而降低的程度则同观测者离海平面的高度以及地平附近大气折射的数值有关。视地平低于天文地平圈的这段角距离称为**地平俯角**。

如果用同地球相切的视线作一个圆锥，那么投影在天球上的可见地平圈就是天球同这个圆锥的交线。因此，它同一些天体发出的光线掠过地面而在地球表面形成的那个圆是相一致的●。地球上的这个圆也就是从地球表面上方所看到的视界的范围。

设观测者离开地球表面的高度为 h，由此引起的可见地平圈下降的角度 Δ 就是几何俯角。如果把地球当作一个正球体，Δ 就是从观测者的眼睛出发对地球所作的几何切线，与观测者所在位置的地面切线方向之间的交角(图 38)。这个角度等于观测者的地心向径与几何地平圈的地心向径之间的交角。因此，如果用 R 表示地球的半径，那么就有

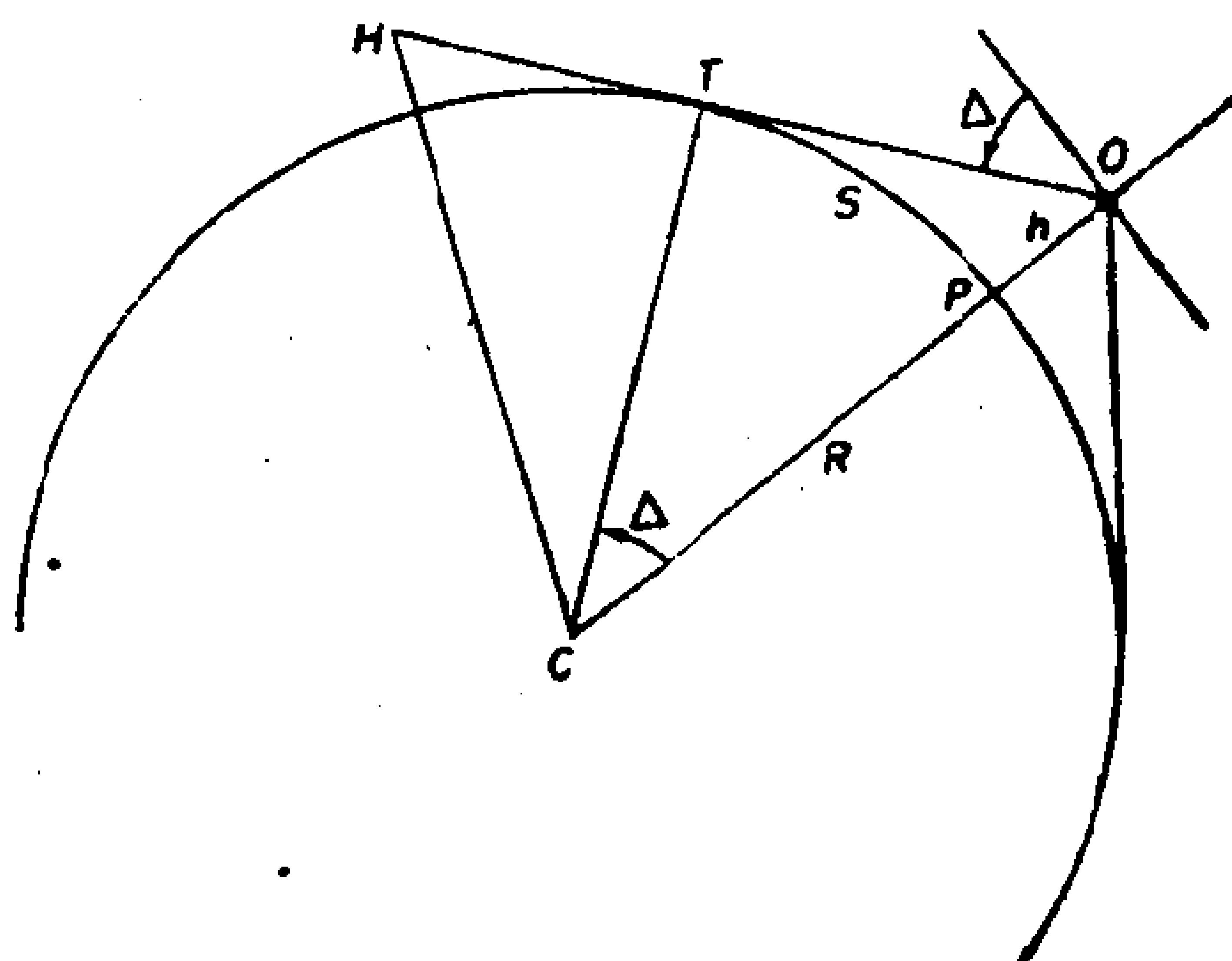


图 38 几何地平俯角

O——位于地球表面上高度为 h 处的观测者；OT——观测者对几何地平圈 T 的几何切线。过 P 点的几何地平与 CP 相垂直，与 OT 的交角为 Δ

$$\sin^2\frac{1}{2}\Delta=\frac{1}{2}(1-\cos\Delta)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{R}{R+h}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{R}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{R}\right)^2$$

● 这里的“一些天体”应理解为位于视地平圈在天球投影位置上的那些天体。——译者注

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{R}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{R}\right)^4+\cdots\cdots$$

或者用下式表示，也有足够的精度

$$\Delta=\sqrt{2h/R}\ .$$

其中 Δ 以弧度为单位。如果h以英尺表示的话，则有 $\Delta=64''\sqrt{h}$，所以，如果不考虑大气折射，那么以角分表示的地平俯角的数值，大致上就等于以英尺表示的观测者离地面高度的平方根。

以 s 表示地球表面上从观测者所在的位置到几何地平圈的距离，有 $s=R\Delta$。因为地球表面上 1′ 就是 1 海里，所以到几何地平圈的距离近似地为

$$s=1.06\sqrt{h}\ 海里=1.22\sqrt{h}\ 英里,$$

其中 h 以英尺为单位。因子 1.22 大致等于 $\sqrt{3/2}$ 。

高度 h 是地球海洋水准面在相隔一段球面距离 s 以后，沿垂线朝地心方向弯曲的量。如果地球表面上一名观测者能看到离开球面距离为 s 的某地上空的一个物体，那么 h 就是这个物体必须有的最低高度，或者换句话说，要使地面观测者能够看到离开地面高度为 h 的一个物体，那么 s 就是该物体离开观测者所能有的最远球面距离，这里没有考虑大气折射，如果保留到 h/R 的一阶项，则有

$$h=2R\sin^2\frac{1}{2}\Delta=s^2/2R,$$

$$s=\sqrt{2Rh}\ .$$

如果忽略大气折射，那么对于高度为H的观测者来说，要使他所能看到高度为 h 的一个物体，那么该物体的最远距离就是$\sqrt{2Rh}+\sqrt{2RH}$。

当距离 s 为 1 英里时，h 等于 8 英寸。

大气折射使可见视界超出几何地平圈的范围，因而实际俯角就会小于几何俯角，两者之差是一个变量，它取决于当时的大气状态。实际视线同在可见地平圈G处掠过地球表面的光线相切于

O点(图 39)。有关大气折射的基本方程 (44) 给出

$$\sin\zeta=\frac{k}{\mu(R+h)}.$$

对于掠现光线来说，$z_0=90°$, $k=\mu_0R$; 地平俯角为 $\psi=90°-\zeta$，而观测者的地心向径与可见地平圈的地心向径的交角为$\theta=\psi+\gamma$，其中 γ 从 (48) 式求得，

$$\frac{d\gamma}{dh}=-\frac{\tan\zeta}{\mu}\frac{d\mu}{dh}$$

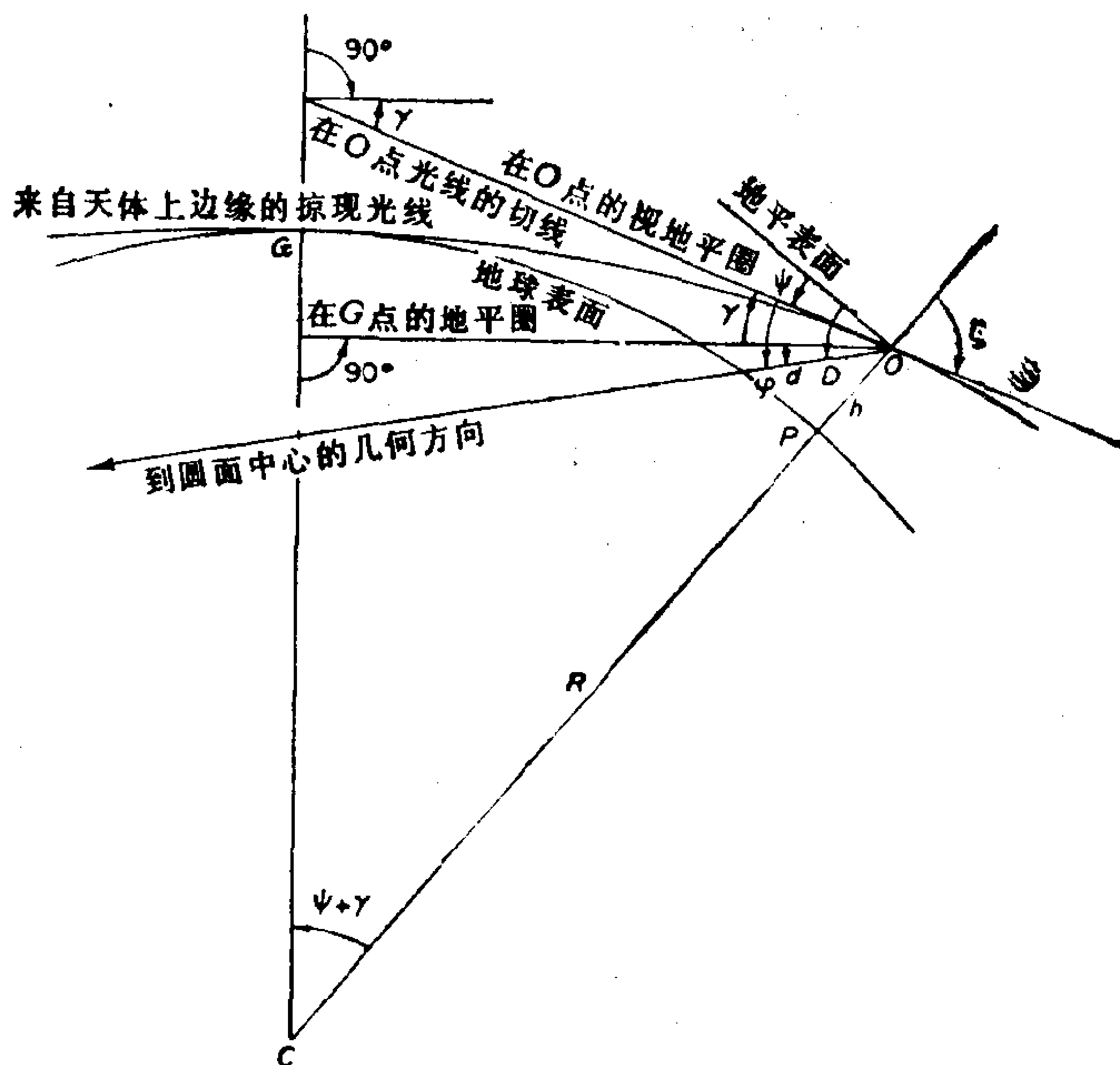


图 39 地平俯角

C——地心; γ——从 G 点到 O 点的总大气折射; ψ——O 点的视地平俯角。日面中心的几何俯角在G 点比天文地平圈低 d，在 O 点比视地平圈低 $\varphi=\gamma+d$，在位于 O 点正下方的地面点 P 处则比天文地平圈低 $D=\psi+\gamma+d=\psi+\varphi$。地球表面 G 点位于观测者 O 的视地平圈上，当上边缘从 O 点的地平圈上出现时，$d=34'+$半径。视界为 $\theta=\psi+\gamma$; 弧 $PG=R\theta$，$\theta+d=D$。

以角分表示的 θ 的数值，就是以海里表示的到可见地平圈的距离 $S=R\theta$。

由这些方程以及采用某种平均大气状态，或者某种特定的天文大气折射理论，就可以对不同的高度来计算总大气折射 γ、俯角 ψ 以及到视地平圈的距离 S 这些量的平均值。表 I 给出了一直到高度为 $h=100\,000$ 英尺的上述这些量的数值，编表时采用 $\mu=1+0.000\,277\rho$，其中 ρ 表示空气的密度，$\rho(h)$ 则采用 1935 年美国标准大气数值表●，高度在 40 000 英尺以下的 S 栏的第二列数值，是对以威利斯大气折射理论为基础建立起来的、关于掠现光线的微分方程进行数值积分求得的。

不同的作者给出了许多种用来计算俯角和视界的不同形式的近似公式。把表 I 最后一栏中 S 的数值除以 $\sqrt{h}$ 所给出的因子是变化的，当 $h=250$ 英尺时为 1.183，而当 $h=40\ 000$ 英尺时为 1.157，由此我们有

$$S=1.18\sqrt{h}-0.0001h\ \text{海里},$$

这个式子在上述高度范围内的精度好于 1 英里；要是精度稍为差一点则有

$$S=\frac{7}{6}\sqrt{h}\ \text{海里}=\frac{4}{3}\sqrt{h}\ \text{英里}。$$

对于地面测量工作来说，常常需要预先确定不同点之间的互见性，人们已经在上述关系的基础上提出了各种不同的图解法，以便用图来确定这种互见性●。

● N.A.C.A.Rept.538(1935).

● 例如，可参见 J. Loodts, La détermination en Cabinet sur l carte des visées géodésiques. Bull. Géod. No. 26, 453—461(1952); H. A. L. Shewell, Intervisibility of Points on the surfale of the Earth. Empire Surrey Rev. 16, 276-279 (1962)。

地平俯角和视界

表 I

高度 h (英尺)	总大气折射 γ°	俯角 ψ°	到地平圈的距离 S (海里) (a)	到地平圈的距离 S (海里) (b)	高度 h (英尺)	总大气折射 γ°	俯角 ψ°	到地平圈的距离 S (海里) (a)
250	—	—	—	18.7				
500	—	—	—	26.4	42 000	—	3°27′	237
1 000	—	—	—	37.3	44 000	—	3°32′	242
2 000	8.71′	0°43′	52	53.0	46 000	—	3°36′	247
4 000	12.41′	1°01′	73	—	48 000	—	3°41′	252
5 000	—	—	—	83.6	50 000	24.08′	3°46′	257
6 000	14.65′	1°15′	89	—	52 000	—	3°50′	261
8 000	16.67′	1°27′	103	—	54 000	—	3°55′	266
10 000	18.35′	1°38′	116	117.6	56 000	—	3°59′	271
12 000	—	1°47′	127	—	58 000	—	4°03′	275
14 000	—	1°56′	137	—				
					60 000	—	4°07′	280
15 000	—	—	—	143.7	62 000	—	4°11′	284
16 000	—	2°05′	146	—	64 000	—	4°15′	288
18 000	—	2°13′	155	—	66 000	—	4°19′	292
20 000	24.06′	2°20′	163	165.4	68 000	—	4°23′	296

22 000	—	2°28′	172	—				
24 000	—	2°35′	180	—	70 000	—	4°27′	300
					72 000	—	4°31′	304
25 000	—	—	—	184.4	74 000	—	4°35′	308
26 000	—	2°41′	187	—	76 000	—	4°39′	312
28 000	—	2°48′	193	—	78 000	—	4°43′	316
30 000	—	2°54′	200	201.6				
32 000	—	3°00′	207	—	80 000	—	4°47′	320
34 000	—	3°06′	214	—	82 000	—	4°51′	324
					84 000	—	4°55′	328
35 000	—	—	—	217.3	86 000	—	4°59′	332
36 000	—	3°11′	220	—	88 000	—	5°03′	336
38 000	—	3°16′	226	—				
40 000	—	3°22′	231	231.4	90 000	—	5°06′	339
					92 000	—	5°10′	343
					94 000	—	5°14′	347
					96 000	—	5°18′	351
					98 000	—	5°22′	355
					100 000	32.92′	5°26′	359

a 取自 J.Sweer, Jour.Optical Soc.Amer. 28, 327—329(1938).

b 取自 G.H.Draper 和 R.F.Haupt, Aero Digest, July, 1943.

超过 100 000 英尺（19 英里，或 30.5 公里）后，进一步的大气折射可以忽略不计，因为在这一高度上的地平大气折射已经为 33′。这时，只要在 100 000 英尺高度的视地平俯角 ψ 的数值上，加上地球曲率所引起的进一步的影响，就可以求得更大高度处的 ψ 值（表Ⅱ）。从给定高度处的几何俯角 Δ 减去 100 000 英尺处的几何俯角(5°35′)，就得到地球曲率的影响为

$$\psi = 5°26' + (\Delta - 5°35') = \Delta - 9' .$$

高空的地平俯角 **表Ⅰ**

h (英里)	Δ	ψ	h (公里)	Δ	ψ
20	5°45′	5°36′	40	6°24′	6°15′
30	7°02′	6°53′	50	7°09′	7°00′
40	8°06′	7°57′	60	7°50′	7°41′
50	9°03′	8°54′	70	8°27′	8°18′
60	9°54′	9°45′	80	9°02′	8°53′
70	10°42′	10°33′	90	9°34′	9°25′
80	11°26′	11°17′	100	10°05′	9°56′
90	12°06′	11°57′			
100	12°44′	12°35′			
200	17°50′	17°41′	150	12°18′	12°09′
300	21°37′	21°28′	200	14°10′	14°01′
400	24°44′	24°35′	250	15°48′	15°39′
500	27°23′	27°14′	300	17°15′	17°06′
600	29°43′	29°34′	350	18°34′	18°25′
700	31°49′	31°40′	400	19°47′	19°38′
800	33°42′	33°33′	450	20°55′	20°46′
900	35°26′	35°17′	500	21°59′	21°50′
1000	37°02′	36°53′			
			600	23°56′	23°47′
			700	25°43′	25°34′
			800	27°19′	27°10′
			900	28°48′	28°39′
			1000	30°11′	30°02′

视界为

$$\theta=\psi+33'=\Delta+24'.$$

如果有一点O，它离开地球表面的高度为h，当在O点看到有一个天体恰好位于地平圈上，那么不但在这个高度的地方，而且在地面上光线掠过地球的那个点的位置上，都能看到这个天体正在升起，或者正在下落。地面上的掠现点G位于观测者O的视地平圈上(图39)。因此，从几何关系上来说，G点看到的天体的俯角等于水平大气折射，一般情况这个数值是34′；在O点低于视地平圈的几何俯角为$34'+\gamma$，这里γ是从G到O之间的附加大气折射量。

同样，对于在高度为h的地方天体升起前或下落后的任意时间来说，如果在位于视地平圈某一点上，天体的表面俯角为d，那么在h高度地方低于视地平圈的俯角为

$$\varphi=d+\gamma.$$

在地球表面上O点正下方的那一个点的位置上，俯角为

$$D=\varphi+\psi=d+\theta,$$

其中ψ是h高度的视地平俯角(见表Ⅱ)。

天顶距为$90°+D$，时角可以根据天顶距、赤纬和纬度，利用任意一个有用的三角公式，比如说用(30)式来求得，或者也可以利用适当的表或图来求得。地球表面上所看到的天体在升起或下落时的时角称为半周日弧，根据时角以及半周日弧，可以求得在地球表面看到天体升起(或下落)到在h高度处天体有任意给定俯角φ之间的时间间隔，如果高度足够小，可以用微分公式(95)，这时$dz=D$。

举个例子来说，通过这种方法，可以求出在地面上看到日出、日落以及发生晨昏蒙影的时间的改正值，以求出地面上任意高度处发生这些现象的时间。当太阳上边缘恰好出现在h高度的地平圈时，通常对于太阳中心的d为50′。对某一个给定高度的地方来说，为了能给出任意特定的晨昏蒙影的照度，或者能造成

当太阳上边缘恰好位于 h 高度的视地平圈上时，
地球表面观测者的太阳中心几何俯角 D **表Ⅰ**

h（英尺）	D
500	1°16′
2 000	1°42′
5 000	2°14′
10 000	2°46′
15 000	3°14′
20 000	3°33′
25 000	3°54′
30 000	4°10′
40 000	4°41′
50 000	5°07′
60 000	5°30′
70 000	5°50′
80 000	6°10′
90 000	6°29′
100 000	6°49′

h（英里）	D	h（公里）	D
20	6°59′	40	7°38′
30	8°16′	50	8°23′
40	9°20′	60	9°04′
50	10°17′	70	9°41′
60	11°08′	80	10°16′
70	11°56′	90	10°48′
80	12°40′	100	11°19′
90	13°20′	150	13°32′
100	13°58′	200	15°24′
200	19°04′	250	17°02′
300	22°51′	300	18°29′
400	25°58′	350	19°48′
500	28°37′	400	21°01′

600	30°57′	450	22°09′
700	33°03′	500	23°13′
800	34°56′	600	25°10′
900	36°40′	700	26°57′
1000	38°16′	800	28°33′
		900	30°02′
		1000	31°25′

充分暗的天空背景，太阳必须要达到一定的俯角，而这个俯角只能通过观测来加以确定。唯一能作一般性说明的是，晨昏蒙影的持续时间随着高度的增加而迅速地缩短。高度充分高的地方晨昏蒙影就无关紧要了，日落到日出之间的时间间隔实质上就是黑夜的持续时间，不过由于存在大气的缘故总要有一些光线散射到地球的阴影里，比如全食期间所看到的月球的样子就是一个明证。

地球表面的日心几何俯角，是看到太阳上边缘正在升起或正在下落的那个地方的高度的函数，我们可以根据用这种函数关系所编成的表，反过来确定对地球表面有任意给定俯角时，看到太阳正在升起或正在下落的那个地方的高度。用这种方法所算得的高度，是当太阳位于地球表面某观测者地平圈以下给定俯角之时，该观测者天顶方向上日照区下限的高度，地球表面正上方比这更高的任意一点，都会处于大气的日照区之内。

有一种类似的理论适用于在O点看到太阳升起之后或下落之前，这时，光线最接近地球表面而且与地球表面相平行的那一个点处于地球正上方高度为H的地方，而不再是地球表面的掠现点●。

各项观测归算的次序

进行各项归算的先后次序可能是很重要的，在编制或者使用各种改正数表时往往要特别仔细，尤其当在同一本表内包括了两

● 作为这个问题的一个具体例子，h=275km，位于有效大气折射范围之外，该例说明了第五章图 14 中的原理。参见 Astr.Jour.68，348—351(1963)。

个或两个以上的改正值时更是如此。例如，在地平坐标系内，如果地平俯角很可观，那就必须**首先**对观测所得到的相对于可见地平圈的高度进行有关俯角的改正。**然后**才能用经过改正后的高度作为引数来查大气折射表。在编制以观测高度角和人眼高度为引数以求得准确的高度角改正这样一种双引数表的工作中，有时就没有考虑到这种归算的次序问题，结果在高度角很低和高度又大于 100 英尺的情况下，就会造成相当可观的误差，不过正确地编好这一类的改正表是很容易做到的。

同样，观测的高度角经俯角改正之后，紧接着就必须作大气折射改正，然后才可以用经改正后的高度角为引数来求视差改正，但是，大气折射改正可以同视差表的编制工作合并，所以我们可以用仅仅作过俯角改正后的观测高度角为引数来编制视差表。

在作视差改正时，所采用的观测位置是对于**因光行差效应而提前了的时刻**而言的，但是所加的**改正值**是对应于**观测时刻**的改正值的。

除了大气折射和视差改正以及需要时应作俯角改正之外，对于太阳或月球的上下边缘所作的观测，还必须加上半径改正。半径改正可以加在视差改正之前，也可以加在视差改正之后，但是在月球的情况下对于半径增量问题必须有充分的注意。月历表中所列出的是地心半径。所谓半径增量就是对于中心和边缘的视差改正值之差。在先对月球边缘的观测高度作了俯角和大气折射改正之后，接下来就作视差改正，这样得到的是边缘的观测地心高度，**然后**再根据所观测的是下边缘还是上边缘，再加上或减去表列半径值，从而给出月面中心的地心高度。但是如果**先加**半径改正，**后加**视差改正，则为了求得月面中心的站心高度，就一定要对表列半径加上半径增量。如果先加的是视差改正，那么增量效应已经隐含在内了，因而不再需要专门计算增量。

因纬度引起的地平视差增量对于导航工作来说是不用加以考

虑的。

视差改正隐含的仅是因地球形状对天球形象的影响而带来的改正。天球坐标系，以及地球表面的天文经纬度，都同地球的形状无关，因为对它们的定义都不牵涉到地面的形状。与天文观测有关的是这些坐标系中抽象的几何参考圈，而不是地球的表面，例如，天体对于可见地平圈的角距离并不是天体的高度。近距天体的观测位置与观测者相对于地心的位置有关，因而也就同地面的形状有关，但是这一效应已经包括在视差之中，因为视差的大小就与观测者的地心距离有关。地心距离是根据海洋水准面的形状和大小，以及观测者离海平面的高度来加以确定的。不管离海平面的高度有多少，视差是当观测涉及天文地平圈时所要加的仅有的改正。在一个孤立的高地上，如果观测与可见地平圈有关，那么为了把观测结果归算到观测者所在高度的天文地平圈，就需要进行俯角改正。

天体的视出没与**地面**视差有关●，但是对于一般的计算精度，以及在由大气折射造成的不可避免的误差范围内来说，同海平面上数值的差异的影响是可以忽略不计的，即使对月球来说也是如此。

地理参考坐标系

在天文地理坐标系中，地球不规则的自然表面上一点的经纬度是由这一点的地方天文垂线所确定的，它与该点的地形情况无关。垂线的方向与通过这一点的重力等位面相垂直，而由于各个等位面彼此间既不相似又不平行，所以天文经纬度不仅同该点在地平方向上的位置、而且还同它在垂线方向上的位置有关。从总体上来说，重力水准面向两极会聚，而天文垂线则是这样的一条曲线：它位于子午面内，而且凹向自转轴，但是，由于不同点上

● 地面视差指由于测站离海平面的那段高度引起的视差效应——译者注

重力的不规则性，实际垂线的曲率是不规则的。对于许多工作来说，必须把地理坐标或者其它的观测量归算到海洋水准面，或者归算到另外某个公共等位面。原则上说，从理论重力公式，可以推导出由于水准面的不平行性引起的对于直接测量值的改正值，但是在实际工作中，由于局部重力异常，用这种方法只能求得近似改正值，而利用重力测量所得到的实际重力值可以得出更为令人满意的结果。

我们可以通过几种不同的方式，来定义对于海平面上某一点的高程的量度，比如，可以把它定义为沿着通过这一点的不规则弯曲垂线所量得的离开大地水准面的距离，或者定义为从该点到大地水准面的垂直距离，或者也可以用其它的一些方法来加以定义●。

为了确定高程，根据观测条件可以用三种不同的方法。进行高精度测定所用的是大地测量水准仪；方法是沿着不同的水准面，每隔一段不长的距离进行连续的瞄准，用刻度尺测出垂直于这些水准面方向的高差。由于水准面不平行，测得的各段高差之和并不严格地等于水准测量路线两端的高程差，而如果沿着不同的路线进行水准测量的话，那么通常情况下可能得到略为不同的结果。因此，为了求得某一点对于海平面的高程必须加上一项改正，称为**正高改正**。在由加里福尼亚州圣地亚哥到华盛顿州西特尔的一条高精度水准测量路线中，有很大一部分路程是从高地上通过的，这条路线上的正高改正总计达 1.25 m。精度差一些的测定工作是用三角高程测量，这时，根据所测得的竖直角和水平距离来计算高差。近似高程由气压高程测量求得，这时，高程是根据大气压与海拔高之间的关系来加以确定的。

海拔高的确定同天文测量无关，但是垂线的变化和挠曲对测量结果是有影响的。特别是，在某些观测条件下高精度水准测量

● 例如，可参见 Bull. Géod. No.32, 107-145(1954)。

要受到垂线日月变化的显著影响；此外，它还要受到地球表面形变，例如，由热效应引起的周日振动的影响。地球表面的形变并不直接影响到天文垂线的空间位置，因此也不会使纬度发生改变，但是，它们会影响到在测量过程中所进行的仪器的校正工作。

设地球为一个刚体，水准线长 s km，方位角为 α，则在这条水准线上垂线的日月变化的改正值为

$$\Delta H=[k\sin 2z\cos(A-\alpha)]s,$$

式中 ΔH 以 0.01 mm 为单位，对月球 $k=8.5$，对太阳 $k=3.9$，z 表示天顶距，A 为方位角。为了方便起见，在实际工作中应用这一公式时所采用的是列线图、表格，或者一些适用于具体观测条件的近似公式。

在大地参考系中，是根据地球表面所作的几何测量，通过计算来确定地理坐标，而不是通过直接确定坐标的天文观测来做到这一点，所以求得的坐标值与天文坐标系的不规则性和变化无关。然而，天文观测是大地测量中一项必不可少的辅助工作，一方面是因为在大地测量中特别容易受到各种观测误差的影响，而天文观测可以对这些误差起到控制的作用，另一方面为了确定大地水准面以及建立与天文坐标系之间的联系，也必须进行天文观测。此外，大地测量就象天文观测一样，是在不规则的地球自然表面上进行的，它所用的仪器要根据铅垂线和水准器来进行定向，在大地坐标计算中，需要把直接测得的量归算到参考椭球面上，而这个椭球面不仅同局部重力，还同椭球的几何性质有关。

海平面归算

如果垂线曲率的变化是有规则的话，那么天文经度就与高程无关，但是在垂线的不同部位上纬度还是在改变的。水准面在向两极会聚的过程中，朝着海平面方向向下倾斜，因此，等位面离开海平面的高度 h 以速率 $dh/ds=\tan I$ 减小，其中 I 是这个等位面与海洋水准面的倾角，而 s 是在海洋水准面上朝极方向的距

离。在有足够精度的情况下，$ds = R\,d\varphi$，这里R是地球半径，而$I = dh/R\,d\varphi$。角I也就是h高度的垂线同海平面上垂线方向所交的角。因此，h高度处的天文纬度比海平面上的纬度大一个量I。在等位面上$gh=$常数，对此式微分并除以$gh\,d\varphi$，就得到$dg/g\,d\varphi + dh/h\,d\varphi = 0$，于是有

$$I = -\frac{h}{R}\frac{dg}{g\,d\varphi}.$$

如果大地水准面上的重力强度服从参考椭球面上重力强度的理论表达式

$$g = g_e(1 + b\sin^2\varphi),$$

那么，把h高程处直接观测到的纬度值归算到海平面所需要的改正值是

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= -\frac{b\sin 2\varphi}{R}h \\ &= -0.000052''h\sin 2\varphi \quad (h\text{ 以英尺为单位}) \\ &= -0.000171''h\sin 2\varphi \quad (h\text{ 以公尺为单位})\end{aligned}$$

上式是一个有足够精度的近似公式。在实际大地测量中正式应用的就是这个改正值，但是因为实际的重力异常，上述公式只能认为是一种粗略的近似。

在高精度测量工作中，有时候还需要进行因椭球几何性质引起的附加改正。例如，只有当两个不同点的大地经度或大地纬度相同时，通过这两个点的大地垂线才会处在同一个平面上。要是有一架用铅垂线或水准器进行定向的仪器，从一个点向另一个点瞄准，那么实测得到的水平角，就是通过视线和测站地方垂线的平面的方位角。一般情况下，这个平面并不包含过另一点的垂线，而只是在被观测点上与该垂线相交。因此，观测的方位角与这条垂线在椭球面上的投影的方位角不相等，两者之差与被观测点的高度有关。如一点的高程为h，观测的方位角为A，A从南向西计量，则为了求得该点在参考椭球上投影点的方位角，所需的

改正值为

$$\Delta A = +\frac{e^2 h}{2a \sin 1''}\cos^2\varphi \sin 2A \text{ 弧秒},$$

式中 e 表示椭球的偏心率，a 为赤道半径。在纬度 45°，$h=1000$m 的地方，当方位角为 45°时的这一改正值为 0.055″。通常，这项改正可以忽略不计，但有时是要加的。在横贯美国大陆的三角测量中，这项改正的一些最大值出现在跨越罗基山脉的那条弧上，它们的数值不到 0.30″。

地理位置的确定

任一瞬间，天空所呈现的形象对地球上不同的点来说是不同的，天文观测就是根据这样一条普遍性原理来确定地球表面上点位的经纬度，因而通过对天球形象的观测，就可推出观测者所在的地理位置。例如，领航员就是通过观测天空某一具体位置上的一个天体，并从星历表上查得它在旋转天球上的位置，来确定能在这一时刻，于天空这一被观测部位上看到这个天体时，他在地球上应该所处的位置。

要说明这一点，最简单的就是用北极星这样一个熟悉的例子：当我们在地球的弯曲表面上旅行时，北极星始终处于非常接近正北的方向，但是随着地理纬度的不同北极星在地平以上的高度是在改变的，因此北极星不但可以用来确定方向，还可以用来测定纬度，不过对于确定经度它是毫无用处的。同样，如果知道一个天体的赤纬，那么根据它在子午圈上的高度就可以得出纬度，很久以来在海上就是利用这个方法，通过观测正午的太阳来求出纬度的。

地理位置和天球形象之间所存在的特定关系，是实际工作中用来确定时间、方向、经度以及纬度的种种方法的基础，这种关系又随着观测条件的不同而不同：在固定的天文台上，观测工作是用高精度的仪器来进行的，而在地面测量工作中所用的必然是一些精度比较差的仪器，至于海上或空中的导航员，他的观测工

作更要受到一些苛刻条件的限制。对于任何具体的目的来说，我们都可以根据表示赤道坐标系、地平坐标系以及地理坐标系彼此间关系的一般公式，来求得所需要的那些关系。把这种一般性关系用不同的方式组合起来，或者利用它们的一些特殊情况，就可以制订出许多种方法，来确定纬度、经度、方位角和地方时，这些量可以分别地加以测定，也可以按不同组合方式进行同时测定，其中或者是观测一颗、两颗以至多颗恒星，也可以观测其它的一些天体，根据观测条件的不同，人们已经发现许多原理上可行的方法在实际工作中是很有用的。

在有关实用天文学、大地测量学、测量学以及导航等方面的教科书内，对于确定地理位置所常用的观测方法、仪器以及具体做法都有详细的介绍。它们的应用实例，以及适用于特定观测条件下方法上的改变，都经常不断地出现在有关这些课题的期刊上。对于利用已有的设备来进行具体的工作来说，可以采用几种不同的方法，至于哪一个比较好，一般说来就取决于在必要的初始数据和观测数据中所包含的误差的大小，以及这些误差对最后结果影响的大小。对任何一种方法来说，主要的问题是要选定一组恒星，并针对所用的具体仪器确定一种观测纲要，以把各种误差减少到最低限度。

对于一定的方法来说，往往在某些特殊时刻进行观测可以得到最高的精度，比如在中天或过卯酉圈时观测，或者观测天顶附近的天体。许多情况下，观测拱极星是特别有利的。正因为这一点，在可以观测到北极星的那些地区，就广泛地用北极星来测定纬度和方位角。

许多常用的方法在高纬度地带就变得不切实用，甚至完全行不通。具体来说，纬度超过50°时，高精度方位角的测定变得越来越困难，常规的北极星观测方法就不能令人满意了，这时，利用赤道附近恒星的另外一些观测方法即使测时误差的影响比较大，还是比观测北极星来得有利。

对于海上或空中来说，唯一能实际应用而又有足够精度的天文观测是测量高度，因此，领航员必须通过观测天体相对地方地平圈的高度，来确定他在地球表面上的位置，这种方法与天体的方位角是没有关系的。目前，在高度测量中所使用的是六分仪，这种仪器在18世纪初期开始使用，后来又作了一些改进，在更早的年代里，普遍使用的仪器是象限仪、星盘以及十字杆❶。

就现代来说，初期导航工作中具体所用方法的特点是，通过不同的观测来分别测定经度和纬度。纬度是根据中天时天体的高度来加以确定的，通常所用的是对太阳的正午观测，或者是观测北极星，至今在海上通常还是采用传统的正午观测。即使在古代，也已经能够根据这个原理非常粗略地来确定纬度。与此相反，经度测定所涉及到的具体困难，直到最近才得到令人满意的解决。用天文方法测定经度，原则上取决于求出地方时与同一瞬间零子午线时之间的时间差。地方时可以通过天文观测来加以测定，但是在精密航海时钟发明之前，格林尼治时的测定实际上几乎是一项不可解决的难题。

在精密时计投入使用之后，就可以通过观测位于正东或正西方附近的某个天体，来求出地方时，再根据地方时来确定经度。例如，观测清晨或黄昏时太阳的高度角，从航海年历查取赤纬，再根据盲航法求得纬度，这样由（30）式便给出了太阳的时角，也就是地方视太阳时。由航海年历查取时差，并根据时计得到观测时的格林尼治时，这样经度就很容易求出来了。

分别测定经度和纬度的做法目前已经为其它一些方法所取代，这些方法依据的基本原理是，天体观测的天顶距，就等于地球表面上从观测者起到这一天体位于天顶的那一点之间的角距离。这个星下点的地理纬度就是该天体的赤纬，它的经度就是格

---

❶ 今天，六分仪导航方法已越来越为人卫多普勒观测等无线电导航技术所代替。——译者注

林尼治时角。在为船舶和飞机导航出版的历书中，直接以表格形式列出了太阳、月球以及一些亮星的格林尼治时角和赤纬。对于一些导航星来说，列出了恒星的时角和赤纬，同时还给出了春分点的格林尼治时角。因此，观测时刻星下点的地理位置可以直接从历书中求得。以这一个点为圆心，以观测的天顶距为角半径作一个圆，观测者就位于这个圆上的某个位置。如果观测两个天体，或者在两个时刻观测同一个天体，并考虑这一时间间隔中观测者的运动，那么就可以确定两个位置圆，而观测者就位于它们的交点上。

两个位置圆还会相交出第二个点，不过只要适当选择被观测的天体，总是可以使两个交点相距很远，这样就可以明确无误地找到观测者所在的位置的那一个点。例如，两个天体不允许在近乎相同的方位角上。一个常用的规则是"一星在头，一星在弦"●，或者对于常用的三星定位法来说则是"等方位角间距"，因为它提供了某种校核依据。对于领航员来说，要在航海图上画出实际位置圆，那是既不必要也不可能做到。实际上所画的是一条短的直线，这个线段代表了位置圆上位于在船的盲航位置附近的很短的一小段弧，这条线称为**位置线**。位置线是在1837年由美国航海家萨姆纳（Sumner）船长所提出，因而常被称为萨姆纳线●。目前用来确定位置线的方法是在这以后由法国航海家马尔克.圣.伊莱尔（Marcq St.Hilaire）所提出的。

在这个方法中，先要确定一个假定位置，它可以是盲航位置，也可以根据方便的原则在这附近选一个有整数经纬度值的点。为了确定在这个假定位置上所观测到的天体的高度和方位

● "一星在头，一星在弦"的选星原则指的是在航海中定船位时，所观测的两颗星应该一颗在船体的正前方，而另一颗在某一侧翼。这样两个位置圆的两个交点相距很远，船舶的位置就不会定错了。——译者注

● 在 The American Practical Navigator（U.S.Navy Hydrographic Office Publ.No.9)和 Sky and Telescope, September(1942)中援引了萨姆纳本人的说明。

角，就要解算地球表面上由星下点、地极以及这一假定位置三者所构成的球面三角形，这个三角形是天文三角形在地球表面上的投影。在实际工作中并不一定要进行三角计算，而可以查导航用表，后者实质上就是一些三角解算用表。由此求得的高度和方位角便给出了从假定位置到星下点的距离和方向，通过假定位置的位置线与这个方向相垂直。由于过假定位置的位置圆与过实际位置的位置圆必定同心，因此通过假定位置的位置线与所要求的位置线基本上互相平行，其中少量的差异是由于从这两个位置到星下点的方向之间可能存在的某些差异引起的，对于导航工作来说则可以忽略不计。通过这两个位置的两条平行线之间的距离，就等于观测高度和计算高度之差，它可以很容易地标在航海图上，因此实际位置线也就可以画出来了。

航海年历上的表列格林尼治时角和赤纬，是对于瞬时赤道和瞬时春分点的视地心坐标值。为了应用这些表列数值，要在观测高度中减去大气折射的影响，而且必要时应作有关半径和俯角的改正；此外，当视差比较大的时候，还要通过视差改正把结果归算到地心。对于高速飞行的飞机来说，还需要对称为**科里奥利效应**的天顶视位移作进一步的改正。当相对于自转地球表面沿着一条大圆航线作匀速运动时，相对某个惯性系的空间轨迹是一条曲线，因而在垂直于速度的方向上不断地受到某种加速度的作用。在北半球，这个加速度的方向指向速度的左方，在南半球则指向右方，加速度的大小为

$$a = 2\omega v \sin \varphi,$$

式中 v 是速度，ω 为地球的自转速率，而 φ 是纬度。它同重力 g 的作用合在一起，使视天顶距发生位移，因此使推算出来的位置线位移一个角度 b， b 由式 $\tan b = a/g$ 给出。如果速度 v 以结为单位●， b 以角分为单位，则下式可以有足够的精度：

● 1结＝1海里·小时$^{-1}$，为航海中常用的速度单位。——译者注

$$b=\frac{2\omega v\sin\varphi}{g\cdot\text{arc}\,1'}=\frac{2\times0.0000729212}{32.2}\times\frac{6080}{3600}$$

$$\times3437.7\,v\sin\varphi=0.0263\,v\sin\varphi.$$

在北半球，天顶和位置线的位移朝向航线的左侧，因此，必须把推算出来的位置线平行地向右方移动 b 海里的一段距离。

在陆地上，无论对固定的还是对可携带的仪器来说，它们都可以安上一个牢固的基座，这样就可以确定出子午线，因而不但可以精确地测定高度，而且也可以精确地测定方位角。利用常用的一些仪器，就可以使地理位置的测定精度大大高于海上或空中的测定精度，而且所能使用的方法的种类也要多得多。

通过观测具有任意方位角的一颗恒星或其它天体的高度或天顶距，可以确定天文纬度。观测中天或中天附近天体的高度来测定纬度是一个特例，它与第七章所推导的原理是一致的。在一般情况下，关系式（26）为

$$\cos z=\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\cos h,$$

式中 h 为地方时角，上式可以写为

$$\sin(\varphi+F)=\cos F\cos z\,\text{cosec}\,\delta,$$

式中辅助量 F 由下式给出

$$\tan F=\cot\delta\cos h.$$

方位角本身是不需要的。根据观测时间，再借助天文年历就可求得时角，这里或者利用关系式 $h=\tau-\alpha$ 来求；或者根据格林尼治时角（GHA）和西经，利用关系式 $h=\text{GHA}-\lambda$ 来求。

微分关系式

$$d\varphi=-\sec A\,dz-\cos\varphi\tan A\,dh$$

表明，如果根据单一高度来确定纬度，那么当 A 越是接近 0°或 180°，也就是天体越是靠近子午圈时，高度和时间的观测误差的影响就越小。这是近子午圈观测的普遍优点之一，也是观测拱极星的特定优点之一。我们可以利用一架子午仪或经纬仪来观测子午高度，但是用这些设备所确定的纬度的精度并不是最高的。用

特制的仪器，观测天顶两边具有相同或近乎相同高度的两颗以上的恒星，可以获得最高的精度。例如，有两颗恒星，在天顶南北近乎相等的天顶距处的中天

$$z_n = \delta_1 - \varphi, \quad z_s = \varphi - \delta_2,$$

纬度就是

$$\varphi = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2) + \frac{1}{2}(z_s - z_n),$$

因而只要测量微小的天顶距差 $z_s - z_n$，就可以求得纬度。如果 z 不大于 30°左右，而且两次测定的时间又很接近，这时用天顶仪这样一种专门设计用来测量微小天顶距差的仪器，就可以取得最高的测定精度。测定纬度的这种方法称为**赫瑞鲍-太尔各特**方法。要是利用照相天顶筒观测接近天顶的恒星，那所得到的精度就更高，这种仪器是高精度测时的主要设备之一，我们将在第十五章中给予介绍。

还有一种方法是确定两颗以上恒星到达严格相同的天顶距的时刻，通常这一天顶距为 30°，利用一种称为**棱镜等高仪**的仪器可以以很高的精度进行这项工作。这时，纬度由下式给出，

$$\tan\varphi = \frac{\cos\delta_1\cos h_1 - \cos\delta_2\cos h_2}{\sin\delta_2 - \sin\delta_1},$$

这个式子是从（26）式推导来的。要是有两颗恒星在相隔不久的时间内到达子午圈附近的给定高度，一个在天顶以南，一个在天顶以北，那么这个方法所达到的精度为最高。

除了这些以外，还有许多精度比较低的方法，观测一颗拱极星上下中天的高度便是其中的一种。这里需要先作有关大气折射的改正，并且当精度要求比较高的时候还要加上有关赤纬变化的改正，然后把上下中天的高度取平均便得到纬度。如果已知某个垂直圈的方位角，那么也可以观测天体过这个垂直圈的时刻来求得纬度，因为从（26）式中的第二、第三两式有

$$\cos h\sin\varphi - \tan\delta\cos\varphi = \sin h\cot A.$$

这个方法用在卯酉圈附近最为精确，这时星位角达到最大值，因为

$$d\varphi = \pm \frac{\cos q \cos \delta}{\cos z \sin A} dh.$$

根据在子午圈东西两边过卯酉圈的时刻有，

$$\tan \varphi = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) \tan \delta.$$

就实际工作来说，高精度的测定经度仍然是最为困难的一个问题，因为它牵涉到同一瞬间地方时与过本初子午圈时刻之间的比对。在过去不同的时期内，根据当时所有的仪器设备，应用了各种各样不同的方法。目前，几乎毫无例外地用无线电时号来进行时间比对。最精确的方法是用一台阴极射线示波器来监测无线电时号。

根据任意天体的方位角，并测出从某个可见目标到达过该天体的地平经圈之间的水平夹角，就可以求得地球表面上观测者到这个目标之间的连线的天文方位角。对这项工作来说，观测拱极星特别有利。不管在地球上的哪一个半球，根据观测的时间可以求得恒星的方位角，这时所用到的关系式是：

$$\tan A = \frac{\sin h}{\sin \varphi \cos h - \cos \varphi \tan \delta}, \qquad (122)$$

上式是从（26）式来的，式中 A 从北点起向东按 360°计量，而 h 从子午圈起向西按 24 小时计量。这个关系式的常用形式为

$$\tan A = -\sin h \cot \delta \sec \varphi \frac{1}{1-a},$$

式中 $a = \tan \varphi \cot \delta \cos h$，$1/(1-a)$ 可以用 a 为引数查表求得。微分关系式

$$\sin z \, dA = \pm \cos q \cos \delta \, dh + \cos z \sin A \, d\varphi$$

表明，在大距或大距附近观测一颗拱极星时，纬度采用值和观测时间的误差的影响为最小，这时 $q = 90°$，而 A 接近 0°或 180°。

大距时的方位角A可以按（91）式求得。

确定方位角的一种精度比较低的方法是观测天体的高度，然后根据高度、赤纬和纬度，按（31）式来计算方位角。

利用一台地平装置的仪器，或者一架棱镜等高仪，在子午圈东西两边等高的位置上观测同一颗恒星，就可以直接定出子午圈，两次观测的水平度盘读数的平均值就是子午圈上的读数值。

通过实际观测所直接得到的地理坐标，是由观测点的瞬时天文垂线和瞬时子午面所确定的天文经纬度。通过对足够长时间连续观测序列的比较，就可以确定由于极移和垂线的变化所引起的坐标变化。为了求得这些用来作相互比较的观测结果，就要采用特定的方法和仪器，这对于想要确定地理坐标变化的工作来说是十分重要的，因为除了不可避免存在的一般观测误差之外，直接得到的观测值往往还带有与测定方法和观测设备有关的一些附加变化和不确定性。

例如，根据恒星高度的单独观测所求得的纬度，就会带有因大气折射改正的不确定性造成的误差。由于被测恒星的自行误差，就可能使不同时间测得的纬度值带有系统性的差异。同样，根据那些和一般的月球目测有关的方法所确定的经度，往往会带有因月历表的不确定性，以及因观测月球边缘时的光渗和人差效应所造成的很大的系统误差。此外，不同的方法可以给出不同种类的坐标，利用时号对两个地方直接观测到的地方时进行比较，由此求得的经度是瞬时天文经度，但是举个例子来说，通过月掩星观测所得到的经度则是大地经度。

为了找到可能存在的长期变化，这些变化也许会证明正象某些学者所推测的那样存在着长期极移，或者有大陆漂移，那就需要对长时间内的测定结果进行一些比较，而对于这些比较来说各种来源的系统误差都是特别重要的。由于长时间的比较工作涉及到在人们发现极移之前所作的一些观测，因此这些比较有时也是靠不住的。

北极星

对于纬度和北点的实际测定工作来说，北极星观测有着广泛的应用，尤其在地面测量和导航中更是如此。由于北极星的极距非常小，这一点对于在观测归算时推导普遍公式的一些特例，以及编制方便于计算的表格来说都是有利的。

为了根据北极星的真高度 a 和它的时角 h 来确定纬度 φ，由一般公式给出的关系式是

$$\sin a=\sin\varphi\cos p+\cos\varphi\sin p\cos h,$$

式中 p 是极距，这个关系式可以按 p 的各次幂展开，如果令

$$\varphi=a-x,$$

再代入有关 $\sin x$，$\cos x$，$\sin p$，$\cos p$ 的泰勒展开式，由此得

$$\begin{aligned}x=p\cos h&-\frac{1}{2}(x^2-2xp\cos h+p^2)\tan a\\&+\frac{1}{6}(x^3-3x^2p\cos h+3xp^2-p^3\cos h)\\&+\frac{1}{24}(x^4-4x^3p\cos h+6x^2p^2-4xp^3\cos h\\&+p^4)\tan a\\&+\cdots\cdots.\end{aligned}$$

用逐次逼近法解出 x 为

$$\begin{aligned}x=p\cos h&-\frac{1}{2}p^2\sin^2h\tan a\sin 1''\\&+\frac{1}{3}p^3\cos h\sin^2h\sin^2 1''\\&-\frac{1}{8}p^4\sin^4h\tan^3a\sin^3 1''\\&+\frac{1}{24}p^4(4-9\sin^2h)\sin^2h\tan a\sin^3 1''\\&+\cdots\cdots,\end{aligned}$$

式中 p 以弧秒为单位；x 就是为求得 φ 要从 a 中**减去**的、以弧秒为单位的改正值。

从几何上来说，第一项近似地等于距离 ST（图 40）；第二项近似地等于 QT，从 ST 中减去 QT 得到 SQ，SQ 就是北极星高度和天极高度 φ 之间的差。

仅仅当 a 接近 80°，因而也就是当 φ 接近 80°时，最后一项所能达到的最大值为 0.01″。当 $a=64°$ 时，倒数第二项的最大值为0.1″，当 $a=77°$ 时的最大值为1″。当 $h=\arccos\sqrt{1/3}$ 时，第三项的最大值为0.475″。除了纬度很高的地方外，最后三项之和决不可能达到1″，因为每一项的最大值不是在相同 h 值的地方出现的。

图 40　从北极星高度求纬度：
p——天极；MN——子午圈；
NP——极的高度；S——北极星

为了确定子午圈，可以把(122)式写为

$$\tan A=\frac{-\tan p\sec\varphi\sin h}{1-\tan p\tan\varphi\cos h},$$

按 p 的各次幂展开，用马克劳林展开式代替 $\tan A$ 和 $\tan p$，并且用逐次逼近法解出 A。如果 p 以弧秒表示，精确到三阶项，则有

$$-A=p\sec\varphi\sin h+\frac{1}{2}p^2\sin 1''\sec\varphi\tan\varphi\sin 2h$$

$$+\frac{1}{3}p^3\sin^2 1''\sec\varphi\sin h[(1+4\tan^2\varphi)\cos^2 h$$

$$-\tan^2\varphi].$$

纬度小于或等于 50°时，前两项给出的精度大约好于 2″。

根据这个表达式，由 p 的变化引起的 A 的变化是

$$\Delta A = -\Delta p\left(\frac{A}{p} + \frac{1}{2}p\sin 1''\sec\varphi\tan\varphi\sin 2h + \cdots\cdots\right);$$

或者根据天文三角形中的微分关系式有

$$dA = \frac{\sin A}{\sin p}\,d\,p\frac{\cos\varphi}{\sin z},$$

式中最后一个因子显然非常接近于1。北极星方位角表是以φ和h为引数，就某一年内的平均极距来计算的，根据这样的星历表，利用相对于平均值的变化Δp的改正值，就可以求出任意日期的方位角。

前面已经说明，方位角测定的最有利时刻是在东西大距附近，由（91）式有

$$\cos h = \tan\varphi\tan p.$$

大距时的恒星时为$\alpha + h$，由此即可以计算任意日期的民用时。西大距时，h在第一象限，A在北偏西；东大距时，h在第四象限，A在北偏东。从（91）式

$$\sin A = \sec\varphi\sin p,$$

按arc sin$A$的马克劳林级数展开到三阶项，有

$$A = p\sec\varphi + \frac{1}{6}p^3\sin^2 1''\tan^2\varphi\sec\varphi,$$

以弧秒为单位的变化是

φ变化$1'$时A的变化$= +0.000291\,p\sec\varphi\tan\varphi$,

δ变化$1''$时A的变化$= -\sec\varphi$

在实际工作中，要在大距前后连续进行几次观测。如大距时的方位角为A_0，大距附近时角为h时的方位角为A，则由恒等式

$$\sin(A_0 - A) = \sin A_0\cos A - \cos A_0\sin A,$$

可以导出A归算到A_0所要加的改正值。令（29）式的第二式中$q=0$，则对于$\varphi>0$（27）式的第一式给出

$$\sin A_0 = \mp\sin p\sec\varphi = \mp\cos p\,\mathrm{cosec}\,\varphi\cos h_0,$$

这里当$h>12^h$时，用上面的符号。在(29)式的第一式中令$q=0$,

有

$$\cos A_0=\tan\varphi\tan z_0,$$

则（27）式的第二式给出

$$\sin z_0=\pm\cos\varphi\sin h_0,$$

而从（26）式的第一式以及从(27)式的第一式得出的有关 $\cos h_0$ 的表达式，有

$$\cos z_0=\sin\varphi\sec p,$$

利用上面两个式子消去 $\tan z_0$，得到

$$\cos A_0=\pm\cos p\sin h_0.$$

（26）式中的第二、第三式给出了 $\cos A$ 和 $\sin A$，于是我们得到

$$\sin(A_0-A)=\mp\frac{\sin p\cos p}{\sin z}\left[2\sin^2\frac{1}{2}(h_0-h)\right].$$

如果用大距时的 $\sin z_0$ 值来代替 $\sin z$，这里 $\sin z_0$ 可以表达为以下的形式

$$\sin z_0=\mp\cot A_0\tan p,$$

再用 $\arcsin(A_0-A)$ 的泰勒级数按 h_0-h 的各次幂展开，并且用弧秒来表示，则有

$$\mp(A_0-A)=\tan A_0\cos^2 p\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(h_0-h)}{\sin 1''}$$

$$+\frac{1}{6}(\tan A_0\cos^2 p)^3\frac{\left[2\sin^2\frac{1}{2}(h_0-h)\right]^3}{\sin 1''}$$

$$+\cdots\cdots.$$

(h_0-h) 的数值就是大距时刻和 h 时角的时刻之间的恒星时之差，可以按 (h_0-h) 为引数，在星历表中列出 (A_0-A) 改正值表。

第十一章　岁差和章动

有关黄道位置的表达式是从行星理论得到的，而有关天赤道位置的表达式则是从地球绕其质心的运动理论得到的，这两类表达式描述了在一个空间**固定参考系**内，由于黄道平面的行星运动和赤道平面的日月运动所造成的黄道和赤道这两个大圆在天球上的位移情况。为了确定由此所引起的天体在黄道坐标系或赤道坐标系内坐标值的变化，就需要知道这些基本圈**彼此之间的相对位移**。

运动着的瞬时黄道是按动力学方法用关于 $\pi_1 \sin \Pi_1$ 和 $\pi_1 \cos \Pi_1$ 的（101）式来确定的，运动着的瞬时赤道则是独立地用动力学方法从关于 ψ 和 ε_1 的（104）式来加以确定的，而（104）式中的长期项所确定的则是瞬时**平**赤道。因此，我们可以用三角方法从 ψ，ε_1 以及 π_1，Π_1 来求得瞬时黄赤交角和瞬时春分点的位置，而这两个量也就表示了黄道和赤道之间的相对位置。

总岁差运动

天赤道的日月运动对黄道的位置毫无影响，但是它使二分点沿黄道和赤道产生位移。同样，黄道的行星运动对赤道的位置也没有任何直接的影响，但它使二分点沿着这两个大圆产生进一步的位移。还有，无论是赤道的运动还是黄道的运动，都会使黄赤交角发生改变。黄赤交角的**长期**变化几乎完全是由黄道运动引起的，不过也有一小部分来自赤道日月运动的长期分量。黄赤交角变化中的**周期**分量，以及二分点在瞬时黄道和瞬时赤道上位置变化中的**周期**分量，这两者都完全是由赤道的运动引起的，但是由于黄道的运动使它们的幅度会有微小的长期变化。

瞬时春分点在瞬时**赤道**上的位置，由瞬时赤道与固定黄道的

交点 Υ_1 向东沿着赤道量到赤道与瞬时黄道的交点 Υ 为止的弧段 a_1 来表示(图41)。瞬时春分点 Υ 在瞬时黄道上的位置，用瞬时黄道被瞬时赤道和固定黄道所截的弧段 Λ 来表示。瞬时黄道上的这段弧 Λ 取决于黄道旋转轴的运动以及春分点沿运动黄道的位移，后者是由同时发生而又彼此独立的黄道和赤道这两者的运动所引起的。

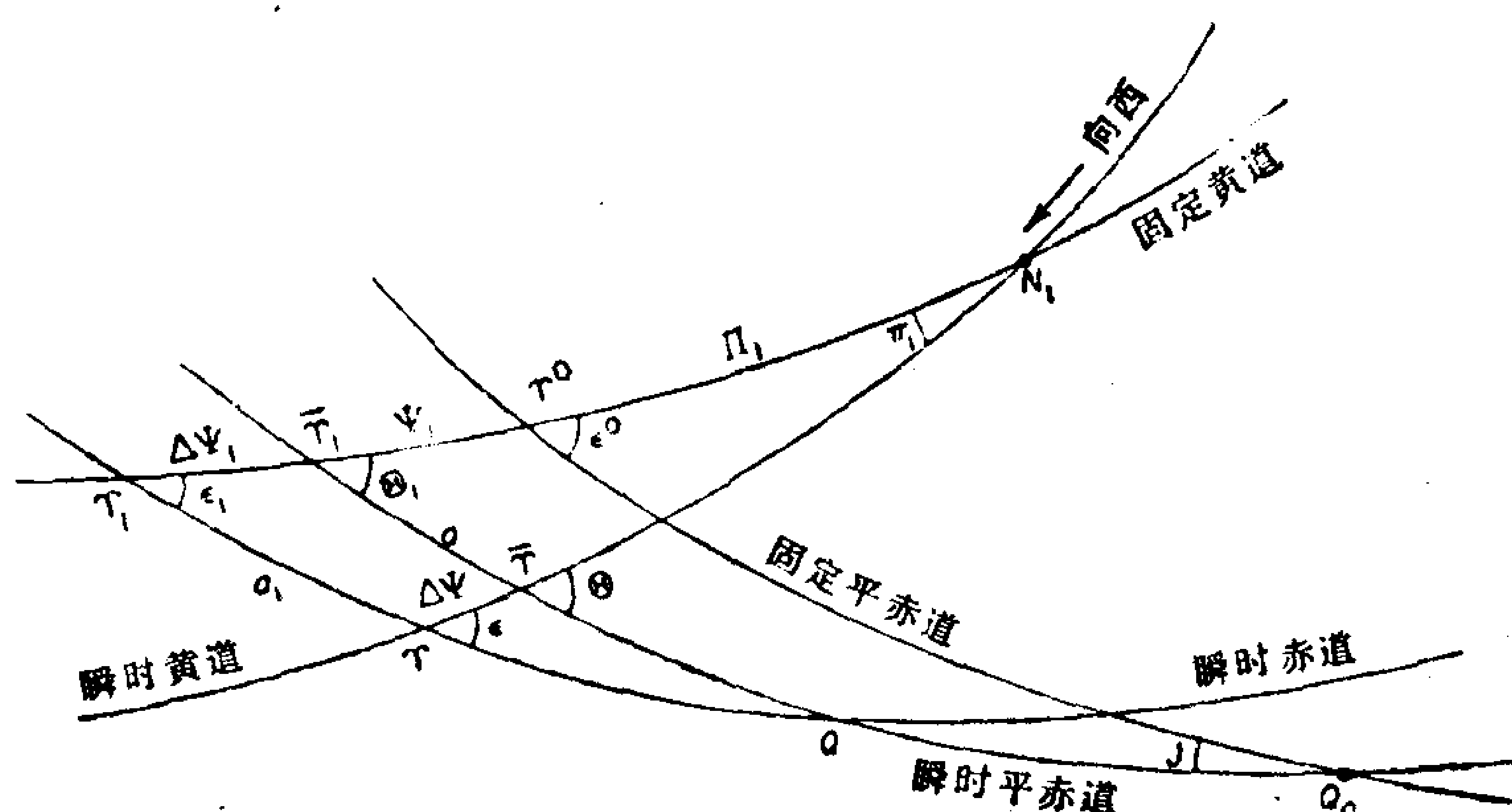


图 41　总岁差运动

春分点在瞬时黄道上长期位移构成 Λ 弧段中的一部分，**它称为黄经总岁差**。它是沿历元固定黄道朝西运动的日月岁差和在运动赤道上朝东的位移两者合成的结果，其中后者是由黄道运动引起的，称**行星岁差**。春分点沿赤道总的渐进运动就是**赤经总岁差**。

为实用起见，在考虑各项岁差位移的定义时必须把每一项位移同某种能被认证而又严格定义了的原点联系起来。上面这种一般性的叙述是不够的，在进行严格定义时还会遇到一些困难。从理论上来说，春分点沿运动黄道的位移是在瞬时黄道上的一段大圆弧，这段弧的一端是瞬时真春分点，而另一端就是所用历元时刻的平春分点在瞬时黄道上的位置。这一定义是由布吕诺夫● 给

● F. Brünnow "Spherical Astronomy," p. 117, 1865.

出的，它实质上也就是鲍尔所给出的定义[1]。但是实际上我们不可能直接定出春分点在历元时刻所在的那一个点的位置，鲍尔用从历元春分点向瞬时黄道所作的一条垂线来确定这一点的位置，而这是不正确的。另外一些作者选用了各种不同的点来作为总岁差量的起算原点[2]，因而在实际确定总岁差时必须作出某种基本的约定。

通常的做法是把黄经总岁差定义为从运动黄道对固定黄道的交点到瞬时平春分点和固定平春分点的两段角距离之差，这就是说，在瞬时黄道上作为瞬时春分点位移起算点的那个参考点，对于瞬时平春分点而言的黄经是 $\Lambda-\Pi_1$[3]。严格来说，这种量度的结果只能准确到一阶项，因为瞬时黄道对历元黄道的交点位置并不是一成不变的，但是误差很小，这一方面因为 π_1 是一个小量，另一方面 Π_1 又接近 180°。在二阶项的范围内，这样量度的结果，同以运动黄道与通过固定春分点及固定黄极的那个大圆的交点为起算点时所得到的总岁差量是相等的。

纽康[4]把黄经总岁差定义为瞬时平春分点沿运动黄道的运动量，但是他把这一运动在历元固定黄道上的正投影作为其运动量大小的一种量度，其理由是在这两个方向上的运动速率之差仅仅是一个二阶无穷小量。这种方法为鲍希恩格[5]所袭用，并得到普卢默的赞同。

● R. S. Ball, "Spherical Astronomy," pp. 176—177, 1908.

● H. C. Plummer, Note on generat precession. Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 76, 627—630 (1916).

● 采用总岁差的这一量度方法有 Oppolzer, "Bahnbestimmung, "2te Aufl., Vol. I, p. 125; W. Chauvenet, "Manual of Spherical and Practical Astronomy," Vol. I, p. 606; Tisserand, "Mécanique Céleste," Vol. I, pp. 437—438; L. de Ball, "Sphärischen Astronomie," p. 93; H. Andoyer, "Mécanique Céleste." Vol. I, p. 382; Bull. Astr. 28, 69 (1911).

● (S. Newcomb), "Compendium of Spherical Astronomy," p. 234.

● (Bauschinger), "Bahnbestimmung," 2te Aufl., pp. 70—71.

总岁差的这些不同量度方式在数值上的差异仅仅约为0.001″T^2，其中T表示从历元起算的世纪数，但是鉴于天文工作中对计算精度要求的不断提高，就需要明确地采用一种严格的定义，并对其加以确切的说明。这里所采用的是纽康的量度方法，这种方法相当于把黄经总岁差定义为**瞬时平春分点对于历元固定平春分点和历元固定黄道的黄经**，在实际应用上它是朝西计量的。

春分点在黄道和赤道上的运动中的长期分量完全是由**平**赤道相对于运动黄道的运动所引起的。黄经总岁差就是在黄道和平赤道的运动过程中所产生的**平**春分点沿黄道的位移。在黄道和**真**赤道的运动过程中，**真**春分点沿黄道的位移就是黄经章动。因此，只要把黄经章动加在由黄经岁差所表示的平春分点位置上，就立即得到了瞬时真春分点在运动黄道上的位置，但是，在运动赤道上我们不可能直接把瞬时春分点的周期分量和长期分量分离开来，因为真赤道并不通过平春分点。所以，赤经总岁差就用平春分点沿**平**赤道的位移来量度，而为了得到瞬时真春分点在真赤道上的位置，就要进一步推导出另外一些三角关系式。

沿运动平赤道的赤经总岁差是朝西方向的日月分量和朝东方向的行星分量合成后的结果，前者是由平赤道的运动引起的，后者则来自黄道的运动。赤经总岁差构成了瞬时平赤道上$90°+z$这段弧的一部分，而在实际应用上它是从这一弧段上的某一确定点向西计量的，这一点离开瞬时平赤道对固定平赤道的升交点的距离，同固定平春分点到该升交点的距离是相同的。因此，赤经总岁差μ为

$$\mu=(90°+z)-(90°-\zeta_0)=z+\zeta_0.$$

瞬时黄赤交角ε以及瞬时春分点♈在黄道和赤道上的位置，是按照前面给出的定义用有关下面这些量的级数展开式来加以确定的，这些量就是黄经总岁差、赤经总岁差以及黄经、赤经和黄赤交角的章动，其中需要用到直接从动力学理论所确定的ψ，ε_1，π_1和Π_1这四个量。

为此，用符号Υ°和ε°表示历元平春分点和历元平黄赤交角。瞬时真赤道对历元固定黄道的交点Υ_1的西向位移用$\psi=\psi_1+\Delta\psi_1$来表示，其中ψ_1代表黄经日月岁差，$\Delta\psi_1$是历元黄道上的黄经日月章动。倾角$\varepsilon_1=\varepsilon^\circ+\Delta\varepsilon_1$表示为$\varepsilon_1=\Theta_1+\Delta\Theta_1$的形式，其中$\Theta_1$包括$\varepsilon^\circ$和交角的日月岁差，而$\Delta\Theta_1$是相对固定黄道的交角日月章动。$\Psi_1$和$\Theta_1$这两个分量确定了瞬时平赤道对于固定黄道的交点和倾角，它们所代表的是有关ψ和ε_1的动力学表达式（104）中的长期项

$$\Psi_1=f_1t+f_2t^2+\cdots\cdots$$
$$\Theta_1=\varepsilon^\circ+\theta_1t+\theta_2t^2+\cdots\cdots; \qquad (123)$$

而$\Delta\Psi_1$和$\Delta\Theta_1$则代表了ψ和$\Delta\varepsilon_1$中的周期项。

日月岁差和章动归算到运动黄道和运动赤道

根据由瞬时真春分点Υ，瞬时黄道对固定黄道的升交点N_1，以及瞬时赤道与固定黄道的交点Υ_1这三点所构成的球面三角形，利用纳比尔(Napier)法则以及正弦定律，我们就得到

$$\tan\frac{1}{2}[180^\circ-(\Lambda-a_1)]=\frac{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\pi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\pi_1)}\tan\frac{1}{2}[180^\circ-(\Pi_1+\psi)],$$

$$\tan\frac{1}{2}[180^\circ-(\Lambda+a_1)]=\frac{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\pi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varepsilon_1-\pi_1)}\tan\frac{1}{2}[180^\circ-(\Pi_1+\psi)], \qquad (124)$$

$$\sin\varepsilon=\sin\varepsilon_1\frac{\sin(\Pi_1+\psi)}{\sin\Lambda}.$$

上述关系式的形式很便于展开为ψ，$\Delta\varepsilon_1$及时间t的各次幂与交叉乘积的级数，而级数中每一项的系数则与p_i、q_i、ε°有关，这类展开式给出了在瞬时黄道上的弧段Λ，在瞬时真赤道上的弧段a_1

以及真黄赤交角 ε 的级数形式的表达式，其中的长期项部分是时间的各次幂的级数，而周期项部分是系数因子为 t 的级数，它们表示由黄道运动所引起的交角章动和黄经章动的长期变化❶。

由于展开到三阶项的级数展开式的精度已远远高于任何观测所能达到的精度，因而有关 Λ、ε 和 a_1 的表达式中的长期项部分同在（124）式右端的 ε_1 和 ψ 中仅仅保留长期项所得到的结果是相同的。所以，从几何学的角度来看，a_1 表达式中的长期项部分代表了按动力学方法由 Ψ_1 和 Θ_1 所确定的瞬时平赤道上的弧段 a，ε 的长期项部分就是瞬时平黄赤交角 Θ；而 Λ 的长期项部分则代表了瞬时黄道上从 N_1 到瞬时平春分点的弧长。

由 Λ 我们立即得到了黄经总岁差 Ψ，如果保留到二阶项则按纽康的定义，有 $\Psi=\Lambda-\left(\Pi_1+\dfrac{1}{2}p_1q_1t^2\right)-\Delta\Psi$，方向是朝西的，其中 $\Delta\Psi$ 表示由 Λ 的周期项所表达的瞬时黄道上的黄经章动。ε 的周期项所表示的是相对于瞬时黄道的交角章动。有关 a_1 表达式中的周期项部分表示了赤道运动中的不规则效应，这是由轴的章动造成的，全部系数都包含有因子 t。从历元 1900 年起经一世纪后保留到 0.001″ 的项有❷：

$$a_1=a+0.00983''T\sin\Omega-0.00128''T\cos\Omega$$
$$+0.00073''T\sin 2L_{\odot},$$

式中 T 以世纪为单位。

a_1 的长期项部分所表示的是在平赤道上的弧段 a，它确定了瞬时平春分点在平赤道上的位置。这部分称为行星岁差，它是从平赤道对固定黄道的降交点起**朝东方向**计量的。行星岁差的数值就是在自历元起算的这段时间内，由黄道运动所造成的平春分点沿平赤道的位移量，但是，在同样这段时间内平赤道的日月运动同时

❶ Astr. Pap. Amer. Eph. XV, Pt. I, 38-40, 148-156.

❷ Astr. Pap. Amer. Eph. XV, Pt. I, 155.

又使平春分点向西位移，这部分位移所经过的大圆弧的一端是固定黄道，另一端就是选来作为 μ 的起算原点的那一个点，因此这段距离就是 $(90°+z)+a-(90°-\zeta_0)=\mu+a$。令

$$z+a=\zeta,$$

上面的关系式就变为

$$(\zeta+\zeta_0)-a=\mu,$$

式中 $\zeta+\zeta_0$ 是赤经的日月岁差，因此 a 就是为了求得赤经总岁差而被扣去的一个归算因子。

ζ_0、z 和 J 表示了瞬时平赤道对于固定平赤道的相对位置，有关这些量以及有关赤经日月岁差的表达式，可以根据用动力学方法所确定的瞬时平赤道对于固定黄道的相对位置，通过由瞬时平赤道对固定平赤道的升交点 Q_0 以及这两个平赤道对于固定黄道的降交点所构成的球面三角形来求得。在这个三角形中令

$$\Theta_1=\varepsilon^0+\Delta\varepsilon^0,$$

式中 $\Delta\varepsilon^0$ 代表交角的日月岁差，

$$\tan\frac{1}{2}(\zeta+\zeta_0)=\frac{\cos\left(\varepsilon^0+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^0\right)\tan\frac{1}{2}\Psi_1}{\cos\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^0},$$

$$\begin{aligned}&\sin J\sin\zeta_0=\cos\Theta_1\sin\varepsilon^0-\sin\Theta_1\cos\varepsilon^0\cos\Psi_1,\\&\sin J\cos\zeta_0=\sin\Theta_1\sin\Psi_1.\end{aligned}\tag{125}$$

在某些问题中下面这两个补充关系式也是有用的，

$$\tan\frac{1}{2}(\zeta-\zeta_0)=\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^0}{\sin\left(\varepsilon^0+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^0\right)\tan\frac{1}{2}\Psi_1},$$

$$\tan\frac{1}{2}J=\tan\left(\varepsilon^0+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^0\right)\frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta+\zeta_0)}{\cos\frac{1}{2}(\zeta-\zeta_0)},$$

J 值称为赤纬岁差。

除了对于基本历元 t_0 的日月岁差、黄经总岁差、平赤道对固定黄道的倾角、运动黄道的平黄赤交角、行星岁差以及赤经总岁差这六个量的表达式外，为了进行某些天文计算，还必须知道对于任意一个历元 t_1 的这六个量的表达式，同时还要知道有关运动黄道对任意历元固定黄道的倾角和交点的表达式，以及同样也是对任意历元而言的黄道转动轴的黄经和平赤道转动速率的表达式。

黄道和平赤道在天球上的位置是在变化的，它们之间的相对位置也是在变化的，这两种变化的**累积量**都是由任意特定时间**间隔**内的岁差运动产生的，因而它们就用有关岁差**位移**的表达式来加以表示。我们必须注意到把这种累积变化同某一特定**瞬间**的**瞬**时运动和**瞬**时运动速率区分开来。对于天文计算来说，除了有关位移的表达式外，还必须进一步考虑到关于**瞬时速率**的表达式：位移所表示的是从所采用历元起算的任意一段时间间隔内所发生的全部瞬时运动的积分效应。

相对于基本历元的岁差位移

瞬时平黄赤交角 Θ、黄经总岁差 Ψ 以及行星岁差 a 可以用以下形式表示

$$\begin{aligned} \Theta &= \varepsilon^0 + \eta_1 t + \eta_2 t^2 + \cdots\cdots, \\ \Psi &= h_1 t + h_2 t^2 + \cdots\cdots, \\ a &= g_1 t + g_2 t^2 + \cdots\cdots, \end{aligned} \qquad (126)$$

根据从动力学理论得到的（101）和（123）两式中的基本系数，并利用纽康关于 Ψ 的定义，我们就可得到各个系数的值（到三阶项）为

$$\eta_1 = \theta_1 + q_1,$$

$$\eta_2 = \theta_2 + q_2 + \frac{1}{2} p_1^2 \cot \varepsilon^0 - p_1 f_1,$$

$$\eta_3=\theta_3+q_3-\frac{1}{3}q_1^3+p_1p_2\cot\varepsilon^0-\frac{1}{2}p_1^2q_1\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0$$

$$-f_1(p_2-p_1q_1\cot\varepsilon^0)-\frac{1}{2}q_1f_1^2-p_1f_2$$

$$-\frac{1}{2}\theta_1p_1^2\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0;$$

$$h_1=f_1-p_1\cot\varepsilon^0,$$

$$h_2=f_2-p_2\cot\varepsilon^0+p_1q_1\cot^2\varepsilon^0-f_1q_1\cot\varepsilon^0$$
$$+\theta_1p_1\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0,$$

$$h_3=f_3-p_3\cot\varepsilon^0+\frac{1}{4}p_1(p_1^2+q_1^2)\cot\varepsilon^0+\frac{1}{2}(p_1q_2$$

$$+p_2q_1)(1+\cos^2\varepsilon^0)\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0-\frac{1}{12}(3p_1q_1^2-p_1^3)(3$$

$$+\cos^2\varepsilon^0)\cot\varepsilon^0\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0-f_2q_1\cot\varepsilon^0-f_1q_2\cot\varepsilon^0$$

$$+\frac{1}{2}f_1(q_1^2-p_1^2)(1+\cos^2\varepsilon^0)\operatorname{cosec}^2\varepsilon_0$$

$$+\frac{1}{2}f_1^2p_1\cot\varepsilon^0+\theta_2p_1\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0+f_1\theta_1q_1\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0$$

$$+\theta_1p_2\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0-2\theta_1p_1q_1\cot\varepsilon^0\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0$$
$$-\theta_1^2p_1\cot\varepsilon^0\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0;$$

$$g_1=p_1\operatorname{cosec}\varepsilon^0,$$

$$g_2=p_2\operatorname{cosec}\varepsilon^0-p_1q_1\cos\varepsilon^0\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0+f_1q_1\operatorname{cosec}\varepsilon^0$$
$$-\theta_1p_1\cos\varepsilon^0\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0,$$

$$g_3=p_3\operatorname{cosec}\varepsilon^0-\frac{1}{4}p_1(p_1^2+q_1^2)\operatorname{cosec}\varepsilon^0-(p_1q_2$$

$$+p_2q_1)\cos\varepsilon^0\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0+\frac{1}{12}(3p_1q_1^2-p_1^3)$$

$$\times(1+3\cos^2\varepsilon^0)\operatorname{cosec}^3\varepsilon^0+f_1q_2\operatorname{cosec}\varepsilon^0-f_1(g_1^2-p_1^2)$$

$$\times\cos\varepsilon^0\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0-\frac{1}{2}f_1^2p_1\operatorname{cosec}\varepsilon^0+f_2q_1\operatorname{cosec}\varepsilon^0$$

$$-\theta_2 p_1 \cos\varepsilon^0 \operatorname{cosec}^2\varepsilon^0 - f_1\theta_1 q_1 \cos\varepsilon^0 \operatorname{cosec}^2\varepsilon^0$$
$$-\theta_1 p_2 \cos\varepsilon^0 \operatorname{cosec}^2\varepsilon^0 + \theta_1 p_1 q_1 (1+2\cot^2\varepsilon^0)\operatorname{cosec}\varepsilon^0$$
$$+\frac{1}{2}\theta_1^2 p_1 \operatorname{cosec}\varepsilon^0 (1+2\cot^2\varepsilon^0).$$

黄经总岁差中 t 项系数的表达式 $h_1 = f_1 - p_1\cot\varepsilon^0$ 建立了 h_1 与**日月**岁差常数 f_1 之间的关系。系数 h_1 称为**岁差常数**，它是直接从观测得到的一个量，而 f_1 就是在从动力学理论确定 ψ 和 ε_1 的系数值时利用上面这个关系式从 h_1 计算求得的。此外，动力学理论表明，f_1 包含有因子 $\cos\varepsilon^0$，因此它可以用乘积

$$f_1 = P_0\cos\varepsilon^0$$

来表示，式中另一个因子 P_0 曾被纽康命名为**岁差常数**。但是，P_0 同地球轨道的偏心率有关，因而在不同的历元它不是一个绝对不变的常数，而是会发生微小的变化。纽康对岁差常数的确定给出了下面这些数值❶：

$P_0 = 5490.66'' - 0.00364''T$　　每回归世纪，

$h_1 = 5024.53''$　　每回归世纪（1850 年），

$f_1 = 5036.84''$　　每回归世纪（1850 年），

其中 T 表示 1850 年后的回归世纪数。

令

$$P_0 = P^0 + P_1 t,$$

从动力学理论我们又有

$$f_2 = \frac{1}{2}P_1\cos\varepsilon^0 + \frac{1}{2}q_1 P^0\cos 2\varepsilon^0 \operatorname{cosec}\varepsilon^0.$$

在（126）式中的诸系数之间还存在着其它一些关系式，有关各种岁差位移的定义可以使我们看到这一点，而且可以利用三角形 $N_1\overline{\Upsilon}_1\overline{\Upsilon}$ 中的一些三角关系式把它们推导出来，或者也可以通过对有关表达式的仔细观察来发现这些关系式，这些关系式使许

---

❶ S·Newcomb, Astr. Pap. Amer. Eph. Ⅷ, 72.

多表达式得以简化，因而在系统的数字计算工作中常常是很有用的。例如，很明显地有

$$h_1 = f_1 - g_1 \cos \varepsilon^0,$$

以及把公式

$$\sin a \cos \Theta_1 = \cos \Lambda \sin(\Pi_1 + \Psi_1) - \sin \Lambda \cos(\Pi_1 + \Psi_1) \cos \pi_1$$

按 Ψ_1、$\Delta\varepsilon^0$、t 的幂展开（其中应顾及 $\Lambda = \Pi_1 + \Psi + \frac{1}{2} p_1 q_1 t^2$）后，根据纽康对 Ψ 的定义，我们有（到二阶项）

$$\Psi = \Psi_1 - a \cos \varepsilon^0 + a \sin \varepsilon^0 (\Delta\varepsilon^0),$$

因此就得到

$$h_2 = f_2 - g_2 \cos \varepsilon^0 + g_1 \theta_1 \sin \varepsilon^0 = f_2 - g_2 \cos \varepsilon^0 + p_1 \theta_1 \ .$$

类似地有

$$\eta_2 = q_2 - \frac{1}{2} p_1 h_1 - \frac{1}{2} p_1 f_1 + \theta_2,$$

$$g_2 = (p_2 + q_1 h_1 - p_1 \theta_1 \cot \varepsilon^0) \operatorname{cosec} \varepsilon^0;$$

对于 t^3 项的系数也是同样的。不同作者所给出的表达式在二阶和三阶项中往往会有微小的差异，这取决于对 Ψ 所用的精确定义以及其它的一些细节问题，例如，一般总是认为 $\theta_1 = 0$，这就意味着 $\theta_2 = \frac{1}{2} p_1 f_1$ 以及 $\theta_3 = \frac{1}{3} \sin \varepsilon^0 (f_1 g_2 + 2 f_2 g_1)$。

把（125）式中的第一式按 Ψ_1 和 $\Delta\varepsilon^0$ 的幂展开后，可以求得赤道上的日月岁差 $\zeta_0 + \zeta$ 的一种表达式，扣去其中的行星岁差 a 后，便给出了瞬时平赤道上的总岁差 μ。保留到三阶项时有

$$\mu = \Psi_1 \cos \varepsilon^0 - a - \frac{1}{2} \Psi_1 \Delta\varepsilon^0 \sin \varepsilon^0 + \frac{1}{12} \Psi_1^3 \cos \varepsilon^0 \sin^2 \varepsilon^0, \tag{127}$$

而如果把这个式子表示为以下的形式

$$\mu = m_1 t + m_2 t^2 + \cdots\cdots,$$

则我们有

$$m_1 = f_1 \cos\varepsilon^0 - p_1 \operatorname{cosec}\varepsilon^0 = f_1 \cos\varepsilon^0 - g_1,$$

$$m_2 = f_2 \cos\varepsilon^0 - (f_1 q_1 + p_2)\operatorname{cosec}\varepsilon^0 + p_1(q_1 + \theta_1)\cos\varepsilon^0$$

$$\times \operatorname{cosec}^2\varepsilon^0 - \frac{1}{2}\theta_1 f_1 \sin\varepsilon^0 = f_2 \cos\varepsilon^0 - g_2$$

$$-\frac{1}{2}\theta_1 f_1 \sin\varepsilon^0,$$

$$m_3 = f_3 \cos\varepsilon^0 - g_3 + \frac{1}{12} f_1^3 \cos\varepsilon^0 \sin^2\varepsilon^0$$

$$-\frac{1}{2}(f_1\theta_2 + f_2\theta_1)\sin\varepsilon^0.$$

岁差运动的瞬时速率

瞬时黄道对于历元位置的位移（101）式是由某种连续的旋转运动产生的，它的转动速率为 κ，而旋转轴则在运动着的瞬时黄道面内缓慢地移动，旋转轴的一端就是该瞬时黄道对于其前一瞬间位置的升交点，它离开瞬时平春分点的黄经为 $180° - N$（见图42）。

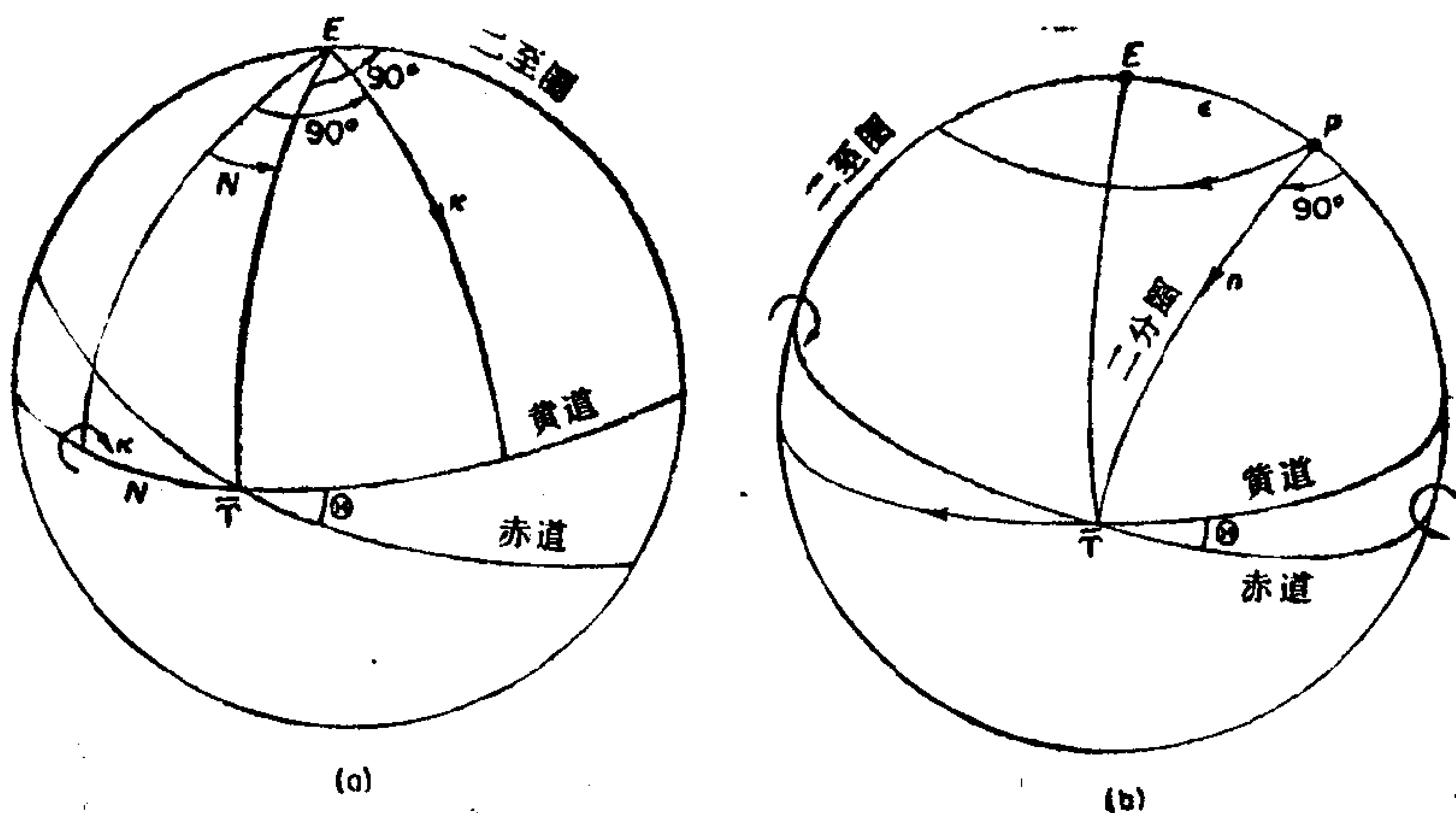


图 42　瞬时岁差运动

平赤道的位移同样也代表了绕着一根不断运动着的轴的某种旋转。在（123）式中，瞬时平赤道的位置是对历元固定黄道而言的，在任一瞬间 t，这两个大圆平面的交线在历元黄道的固定平面内朝西转动，瞬时转动速率为 $d\Psi_1/dt$，其结果是通过固定黄极和瞬时平极的大圆就以同样的速率绕着历元固定黄极转动。因此，瞬时平极便沿着一个角半径为 Θ_1 的小圆绕着历元固定黄极作瞬时运动。平极在天球上的这种瞬时线运动的方向是同过上述两个极的大圆相垂直的，因而它的方向始终沿着一个大圆指向平赤道对固定黄道的不断运动的降交点。所以，平赤道面始终绕着这样的一根轴在旋转：它位于运动着的瞬时平赤道面内，并且同平赤道面与历元固定黄道面的交点线相正交。

赤道的瞬时旋转速率等于天极在天球上运动（以角度计）的线速度。平极绕历元固定黄极的运动角速度为 $d\Psi_1/dt$，方向朝西，因此朝向位于 Ψ_1 处的瞬时交点位置的运动线速度为 $(d\Psi_1/dt)\sin\Theta_1$。同黄极的情况一样，由于交点在不停地移动，天极从一个位置到另一个位置的实际轨迹并不是沿着联接这两个位置的大圆弧进行的。

平极绕着历元固定黄极的瞬时圆周运动，以及由此而来的平赤道的旋转，都不会使 Θ_1 发生改变，**从运动学角度来看**后一种运动引起了交点的位移，但是 Θ_1 同时会因一些**动力学的**原因而发生某种微小的长期变化，因此平极在天球上的实际岁差运动轨迹不是一个严格的圆，而且在不同的圈内也并不严格相同。转动速率 $d\Psi_1/dt$ 也有某种动力学的长期变化。极的日月运动没有一个可以严格加以确定的固定的或明确的周期，因而我们不可能根据从动力学理论所求得的时间幂级数表达式来给出历元前、后几个世纪以远的精确结果。

从运动学角度来看，黄道的旋转和赤道的旋转是彼此独立的，但是其中的很小一部分，也就是 Θ_1 的长期变化，从**动力学上来说**则取决于因黄道运动而使太阳和月球平均位置的改变所引

起的摄动力的变化。

黄极在天球上的瞬时运动速率为κ，方向沿着黄经为（$180^\circ-N$）-90°的那个大圆，因此它位于瞬时平天极所在的二至圈象限线以西，与二至圈的交角为N。沿二至圈方向的分量$\kappa\cos N$造成了黄道绕二分线的旋转，从而使瞬时平黄赤交角Θ发生变化，变化的瞬时速率为$-\kappa\cos N$，但它并不引起春分点的位移。沿着通过瞬时平春分点的大圆的分量$\kappa\sin N$造成了绕黄道平面内二至线的某种旋转运动，它并不使Θ发生改变，但是引起春分点沿运动赤道向东位移，位移的瞬时速率为

$$da/dt=(\kappa\sin N)\operatorname{cosec}\Theta, \tag{128}$$

并且产生行星岁差，同时出现的春分点沿运动黄道向东位移的瞬时速率为$\kappa\sin N\cot\Theta$。这些运动速率是用黄道相对于瞬时平赤道的瞬时位置来表示的，它们代表了**仅仅**由于黄道的行星运动所引起的春分点的运动，就好象赤道是**固定在它的瞬时位置上**一样，因此，由于选用**瞬时日期**作为某个任意的历元来表示该瞬间的运动情况，这些表达式所代表的是任意瞬间春分点对于**瞬时固定**平赤道的行星运动，而不是对于基本历元固定平赤道的运动。

任意瞬间平春分点和平黄赤交角的进一步变化是**仅仅由平赤道**的日月运动引起的，它们同样可以用对于**瞬时**固定黄道的相对变化来加以表示。这部分变化同行星造成的变化合在一起便给出了任意时刻**总**岁差运动的瞬时速率。为了确定这些瞬时运动，并且通过它们来求得任意两个瞬间之间所经历的位移量以及由此而来的赤道坐标与黄道坐标的变动和累积变化，一个极其重要的问题是应该把基本**历元**固定黄道和固定赤道，**瞬时**固定黄道和固定赤道，以及瞬时**运动**黄道和**运动**赤道这三者明确地区分开来。同样，为了从基本表达式出发作进一步的公式推导，也必须把有关行星和日月运动初始表达式中的**基本**历元，同选来作为某个历元的不同时刻的参考瞬间区别开来。

相对于瞬时黄道和瞬时赤道的瞬时岁差运动

若取始终与瞬时日期相一致的历元，我们便可以从对于基本历元黄道的日月变化表达式来求得对于瞬时固定黄道的表达式，其中只要用 Θ 代替 Θ_1，令 $a=0$，并且用沿瞬时黄道方向黄经总岁差的瞬时速率的日月分量来取代 $d\Psi_1/dt$。

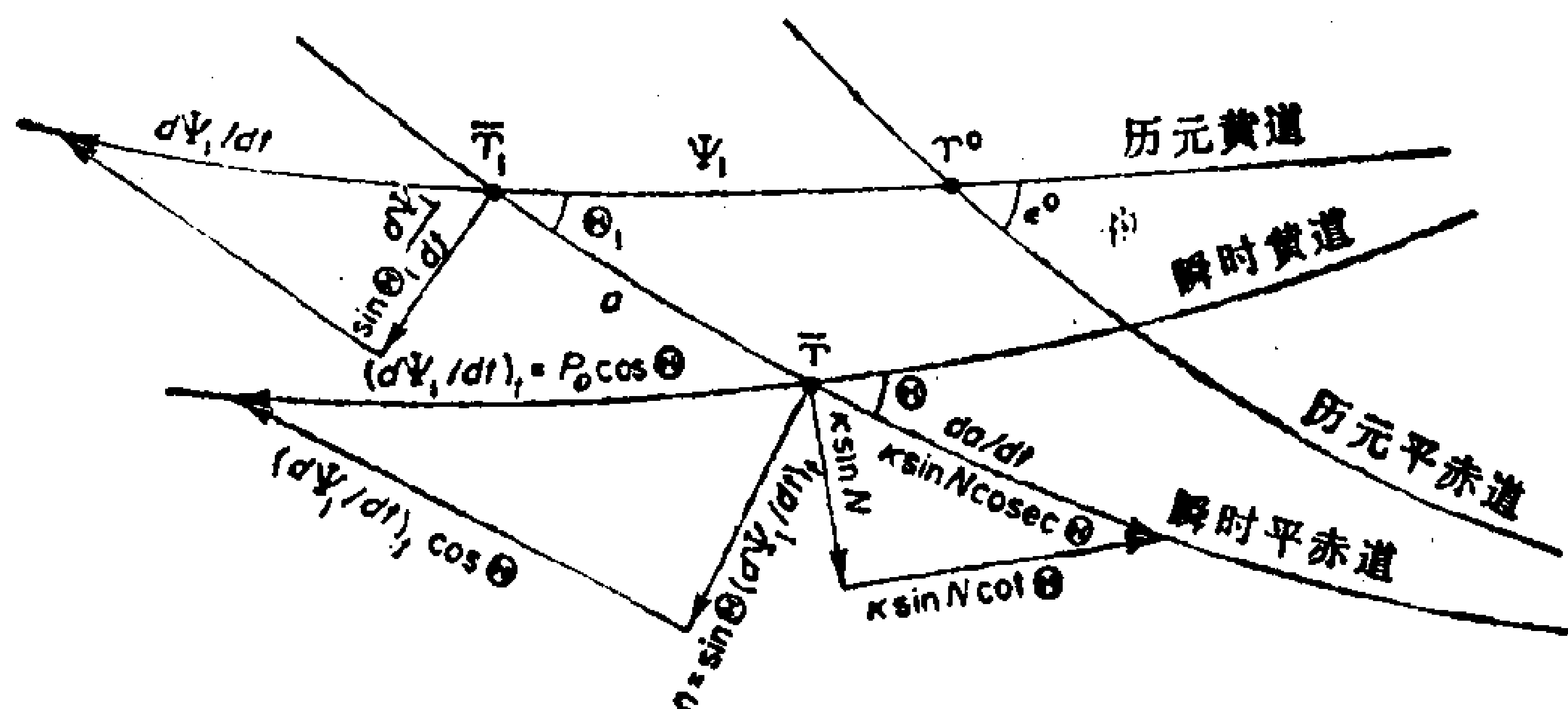


图 43　各种岁差运动的速率

对基本历元来说，平极的瞬时日月运动的瞬时速率为 $(+d\Psi_1/dt)\sin\Theta_1$，其方向沿着通过瞬时平赤道对历元黄道的降交点 $\overline{\Upsilon}_1$的大圆(图 43)，因此它与瞬时二分圈西半部的交角为 a。这一运动在沿瞬时二至圈方向上的分量为 $(+d\Psi_1/dt)\sin\Theta_1\sin a$，朝向平春分点以西 90° 处的一个点，它使 Θ 值减小；而沿日期二分圈方向上的分量为 $(+d\Psi_1/dt)\sin\Theta_1\cos a$，朝向春分点，它使平春分点沿黄道向西位移。从运动学角度来看，这些瞬时变化与黄道的行星运动所产生的变化是独立无关的，而把这两类变化加在一起便给出了由几何上的相对运动所产生的瞬时变化：

$$d\Psi/dt=-\kappa\sin N\cot\Theta+(d\Psi_1/dt)\sin\Theta_1\cos a\operatorname{cosec}\Theta$$

（方向朝西），

$$d\Theta/dt=-\kappa\cos N-(d\Psi_1/dt)\sin\Theta_1\sin a,$$

式中 Θ_1 由于它的动力学长期变化在不同的瞬间有不同的数值。若把瞬时日期作为历元，Θ_1 同 Θ 就没有什么两样了，$(+d\Psi_1/dt)$ 的含义就是瞬时固定黄道上的日月岁差速率，用 $(d\Psi_1/dt)_1$ 来表

示，而$a=0$，于是上面两个表达式变为

$$D_t\Psi=-\kappa\sin N\cot\Theta+(d\Psi_1/dt)_t\quad（方向朝西），$$
$$=-(da/dt)\cos\Theta+(d\Psi_1/dt)_t,\qquad(129)$$
$$D_t\Theta=-\kappa\cos N。$$

同样，在运动平赤道上，赤经总岁差的瞬时速率为

$$D_t\mu=(d\Psi_1/dt)_t\cos\Theta-(da/dt)\quad（方向朝西），\qquad(130)$$

以后就用$D_t\mu=m$来表示。

任意时刻赤经岁差的**周年**速率就是赤道上一点的赤经在一年内所增加的量，如果这一速率保持它的瞬时数值不变的话。在一年期间内这一数值的变化是很小的，所以实际上可以认为在这样一段时间间隔内它是一个常数，而由此我们就可以用同样的符号m来表示一年的岁差量。但是，为了不致因这一符号的双重含义而引起混淆，我们必须把上面这两种不同的解释明确地区分开来。正如前面已经强调过的那样，在足够长的时间间隔内岁差的速率会有相当可观的变化，因而在确定岁差位移时必须应用不同的公式，并且要用不同的符号来加以表示。

(129)式表明，从运动学角度来说，平赤道的日月运动不会使平黄赤交角产生任何的变化。就运动学观点来看，平黄赤交角的瞬时长期变化$D_t\Theta$完全是由黄道绕二分线的旋转（这种旋转与赤道的运动无关）$\kappa\cos N$造成的，但是其中有很小的一部分同Θ_1的动力学长期变化有关。平极的日月运动是一种沿着半径为Θ、圆心在瞬时**固定**黄极的一个圆的瞬时运动，运动的角速度为$(d\Psi_1/dt)_t$，因此它的方向完全沿着过瞬时平春分点的那个大圆，而线速度为

$$n=\sin\Theta\left(\frac{d\Psi_1}{dt}\right)_t.$$

这一运动称为**赤纬岁差**，其运动学的效果是使春分点产生位移，但Θ保持不变，它使赤道以速率n绕着二至线旋转，而赤道对于它前一瞬间位置的升交点则位于离瞬时春分点赤经为6^h的地方。

对瞬时**运动**黄极来说，每一瞬间平极都在朝西运动，运动的角速度为 $D_t\Psi$，方向沿着半径为 Θ、圆心在黄极的一个小圆，因此也就始终沿着不断运动着的二分圈，且朝向瞬时平春分点。由于存在长期变化，运动的瞬时半径和角速度不断地发生改变；而天极相对于运动黄极的实际岁差轨迹就象它围绕着历元固定黄极在恒星间的运动轨迹一样，并不是一个严格的圆，而且在不同的圈内也并不严格相同。

根据纽康的岁差常数 P_0，瞬时岁差运动的速率（向西计量为正）是：

沿**瞬时固定**黄道的黄经日月岁差：$(d\Psi_1/dt)_t = P_0\cos\Theta$,

沿瞬时**运动**黄道的黄经总岁差：

$$D_t\Psi = P_0\cos\Theta - (\kappa\sin N)\cdot\cot\Theta,$$

沿**瞬时固定**平赤道的赤经日月岁差：

$$(d\Psi_1/dt)_t\cos\Theta = P_0\cos^2\Theta, \tag{131}$$

沿瞬时**运动**平赤道的赤经总岁差：

$$m = P_0\cos^2\Theta - (\kappa\sin N)\cdot\operatorname{cosec}\Theta,$$

赤纬日月岁差：$n = (P_0\cos\Theta)\sin\Theta = \dfrac{1}{2}P_0\sin 2\Theta$,

其中 Θ 是瞬时平黄赤交角，$-\kappa\sin N\cot\Theta$ 是黄经行星岁差的速率，而 $-\kappa\sin N\operatorname{cosec}\Theta = -da/dt$ 为赤经行星岁差的速率，负号表示运动方向是朝东的。

平极沿瞬时二分圈的瞬时运动速率为 n，其运动方向与连接基本历元天极与瞬时天极的弧段 J 的西部延长线的交角为 z，而与连接基本历元黄极与瞬时天极的弧段 Θ_1 的东半部的交角为 $90°+a$，因此，在任意瞬间

$$\frac{dJ}{dt} = n\cos z = \frac{1}{2}P_0\sin 2\Theta\cos z,$$

$$\frac{d\Theta_1}{dt} = n\sin a = \frac{1}{2}P_0\sin 2\Theta\sin a. \tag{132}$$

同样，在基本历元固定黄道上的日月岁差量 Ψ_1 的瞬时变化速率为

$$\frac{d\Psi_1}{dt}=\frac{n\cos a}{\sin\Theta_1}=\frac{P_0\sin 2\Theta}{2\sin\Theta_1}\cos a, \qquad (133)$$

式中 $\cos a$ 可以取为 1 。

相对于任意历元的岁差公式

基本历元 t_0 时的黄道与 t_0 时的平赤道交于历元平春分点 Υ^0，交角为 ε^0（图 44）。对于从历元 t_0 起算的任意时刻 t_1 来说，在（123）式中令 $t=t_1$，就得到 t_1 时的平赤道与 t_0 时黄道的交角，以及从 Υ^0 朝西方向量到这两个大圆交点的距离；而对于从 t_0 起算的任何另一个时刻 t_2 也可以用同样的方法来处理。因此，如果用 ε_1' 和 ε_1'' 表示这两个时刻的交角，而符号 Υ_1' 和 Υ_1'' 既用来表示两个交点又表示这两个交点离开 Υ^0 的距离，则我们有

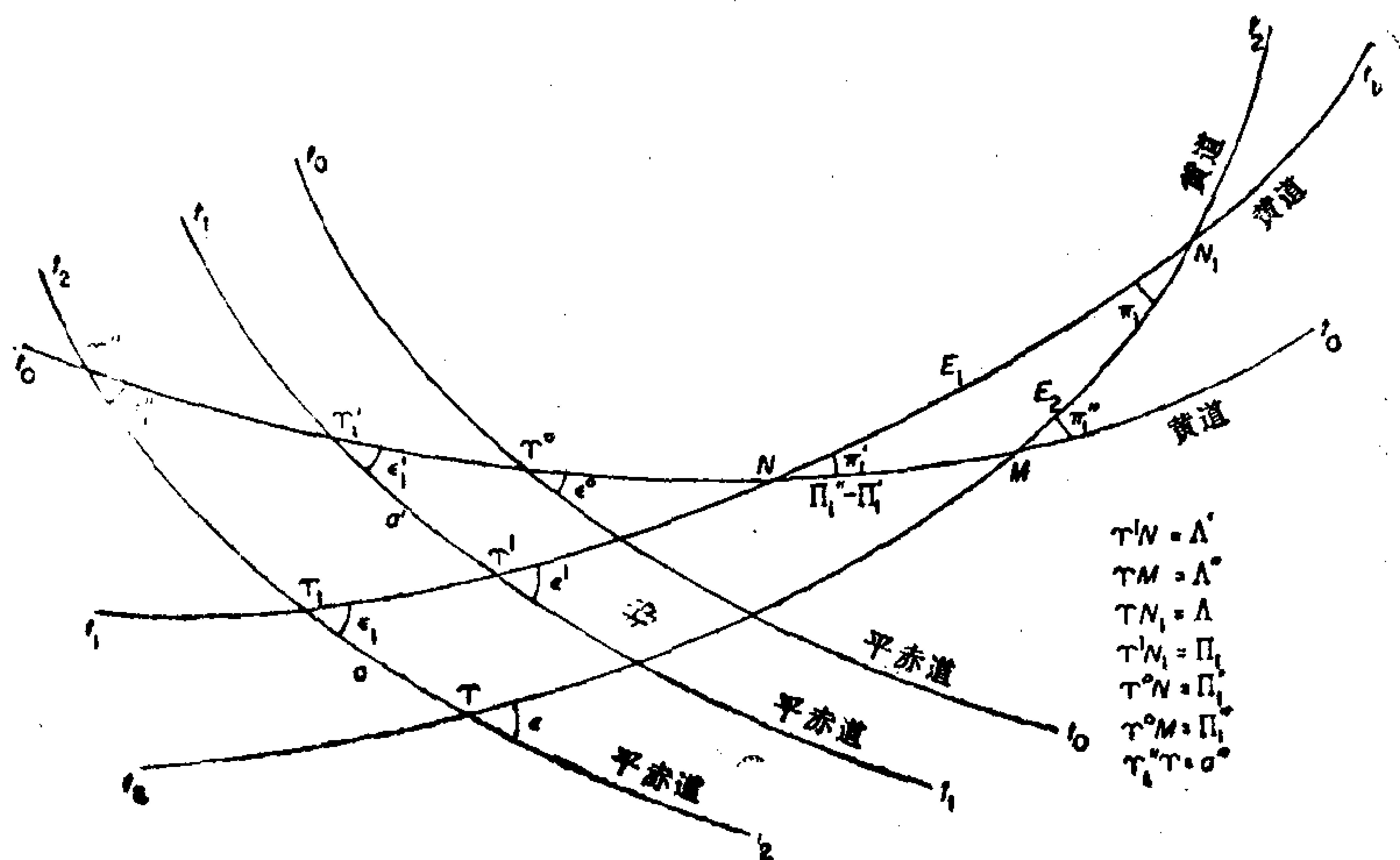


图 44 相对于任意历元的岁差运动

t_0——基本历元；t_1——任意历元，从 t_0 起算；t_2——从 t_0 起算的日期；$\tau=t_2-t_1$——从 t_1 起算的日期

$$\varepsilon_1'=\varepsilon^0+\theta_1t_1+\theta_2t_1^2+\cdots\cdots,$$

$$e_1'' = \varepsilon^0 + \theta_1 t_2 + \theta_2 t_2^2 + \cdots\cdots,$$
$$\Upsilon_1' = f_1 t_1 + f_2 t_1^2 + \cdots\cdots, \qquad (134)$$
$$\Upsilon_1'' = f_1 t_2 + f_2 t_2^2 \cdots\cdots.$$

如果从基本历元 t_0 到 t_1 和 t_2 的时间间隔内的黄经总岁差量分别用 Υ' 和 Υ'' 表示，而行星岁差量用 a' 和 a'' 表示，则从（126）式我们有

$$\Upsilon' = \Lambda' - \Pi_1' - \frac{1}{2} p_1 q_1 t_1^2$$
$$= h_1 t_1 + h_2 t_1^2 + \cdots\cdots,$$
$$\Upsilon'' = \Lambda'' - \Pi_1'' - \frac{1}{2} p_1 q_1 t_2^2$$
$$= h_1 t_2 + h_2 t_2^2 + \cdots\cdots, \qquad (135)$$
$$a' = g_1 t_1 + g_2 t_1^2 + \cdots\cdots,$$
$$a'' = g_1 t_2 + g_2 t_2^2 + \cdots\cdots,$$

从几何上来说，式中的 Π_1'' 和 Π_2'' 就是从 Υ^0 起，量到 t_1 黄道和 t_2 黄道对于 t_0 黄道的交点的距离，在（104）式中令 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 即可得到这两个量。Λ' 是 t_1 黄道上从 t_1 黄道对 t_0 黄道的交点到 t_1 黄道与 t_1 平赤道的交点 Υ^1 之间的圆弧，Λ'' 为 t_2 黄道上从 t_2 黄道对 t_0 黄道的交点到它与 t_2 平赤道的交点 Υ 间的圆弧；而 $a' = \Upsilon_1'\Upsilon_1$，$a'' = \Upsilon_1''\Upsilon$。

从前面的那些表达式，我们就可以导出对于作为某个任意历元的 t_1（而不是对 t_0）而言的岁差公式。

为了求得任意时刻 t_2 时黄道对另外任意一个历元 t_1 时黄道的倾角 π_1 和升交点 Π_1（这里 t_1 和 t_2 都从基本历元 t_0 起计量），我们在由 t_1 黄道和 t_2 黄道的交点 N_1 以及这两个黄道与 t_0 黄道的两个交点 N、M 所构成的球面三角形中，利用纳比尔法则就有

$$\tan\frac{1}{2}(E_1+E_2)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\pi_1''+\pi_1')}{\sin\frac{1}{2}(\pi_1''-\pi_1')}\tan\frac{1}{2}(\Pi_1''-\Pi_1'),$$

$$\tan\frac{1}{2}(E_1-E_2)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\pi_1''+\pi_1')}{\cos\frac{1}{2}(\pi_1''-\pi_1')}\tan\frac{1}{2}(\Pi_1''-\Pi_1'),$$

$$(136)$$

$$\tan\frac{1}{2}\pi_1=\frac{\cos\frac{1}{2}(E_1-E_2)}{\cos\frac{1}{2}(E_1+E_2)}\tan\frac{1}{2}(\pi_1''-\pi_1'),$$

式中 $E_1=N_1N$，$E_2=N_1M$，而 $\Pi_1''-\Pi_1'=MN$。对于上面这些式子来说，实际上通常可以用下面的近似关系式来代替

$$E_1+E_2=\frac{\pi_1''+\pi_1'}{\pi_1''-\pi_1'}(\Pi_1''-\Pi_1'),$$

$$E_1-E_2=\Pi_1''-\Pi_1', \qquad (137)$$

$$\pi_1=\frac{\cos\frac{1}{2}(E_1-E_2)}{\cos\frac{1}{2}(E_1+E_2)}(\pi_1''-\pi_1');$$

同时因为 $E_1=\Pi_1-\Lambda'$，就有

$$\Pi_1=\Pi_1'+\Upsilon'+\frac{1}{2}p_1q_1t_1^2+E_1. \qquad (138)$$

不过，在一段比较短的时间间隔内，把这些表达式展开为 $\tau=t_2-t_1$ 的幂级数可以有足够的精度，而且对于数字计算来说也更为方便。

从（137）和（102）两式，保留到三阶项就有：

$$E_1 = \frac{\pi_1''}{\pi_1'' - \pi_1'}(\Pi_1'' - \Pi_1')$$

$$= S_1 t_1 + \left(2S_2 - \frac{s_2}{s_1} S_1 \right) t_1^2$$

$$+ \left\{ S_1 + \left(3S_2 - \frac{s_2}{s_1} S_1 \right) t_1 \right\} \tau + S_2 \tau^2,$$

$$E_2 = \frac{\pi_1'}{\pi_1'' - \pi_1'}(\Pi_1'' - \Pi_1')$$

$$= S_1 t_1 + \left(2S_2 - \frac{s_2}{s_1} S_1 \right) t_1^2$$

$$+ \left\{ S_2 - \frac{s_2}{s_1} S_1 \right\} t_1 \tau,$$

因此，从（138）和（137）式

$$\Pi_1 = \Pi_0 + (h_1 + 2S_1) t_1 + \left(h_2 + 3S_2 - \frac{s_2}{s_1} S_1 \right) t_1^2$$

$$+ \left\{ S_1 + \left(3S_2 - \frac{s_2}{s_1} S_1 \right) t_1 \right\} \tau + S_2 \tau^2,$$

（139）

$$\pi_1 = \left\{ s_1 + 2s_2 t_1 + \left(3s_3 + \frac{1}{2} s_1 S_1^2 \right) t_1^2 \right\} \tau$$

$$+ \left\{ s_2 + \left(3s_3 + \frac{1}{2} s_1 S_1^2 \right) t_1 \right\} \tau^2 + s_3 \tau^3.$$

由（103）式可知，这些关系式也完全可以用 p_i、q_i 来加以表达。

从 Π_1 和 π_1 的表达式中 τ 的各次幂的系数，我们可以导出有关 $\tan \pi_1 \sin \Pi_1$ 和 $\tan \pi_1 \cos \Pi_1$，或者关于 $\sin \pi_1 \sin \Pi_1$（或 $\pi_1 \sin \Pi_1$）及 $\sin \pi_1 \cos \Pi_1$（或 $\pi_1 \cos \Pi_1$）的表达式，

其中所用到的关系式的形式同用Π_0、S_i、s_i来表示p_i、q_i时的那些表达式的形式是相同的：

$$\tan\pi_1\sin\Pi_1=\Big\{p_1+[2p_2+s_1h_1\cos\Pi_0]t_1+\Big[3p_3$$

$$-\sin\Pi_0\Big(s_1^3+2s_1h_1S_1+\frac{1}{2}s_1h_1^2\Big)$$

$$+\cos\Pi_0(2s_2h_1+s_1h_2)\Big]t_1^2\Big\}\tau$$

$$+\{p_2+[3p_3-\sin\Pi_0(s_1^3$$

$$+s_1h_1S_1)+\cos\Pi_0s_2h_1]t_1\}\tau^2$$

$$+p_3\tau^3, \qquad (140)$$

$$\tan\pi_1\cos\Pi_1=\Big\{q_1+[2q_2-s_1h_1(\sin\Pi_0]t_1$$

$$+\Big[3q_3-\cos\Pi_0\Big(s_1^3+2s_1h_1S_1$$

$$+\frac{1}{2}s_1h_1^2\Big)-\sin\Pi_0(2s_2h_1+s_1h_2)\Big]t_1^2\Big\}\tau$$

$$+\{q_2+[3q_3-\cos\Pi_0(s_1^3$$

$$+s_1h_1S_1)-\sin\Pi_0s_2h_1]t_1\}\tau^2+q_3t^3,$$

而用$\sin\pi_1$或π_1取代$\tan\pi_1$时所得到的表达式同这些式子的差异仅仅在于三阶项，这在数值上是可以忽略不计的。

某一任意历元t_1时的固定黄道与t_1平赤道的交点♈^{1}是该任意历元的平春分点；而倾角ε^1是平黄赤交角，在（126）式中令$t=t_1$便得到

$$\varepsilon^1=\varepsilon^0+\eta_1t_1+\eta_2t_1^2+\cdots\cdots.$$

在任何其它时刻t_2，t_1固定黄道与t_2平赤道的交角用ε_1来表示，而两者的交点用♈$_1$表示。由♈^{1}向西量到♈$_1$的距离，代

表了在 $\tau=t_2-t_1$ 这段时间间隔内沿着任意历元 t_1 的固定黄道的日月岁差量，这里 t_1 和 t_2 是从基本历元 t_0 起算的。如果用标志交点所用的同一个符号 Υ_1 来表示上面所说的这段距离，并且用 Λ_1 表示从点 Υ_1 到 t_1 黄道对 t_0 黄道的交点的圆弧，我们就有 $\Upsilon_1=\Lambda_1-\Lambda'$。

很明显，从几何上来说，在（104）式中令 $t=t_1$，然后把它连同关于 ε_1'' 和 Υ_1'' 的（134）式一起代入（124）式所得出的关于 Λ 的解的表达式，我们就可以求得 Λ_1，从这一 Λ_1 值以及从（135）式得到的 Λ' 值，并顾及

$$\begin{aligned} &t_2-t_1=\tau,\\ &t_2^2-t_1^2=\tau^2+2t_1\tau, \qquad\qquad (141)\\ &t_2^3-t_1^3=\tau^3+3t_1\tau^2+3t_1^2\tau, \end{aligned}$$

我们就得到从任意历元 t_1 起算的时间 τ 的幂级数（保留到三阶项）

$$\begin{aligned} \Upsilon_1=\Big\{&f_1+[2f_2-f_1q_1\cot\varepsilon^0+\theta_1p_1\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0]t_1\\ &+\Big[3f_3-2f_2q_1\cot\varepsilon^0+\frac{1}{2}f_1(q_1^2-p_1^2)(1+\cos^2\varepsilon^0)\\ &\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0-f_1q_2\cot\varepsilon^0+f_1^2p_1\cot\varepsilon^0\\ &+2\theta_2p_1\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0+(p_2\theta_1-2p_1q_1\theta_1\cot\varepsilon^0\\ &-2p_1\theta_1^2\cot\varepsilon^0)\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0\Big]t_1^2\Big\}\tau+\Big\{f^2+\Big[3f_3\\ &-f_2q_1\cot\varepsilon^0+\frac{1}{2}f_1^2p_1\cot\varepsilon^0+p_1\theta_2\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0\\ &+(\theta_1f_1q_1-\theta_1^2p_1\cot\varepsilon^0)\operatorname{cosec}^2\varepsilon^0\Big]t_1\Big\}\tau^2+f_3\tau^3, \end{aligned} \qquad (142)$$

如果 $t_1=0$，$\tau=t_2=t$，上式就简化为（123）式。

同样，在（104）式中令 $t=t_1$，然后把它连同关于 ε_1'' 和

Υ_1''的（134）式一起代入由（124）式得出的关于ε的解的表达式，我们就可以求得任意时刻t_2的平赤道对某任意历元t_1的固定黄道的倾角ε_1，用从历元t_1起算的时间$\tau=t_2-t_1$的幂级数形式来表示，则有

$$\varepsilon_1=\varepsilon^1+\Big\{\theta_1+(2\theta_2-f_1p_1)t_1+\Big(3\theta_3-f_1p_2-2f_2p_1-f_1^2q_1+f_1p_1q_1\cot\varepsilon^0-\frac{1}{2}\theta_1\,p_1^2\,\mathrm{cosec}^2\varepsilon^0\Big)t_1^2\Big\}\tau+\Big\{\theta_2+\Big(3\theta_3-f_2p_1-\frac{1}{2}f_1^2q_1\Big)t_1\Big\}\tau^2+\theta_3\tau^3. \tag{143}$$

任意时刻的日期平黄赤交角ε，是瞬时运动平赤道与瞬时运动黄道在它们的瞬时交点处的交角。因此，对于某任意历元t_1后的任何一段时间间隔$\tau=t_2-t_1$来说（这里t_1和t_2都从基本历元t_0起算），利用（126）和（141）两式，我们立即有

$$\begin{aligned}\varepsilon&=\varepsilon^0+\eta_1t_2+\eta_2t_2^2+\eta_3t_2^3\\&=\varepsilon^0+\eta_1t_1+\eta_2t_1^2+\eta_3t_1^3\\&\quad+\{\eta_1+2\eta_2t_1+3\eta_3t_1^2\}\tau\\&\quad+\{\eta_2+3\eta_3t_1\}\tau^2+\eta_3\tau^3.\end{aligned} \tag{144}$$

时间间隔$\tau=t_2-t_1$内的黄经总岁差量用Υ表示。根据纽康的定义算得

$$\Upsilon=(E_2+\Lambda'')-(E_1+\Lambda')-\frac{1}{2}p_1q_1\tau^2;$$

而从（135）式有

$$\Upsilon=(\Upsilon''-\Upsilon')+(\Pi_1''-\Pi_1')-(E_1-E_2)+p_1q_1t_1\tau,$$

式中（E_1-E_2）由（136）式给出。取到三阶项时为（以弧度为单位）

$$E_1 - E_2 = (\Pi_1'' - \Pi_1') + \frac{1}{2}(\Pi_1'' - \Pi_1')\ \pi_1''\pi_1'$$

$$+ \frac{1}{12}(\Pi_1'' - \Pi_1')^3$$

因而

$$\Upsilon = (\Upsilon'' - \Upsilon') + \frac{1}{2}\ (\Pi_1'' - \Pi_1')\ \pi_1''\ \pi_1' - \frac{1}{12}(\Pi_1''$$

$$- \Pi_1')^3 + p_1 q_1 t_1 \tau$$

$$= \left\{ h_1 + 2h_2 t_1 + \left(3h_3 + \frac{1}{2} s_1{}^2 S_1\right) t_1{}^2 + p_1 q_1 t_1 \right\}\tau$$

$$+ \left\{ h_2 + \left(3h_3 + \frac{1}{2} s_1{}^2 S_1\right) t_1 \right\}\tau^2 + h_3 \tau^3 - \frac{1}{12}$$

$$\cdot (\Pi_1'' - \Pi_1')_3. \qquad (145)$$

岁差公式系统的建立

在现代天文学中广泛应用的关于岁差运动的最早数值是由贝塞尔● 根据拉普拉斯● 提出的理论表达式在 19 世纪初推导出来的。贝塞尔的数值逐渐地为后来奥托·斯特鲁维（1843）导出的值所代替，斯特鲁维是根据布拉德雷在1750～1755年间所作的观测同贝塞尔的观测比较而得出他的结果的。斯特鲁维求得的数值由彼得斯作了修正，后者首次给出有关章动理论的完整推导●。

斯特鲁维-彼得斯岁差值在 19 世纪后半叶的高精度天文计算工作中得到普遍的采用。更近一些的数值是在后来由另外几位作者推导出来的。1896 年，英、法、德、美这几个国家在巴黎召开了一次天文年历主任会议，这次会议的目的是要决定一组统一的天文常数以及一个恒星归算系统，以便在各国的天文年历中予以采用。纽康● 为此确定了岁差运动的数值以代替他早期所用的

● 见F.W.Bessel, “Tabulae Regiomontanae”.

● P.S.Laplace, “Mécanique Céleste,” Bk.Ⅵ, Sec. 44 和BK. Ⅴ; 见F.W.Bessel, “Fundamenta Astronomiae,” pp.125—131.

● 见C.A.F.Peters, “Numerus Constans Nutationis”，以及在引言中对这一问题的讨论.

● S.Newcomb, Astr.Pap.Amer.Eph.Ⅷ.

值[1]。在纽康的行星表中所采用的总岁差，比《美国天文年历天文文集》[2]中所推导的值每世纪小0.82″。

纽康利用数值处理的方法从一些基本常数求得了岁差运动，其结果主要是用一些数值表的形式来表示的[3]。他首先确定瞬时运动速度，然后用数值积分依次推出各个历元时刻的黄道和赤道的位置。安多耶利用形式如（139）到（145）这些公式的一组表达式，从纽康的基本常数值出发建立了一种通用的分析表达式[4]。

在表示黄道位置的关于 $\pi_1 \sin \Pi_1$ 和 $\pi_1 \cos \Pi_1$ 的（101）式中，各个系数的数值是纽康从黄极坐标的变化率求得的，他用来表示黄极坐标的固定直角坐标系是基本历元1850年的黄极位置和二至圈确定的。纽康根据他的黄道面长期运动的引力理论，对1600、1850和2100这三个年份计算了相对于1850年固定二至圈方向的瞬时旋转速率 κ 和瞬时轴黄经 $L_0 = 180° - N_0$ 这两个量的值[5]。下表给出了这些数值[6]，并且已归算到纽康**太阳表**中所采用的行星质量[7]。

	1600	1850	2100
κ	47.316″	47.141″	46.976″
N_0	5°17.96′	6°30.32″	7°42.82″
$\kappa \sin N_0$	4.370″	5.341″	6.305″

[1] S.Newcomb, "Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy," 1895.

[2] 见 Astr.Pap.Amer.Eph.Ⅷ, 291 和 421。

[3] S. Newcomb, 《四个内行星的轨道要素及基本天文常数》, pp. 196—202, 1895。Astr.Pap.Amer. Eph, Ⅷ, 73—76。"Compendium of Spherical Astronomy", pp.236—246。

[4] 见H.Andoyer, 根据纽康的岁差公式。Bull.Astr.28, 67—76 (1911)。"Cours de Mécanique Céleste," Vol.Ⅰ, pp.378—384, Paris, 1926。

[5] S.Newcomb, Astr.Pap.Amer.Eph.Ⅴ, 335, 373—374, 377.

[6] S.Newcomb, 《四个内行星的轨道要素及基本天文常数》, p.186.

[7] S.Newcomb, Astr.Pap.Amer.Eph.Ⅵ, 12.

$k\cos N_0$	47.113″	46.838″	46.550″
L_0	174°42.04′	173°29.68′	172°17.18′

黄极直角坐标的瞬时变化（图45）为

$$\kappa \sin N_0 = dx/dt, \qquad \kappa \cos N_0 = dy/dt,$$

如果用斯蒂林内插公式表示上面表中给出的三个数值，则有

$$dx/dt = 5.341'' + 0.3870''T - 0.00056''T^2,$$

$$dy/dt = 46.838'' - 0.1126''T - 0.00104''T^2,$$

式中T表示1850年后的儒略世纪数。运动黄道对于历元固定黄道的位置是

$$x = \pi_1 \sin N_1, \qquad y = \pi_1 \cos N_1,$$

其中$N_1 = 180° - \Pi_1$。

对纽康关于dx/dt和dy/dt的表达式进行积分，便给出了相对于1850年固定黄道而言的瞬时黄道位置[1]

$$\pi_1 \sin \Pi_1 = +5.341''T + 0.1935''T^2 - 0.00019''T^3,$$

$$\pi_1 \cos \Pi_1 = -46.838''T + 0.0563''T^2 + 0.00035''T^3,$$

式中T表示从1850年起的儒略世纪数；π_1与T同号，而Π_1从历元固定春分点起算。

有关黄道运动和位置的这些表达式实质上是一些内插公式，我们可以利用这些公式来求得在理论计算值所涉及的时间间隔内任何日期的数值，因此严格来说，它们仅仅在历元前后各大约250年的时间范围内才是有效的，再往外推所得到的值就不

图45 黄极的运动

[1] S.Newcomb, “Compendium of Spherical Astronomy, ” p.232.

可靠了，而且外推越远误差就越大。无论对黄道位置或赤道位置来说，都不存在任何严格的公式。

纽康根据1750-2100年内每50年间隔从这些公式所算得的有关x和y值的一份表，求得了相应的π_1和N_1的数值。由此得到的瞬时黄道对于1850年固定黄道的倾角以及升交点黄经值可以用下面的内插公式来表示

$$\pi_1 = 0.4714''t - 0.000003''t^2,$$

$$\Pi_1 = 173°29'40'' - 8.691''t,$$

其中t是从1850年起算的年数。

有了基本历元1850年时的岁差常数P_0和平黄赤交角ε^0这两个数值，就可以利用（131）式从κ和N_0计算该历元时的瞬时岁差运动速率，因为在该历元时$\Theta=\varepsilon^0$和$N=N_0$。纽康采用$\varepsilon^0 = 23°27'31.68''$[●]，得到（以儒略世纪为单位）：

黄经日月岁差	5036.84″
赤经日月岁差	4620.53″
赤纬岁差n	2005.11″ = 133.674^s
赤经行星岁差	13.416″
黄经行星岁差	12.307″
黄经总岁差	5024.53″ = 83.742′
赤经总岁差m	4607.11″ = 307.141^s
平黄赤交角的长期变化	−46.837″

要确定除1850年外其它日期的运动速率，就必须求得关于N和Θ的表达式。

为了表示黄道的行星运动，纽康根据从动力学理论所确定的关于1600、1850、2100年的N_0和κ的数值，求得了以下的内插公式：

$$N_0 = 6°30.32' + 28.972'T + 0.011'T^2,$$

● S.Newcomb "Elements and Constants", p.182.

$$\kappa = 47.11'' - 0.07''T,$$

其中T表示1850年起的世纪数。

在任何瞬间，由于黄经总岁差的变化，dN_0/dt与dN/dt是不同的，因此

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_0}{dt} - (P_0 \cos\Theta - \kappa \sin N \cot\Theta).$$

有了1850年的黄经总岁差的值，这个方程便给出了（保留到T的一次幂）

$$\frac{dN}{dt} = -54.770',$$

$$N = 6^\circ 30.32' - 54.770'T.$$

纽康从上面这些关于κ和N的表达式，计算了1750到2100年间每50年间隔的κ、N、$\kappa\cos N$、$\kappa\sin N$的数字表。这些数值可以用内插公式以T的幂级数来加以表示，由$\kappa\cos N$的数值所建立的公式代表了$-d\Theta/dt$，再通过积分纽康便得到

$$\Theta = 23^\circ 27' 31.68'' - 46.837''T - 0.0085''T^2 + 0.0017''T^3,$$

式中T从1850年起计的世纪数。

现在，我们就可以由（131）式确定任何日期的岁差运动。为精确起见，在计算出每50年间隔的黄经总岁差值之后，可以用它们来计算新的N值，而且还可以建立起一个二次近似式。

任意时刻岁差位移a、Θ_1和Ψ_1的量是由纽康从这些量的变化率，通过逐次逼近的方法求得的。只要有一个粗略的a值，就可以求得Θ_1的非常精确的一次近似值，为此，先从三角形$\Upsilon_1\ \overline{\Upsilon}\ N_1$，利用正弦定律给出的关系式，计算1850到2100年间每50年间隔的a值，

$$a = \frac{\pi_1 \sin(\Pi_1 + \Psi_1)}{\sin\Theta},$$

式中π_1、Π_1和Θ都是已经确定了的量，而利用1850年Ψ_1的运动值，设$\Psi_1 = 83.'9T$，就可以求得Ψ_1的一个足够精确的近

似值。纽康用以下的内插公式表示以弧度为单位的这些 a 值

$$a=(65.03T-11.54T^2)\times10^{-6},$$

由（132）式便求得一次近似值

$$\frac{d\Theta_1}{dt}=0.1304''T-0''.0232T^2,$$

$$\Theta_1=\varepsilon^0+0.0652''T^2-0.0077''T^3,$$

其中 T 表示从历元 1850 年起计的**回归**世纪数。

有了 Θ_1 的这一表达式，就可以求得一个确定的 Ψ_1 值，用（133）式计算 1750-2100 年内每 50 年间隔的 $d\Psi_1/dt$ 的数值，并且用内插公式来表示这些数值，于是纽康得出

$$\frac{d\Psi_1}{dt}=5036.84''-2.130''T-0.010''T^2,$$

$$\Psi_1=5036.84''T-1.065''T^2-0.003''T^3$$
$$=83.947'T-0.0177'T^2.$$

有了 Ψ_1 之后，就可以从前面所用到的同样表达式计算出 a 的确定值，纽康从 1750-2100 年内每 50 年间隔的数值得到

$$a=13.416''T-2.380''T^2-0.0014''T^3.$$

从上面关于 $d\Theta_1/dt$ 和 a 的表达式消去 $\sin a$ 后得到下面的关系式

$$\frac{d\Theta_1}{dt}=P_0\pi_1\cos\Theta\sin(\Pi_1+\Psi_1),$$

根据这个关系式可以求得一个 Θ_1 的确定值，纽康从 1750-2100 年间的具体数值得到

$$\frac{d\Theta_1}{dt}=0.13042''T-0.02320''T^2,$$

$$\Delta\varepsilon^0=0.06521''T^2-0.00773''T^3,$$

其中 T 从 1850 年起算。

有了 Ψ_1 和 $\Delta\varepsilon^0$ 的值后，就可以从（125）式确定角 ζ、ζ_0 和 z。通过计算一系列具体数值并把它们表示为一个内插公式的

方法，纽康从1750-2100年间每50年间隔的 $\tan\frac{1}{2}(\zeta+\zeta_0)=\cos\left(\varepsilon^0+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon^0\right)\tan\frac{1}{2}\Psi_1$ 的数值求得

$$\zeta+\zeta_0=4620.53''T-0.984''T^2+0.036''T^3.$$

略去三阶项，并且 Ψ_1 用弧度来表示的话，则有关 $\tan\frac{1}{2}(\zeta-\zeta_0)$ 的三角公式可以写为

$$\zeta-\zeta_0=\frac{\Delta\varepsilon^0}{\sin\varepsilon^0}\frac{1}{\frac{1}{2}\Psi_1\left(1+\frac{1}{12}\Psi_1^2\right)}$$

$$=\frac{2\Delta\varepsilon^0}{\sin\varepsilon^0}\frac{T}{\Psi}\frac{1-\frac{1}{12}\Psi_1^2}{T}$$

$$=\frac{2\Delta\varepsilon^0}{\sin\varepsilon^0}\frac{40.952+0.0086T-0.0020T^2}{T}$$

$$=\operatorname{cosec}\varepsilon^0\{5.3409''T-0.6320''T^2-0.0004''T^3)$$

有了这个表达式以及 $\operatorname{cosec}\varepsilon^0=2.512$ 以后，纽康就得到

$$\zeta-\zeta_0=13.416''T-1.588''T^2-0.0010''T^3,$$

根据这个式子，再考虑到 $\zeta+\zeta_0$ 及 a 的表达式，就有

$$\zeta=2316.97''T-1.286''T^2+0.017''T^3,$$
$$\zeta_0=2303.56''T+0.302''T^2+0.018''T^3,$$
$$z=2303.55''T+1.094''T^2+0.018''T^3,$$

式中 T 从1850年起算。

为了确定 J 的数值可以有两种方法：或者通过有关 dJ/dt 的(132)式，或者根据三角形 $Q_0\overline{\Upsilon}_1\Upsilon^0$ 中的正弦定律，后者给出的关系式是：

$$\sin J=\frac{\sin\varepsilon^0\sin\Psi_1}{\cos\zeta},$$

从 1750-2100 年间每 50 年间隔的 J 的数值，纽康得出

$$J = 2005.11''T - 0.43''T^2 - 0.041''T^3,$$

式中以 1850 年为历元。

通过对纽康给出的关于一些特定日期的岁差运动及岁差位移值的数字表进行内插，便可以确定 1750 和 2100 年间任一时刻的赤道和春分点对于任意初始历元的赤道和春分点的相对位置[1]。安多耶建立了一种系统性的分析表达式，用来代替这种数字形式的表达方式。为此，安多耶采用了纽康所得到的 1600、1850、2100 年的$\kappa \sin N_0$ 和 $\kappa \cos N_0$ 的理论数值，以及纽康所用的历元 1850 年的 ε^0 和 P_0 值：

$$\varepsilon^0 = 23°27'31.68'', \qquad P_0 = 5490.66'' - 0.00364''T,$$

其中 P_0 的时间单位是回归世纪；安多耶由这些基本常数推导出以时间的幂级数形式出现的一套完整的表达式，其中既有用于历元 1850.0 的公式，又有用于任意历元的公式。上面这些基本常数确定了有关黄道行星运动动力学表达式中的时间的各次幂的系数 p_i、q_i，以及有关黄经和黄赤交角的日月岁差动力学表达式中的系数 f_i、θ_i，根据这些基本的动力学常数，从有关的表达式把上述那些系数确定出来之后，就可以推导出有关其它岁差公式的时间的幂级数表达式。

安多耶用 $\Lambda - \Pi_1$ 作为对黄经总岁差的量度，并且对 1850.0 这一基本历元取 $\theta_1 = 0$，而时间以 1000 回归年为单位来计算，这样就得到了表Ⅳ所给出的数据，这些数据说明了从基本历元起的任一时刻 T 的岁差位移。

在表Ⅳ中所列出的各个表达式的某些系数的末位数字不可避免地同纽康所得到的数据有少量的差异，这是由系数确定方法上的差异引起的。

---

[1] 见Astr.Pap.Amer.Eph.Ⅷ, 73—76; S.Newcomb"Compendium of Spherical Astronomy"，附录Ⅲ和Ⅳ。

岁差位移 **表Ⅳ**

	系数		
	T	T^2	T^3
黄经日月岁差Ψ_1	+50368.38″	−107.13″	−1.53″
交角日月岁差 $\Delta\varepsilon^0$	——	+6.52″	−7.73″
交角的长期变化	−468.37″	−0.88″	+1.83″
黄经总岁差Ψ	+50245.30″	+111.13″	+0.10″
行星岁差a	+134.17″	−237.99″	−1.66″
赤经总岁差μ	+46071.09″	+139.72″	+36.32″
赤纬日月岁差J	+20051.12″	−42.65″	+41.80″
$z-\zeta_0$	——	+79.24″	——
$\pi_1 \sin \Pi_1$	+53.41″	+19.35″	−0.19″
$\pi_1 \cos \Pi_1$	−468.37″	+5.63″	+0.35″
π_1	+471.41″	−3.40″	+0.05″
$\Pi_1=173°29'40''$	−8691″	+3″	——

对于从任意历元 t_1 起的任一时刻 $\tau=t_2-t_1$（其中的 t_1 和 t_2 都从基本历元 1850.0 起算，并以 1000 回归年为单位）来说，安多耶得到：

$$\Psi_1=(50368.38''+49.30''t_1-0.04''t_1^2)\tau + (-107.13''-1.48''t_1)\tau^2-1.53''\tau^3,$$

$$\Theta_1=23°27'31.68''-468.37''t_1-0.88''t_1^2+1.83''t_1^3 + (6.52''-9.20''t_1)\tau^2-7.73''\tau^3,$$

$$\Theta=23°27'31.68''-468.37''t_1-0.88t_1^2+1.83''t_1^3 + (-468.37''-1.75''t_1+5.49''t_1^2)\tau + (-0.88''+5.49''t_1)\tau^2+1.83''\tau^3,$$

$$\Psi=(50245.30''+222.27''t_1+0.26''t_1^2)\tau + (111.13''+0.26''t_1)\tau^2+0.10''\tau^3,$$

$$a=(134.17''-188.69''t_1-0.14''t_1^2)\tau + (-237.99''+1.57''t_1)\tau^2-1.666''\tau^3,$$

$$\mu=(46071.09''+279.44''t_1+0.12''t_1^2)\tau$$

$$+(139.72''+0.12''t_1)\tau^2+36.32''\tau^3,$$

$$J=(20051.12''-85.29''t_1-0.37''t_1^2)\tau$$

$$+(-42.65''-0.37''t_1)\tau^2-41.80''\tau^3,$$

$$z-\zeta_0=(79.24''+0.66''t_1)\tau^2+0.33''\tau^3,$$

$$z=(23035.545''+139.720''t_1+0.060''t_1^2)\tau$$

$$+(109.480''+0.390''t_1)\tau^2+18.325''\tau^3,$$

$$\zeta_0=(23035.545''+139.720''t_1+0.060''t_1^2)\tau$$

$$+(30.240''-0.270''t_1)\tau^2+17.995''\tau^3,$$

$$\zeta=z+a,$$

$$\pi_1\sin\Pi_1=(+53.41''-75.39''t_1+0.34''t_1^2)\tau$$

$$+(19.35''+0.80''t_1)\tau^2-0.19''\tau^3,$$

$$\pi_1\cos\Pi_1=(-468.37''-1.75''t_1+5.49''t_1^2)\tau$$

$$+(5.63''-3.66''t_1)\tau^2+0.35''\tau^3,$$

$$\pi_1=(471.41''-6.80''t_1+0.57t_1^2)\tau(-3.40''$$

$$+0.57''t_1)\tau^2+0.05''\tau^3,$$

$$\Pi_1=173°29'40''+32863''t_1+56''t_1^2$$

$$+(-8691''-55''t_1)\tau+3''\tau^2.$$

为了得出直接用从 1900 年而不是从 1850 年起算的任意历元所表示的普遍表达式，我们可以在安多耶的公式中以 $t_1+0.05$ 替代 t_1，同样，对于任何其它所需要的初始历元也可以这样做。例如，要是 t_1 从 1900 年起算，而 τ 从 t_1 起算，两者都以 1000 回归年为单位，则有

$$J=(20046.85''-85.33''t_1-0.37''t_1^2)\tau$$

$$+(-42.66''-0.37''t_1)\tau^2-41.80''\tau^3.$$

章　动

对于实际计算工作来说，瞬时真赤道的位置是相对于瞬时平赤道而言的，它或者用归算到瞬时黄道后的黄经章动和交角章动来表示，或者用对于瞬时平赤道的倾角和交点来表示，前者代表

了相对于运动黄道而言的赤道对其平位置的偏离，后者直接代表了对于瞬时平赤道的相对位置。

从瞬时平春分点起算的真赤道对平赤道的升交点Q的赤经用$90°-G_0$表示；而从瞬时真春分点起算的赤经用$90°+G'$表示。G_0和G'，以及真赤道对平赤道的倾角g_0，这三个量的数值可以根据三角关系从平黄赤交角、黄经章动和交角章动来加以确定，其中所用到的三角形是由平春分点、真春分点以及Q构成的（图46），赤经章动或二分差也是从这些关系式得到的。

在这一三角形中，$\Delta\Psi$表示黄经章动，而以$\varepsilon=\varepsilon_0+\Delta\varepsilon$表示瞬时真黄赤交角，其中$\varepsilon_0$是瞬时平黄赤交角，$\Delta\varepsilon$是交角章动，这时我们有

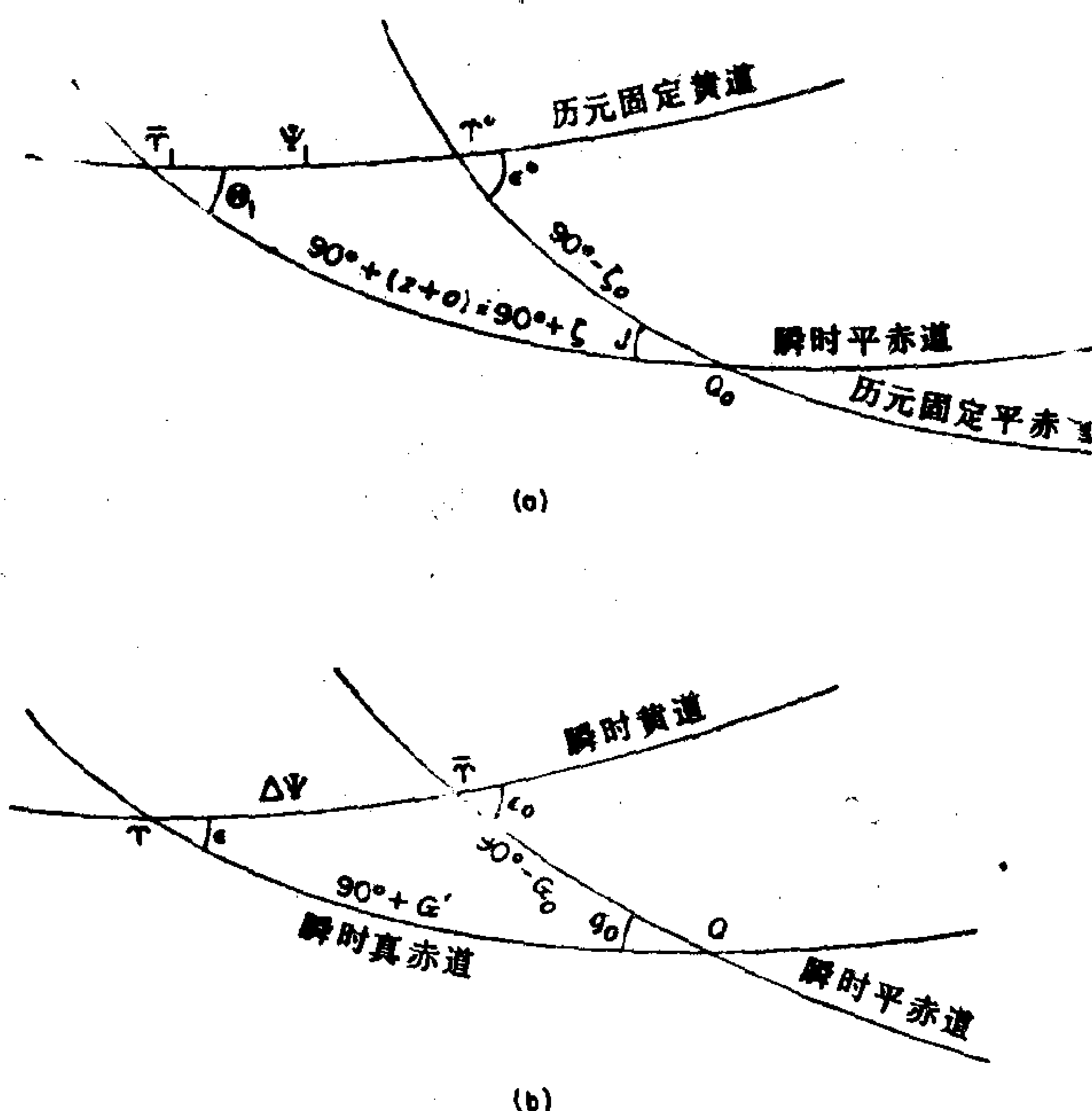


图 46 章动

a)瞬时平赤道与历元平赤道的关系；(b)瞬时真赤道与瞬时平赤道的关系

$$\tan\frac{1}{2}(G'+G_0)=\frac{\cos\left(\varepsilon_0+\frac{1}{2}\Delta\varepsilon\right)\tan\frac{1}{2}\Delta\Psi}{\cos\frac{1}{2}\Delta\varepsilon},$$

$$\sin g_0\sin G_0=\cos\varepsilon\sin\varepsilon_0-\sin\varepsilon\cos\varepsilon_0\cos\Delta\Psi, \tag{146}$$

$$\sin g_0\cos G_0=\sin(\varepsilon_0+\Delta\varepsilon)\sin\Delta\Psi.$$

这些关系式可以展开为 $\Delta\varepsilon$ 和 $\Delta\Psi$ 的幂级数，在实际工作中所用到的保留到三阶项的展开式为

$$G'+G_0=+\Delta\Psi\cos\varepsilon_0-\frac{1}{2}\Delta\Psi\Delta\varepsilon\sin\varepsilon_0+\frac{1}{12}\Delta\Psi^3\cos\varepsilon_0\sin^2\varepsilon_0,$$

$$g_0\sin G_0=-\Delta\varepsilon+\frac{1}{2}\Delta\Psi^2\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0+\frac{1}{6}\Delta\varepsilon^3+\frac{1}{2}\Delta\Psi^2\Delta\varepsilon\cos^2\varepsilon_0+\frac{1}{6}g_0^3\sin G_0, \tag{147}$$

$$g_0\cos G_0=+\Delta\Psi\sin\varepsilon_0+\Delta\Psi\Delta\varepsilon\cos\varepsilon_0-\frac{1}{6}\Delta\Psi^3\sin\varepsilon_0-\frac{1}{2}\Delta\Psi\Delta\varepsilon^2\sin\varepsilon_0+\frac{1}{6}g_0^3\cos G_0.$$

根据（147）式可以导出天球上任意一点因地球自转轴的章动而引起赤经和赤纬变化的表达式，在下一章中就要推导这些表达式，在关于 $\delta=0°$ 时的赤经变化表达式中，与 α 无关的那些项代表了二分差，由这些项引起的变化对于天球上所有的点来说全都相同，它是由赤道上春分点位置的变化引起的。最初，人们用**二分差**这个名词来表示由于章动所造成的春分点在赤道上以及在黄道上的位移，不过后来它们就被**赤经章动**和**黄经章动**这两个术

语所取代了。**黄经章动**这一术语一直沿用到今天，但是从1960年的星历表开始，早期的术语**二分差**就被用来表示由地轴章动所造成的春分点在赤道上的位移。从词源学上来说，这样比较恰当，并且避免了同因章动引起的天体赤经的实际变化发生混淆，后一种变化与黄经的变化不同，它通常和天体在天球上的位置有关。我们可以把二分差定义为平春分点对于真赤道和真春分点的赤经，它等于赤道上同一个天体的平赤经和真赤经之差。

第十二章　岁差和章动所引起的黄道坐标和赤道坐标的变化

基本参考圈在恒星间的运动使天球上点的坐标发生变化，它与点和参考圈之间的相对位置的变化有关，而且这种关系又是很复杂的，特别在赤道坐标系内更是如此。坐标的变化不但随着天球上点位的不同而不同，而且对于同一个点来说还随着时间的不同而有所不同。因此，我们必须很仔细地把任何瞬间坐标变化的瞬时速率，同在任何一段时间间隔内因积分效应所产生的累积变化量明确地区分开来。

在任何一个瞬间，如果我们所考虑的**只是黄道**的瞬时运动，那么这一运动对赤道的位置便没有任何影响，在瞬时平赤道上一点的赤经变化速率是 $d\alpha/dt=-da/dt$，这是由春分点沿赤道的运动所造成的，而瞬时平赤道认为是固定不变的。至于赤纬则不受影响。由于黄道的旋转运动，天球上任意一点 S 的黄经、黄纬就发生变化，其变化速率可以通过对三角形 SKP（图 47）取微分求得，由于 P 为直角，边 SK 为常数，而对角 K 的微分为 $-\kappa\,dt$，就有

$$d\lambda/dt=\kappa\cos(\lambda-\Pi)\tan\beta=-\kappa\cos(\lambda+N)\tan\beta,$$

$$d\beta/dt=-\kappa\sin(\lambda-\Pi)=+\kappa\sin(\lambda+N),$$

另外，春分点还必然会沿着黄道运动，这又会引起 λ 的进一步变化，其速率为 $(-da/dt)\cos\varepsilon$，这里 ε 表示瞬时平黄赤交角。

同时，如果所考虑的**仅仅是平赤道**的瞬时日月运动，这种运动与黄道无关，因而对黄道便没有任何影响，**瞬时**黄道上瞬时黄经 λ 的变化率就是由于春分点沿黄道运动而造成的**瞬时固定黄道上日月**岁差的变化率（也就是以给定瞬间为任意历元时的日月岁

差变化率 $d\Psi_1/dt$)，这时瞬时黄道认为是固定不变的，至于黄纬 β 则不受影响。把这类变化加在前面提到的、因黄道运动产生的变化率上，就给出了在黄道坐标系内坐标的岁差变化的瞬时速率

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{d\Psi}{dt}-\kappa\cos(\lambda+N)\tan\beta,$$

$$\frac{d\beta}{dt}=+\kappa\sin(\lambda+N), \tag{148}$$

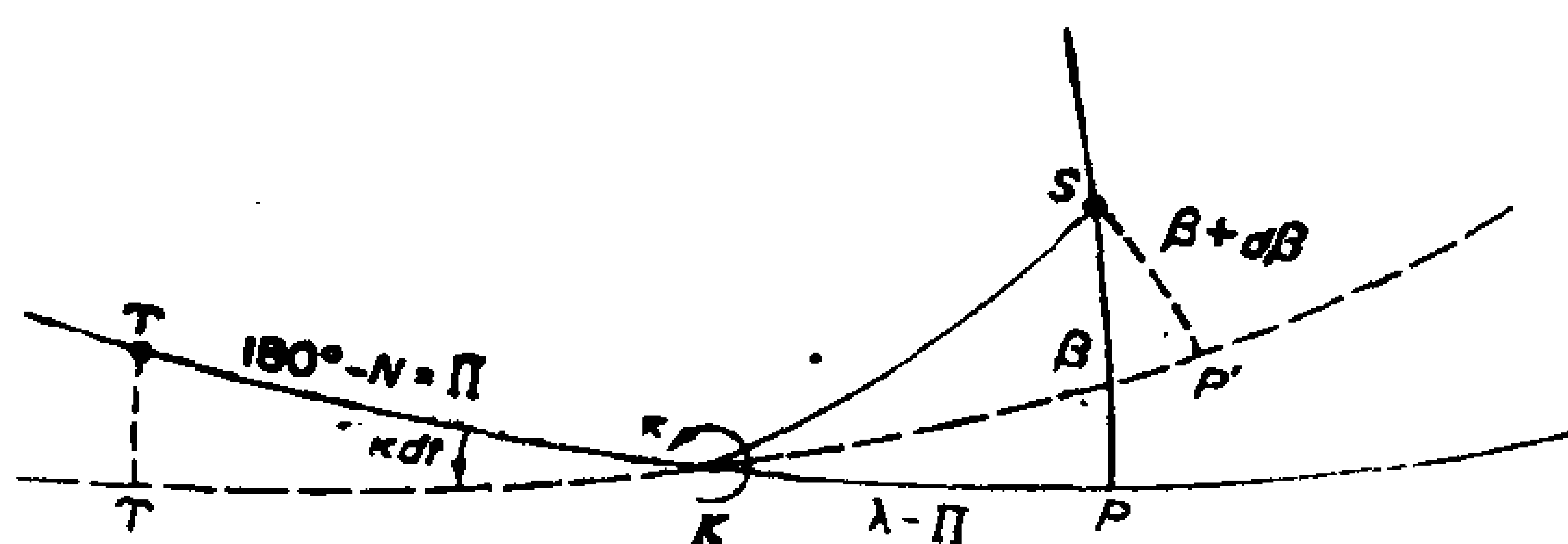


图 47　黄道的旋转

其中 $d\Psi/dt$ 是瞬时黄道上黄经总岁差的变化率，也就是对于作为任意历元的日期而言的 $(d\Psi_1/dt)-(da/dt)\cos\varepsilon$，它由(129)式给出。

仅仅由**平赤道**运动引起的瞬时赤经、赤纬的岁差变化率——它是由平赤道本身的日月运动以及由此而来的春分点沿赤道的运动这两方面因素造成的——可以通过赤道坐标与黄道坐标之间所存在的一些微分关系式来求得，同时需要令 $d\lambda=d\Psi_1$，$d\beta=0$ 以及 $d\varepsilon=0$，其中 Ψ_1 为瞬时固定黄道上的日月岁差。再加上由于黄道运动引起的 α 的进一步变化 $-da/dt$，并根据(14)和(11)两式，我们就得到赤道坐标系中岁差变化的瞬时速率

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\quad\frac{d\lambda}{dt}-\frac{da}{dt}$$

$$=\left(\cos\varepsilon\frac{d\Psi_1}{dt}-\frac{da}{dt}\right)+\left(\sin\varepsilon\frac{d\Psi_1}{dt}\right)\sin\alpha\tan\delta$$

$$=m+n\sin\alpha\tan\delta, \qquad (149)$$

$$\frac{d\delta}{dt}=\frac{\partial\delta}{\partial\lambda}\quad\frac{d\lambda}{dt}$$

$$=\left(\sin\varepsilon\frac{d\Psi_1}{dt}\right)\cos\alpha$$

$$=n\cos\alpha,$$

这里的历元始终保持在任意给定的瞬间。

如果把赤道的日月运动理解为赤道以速率 n 绕二至线的某种旋转，那么由此我们也可以直接得出上面这两个表达式，这同从黄道的旋转来求得 λ 和 β 两者变化的途径是一样的。对有关的三角形进行微分就给出了直接由这种旋转而引起的坐标变化

$$d\alpha/dt=n\cos(\alpha-90°)\tan\delta=n\sin\alpha\tan\delta,$$

$$d\delta/dt=-n\sin(\alpha-90°)=+n\cos\alpha.$$

此外，随上述旋转而使春分点沿赤道的运动还引起了 α 的进一步变化，其速率为 $(d\Psi_1/dt)\cos\varepsilon$，这种变化连同独立的黄道运动造成的变化 $-da/dt$ 一起便构成了赤经总岁差 m。赤经总岁差使各个时圈绕运动着的天极向西转动，从而使赤经以速率 m 增加，在这一运动中赤纬保持不变，但是伴随而来的天极的运动既使时圈作进一步的运动，又使赤纬圈发生某种运动，前者引起另一项赤经变化，而后者则造成了赤纬的全部变化。

因此，**在赤道坐标系**内，赤纬的变化完全是由赤道的日月岁差和章动所造成的；赤经的变化则取决于赤道和黄道两者的运动，它是赤经总岁差和赤经章动合成的结果。在**黄道坐标系**内，黄纬的变化完全是由黄道的长期运动引起的；黄经的变化则与黄道和赤道两者的运动都有关，它是黄经总岁差和黄经章动的合成结果。

即使经历一段非常长的时间间隔，黄纬的变化还是比较微小的，而黄经的变化则几乎与时间成正比，两颗恒星的黄经之差几乎保持不变。因此，通过某种十分简单的近似计算便足以对归算

工作给出很精确的结果，在两个历元时刻的坐标值之间存在着某种简单的关系，这与赤道坐标系中复杂的坐标变化恰好相反，为了确定经过长时间之后的赤道坐标变化，我们必须进行冗长的三角计算。

下表给出普托勒米星表和弗拉姆斯蒂德星表中牛郎星的位置，其中既列出了它的赤道坐标，也给出了牛郎星与角宿一之间的黄经差与黄纬差：

历元	黄经差	黄纬差	赤 经	赤 纬
公元 138	97°10′	29°10′	274°52′	5°43′
公元 1690	97°52′	29°19′	293°54′	8°05′

赤道坐标的差异是很大的，它与恒星的位置有关，而且两者之间的关系又很复杂，正因为如此，不论对哪一颗恒星来说，要是不经过三角计算，就不可能从两个历元时刻的赤经、赤纬来认证出同一颗恒星，但是，尽管普托勒米星表有相当大的误差，根据黄道坐标，特别是根据相对于另外某一颗恒星的坐标差来做到这一点却不会有任何困难。

黄道坐标的岁差归算

对于任意特定日期 t_1 的平春分点和平黄道的坐标(λ_1, β_1)，不论是日心坐标或是地心坐标，都可以按以下的关系式严格地归算到任何另外一个日期 t_2 的平春分点和平黄道，其中 t_1 和 t_2 是从某个基本历元 t_0 起算的：

$$\cos\beta_2\cos(\lambda_2-\Lambda_2)=\cos\beta_1\cos(\lambda_1-\Pi_1),$$

$$\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\Lambda_2)=\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\Pi_1)\cos\pi_1+\sin\beta_1\times\sin\pi_1, \tag{150}$$

$$\sin\beta_2=\sin\beta_1\cos\pi_1-\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\Pi_1)\times\sin\pi_1,$$

式中

$$\Lambda_2=\Pi_1+\Upsilon+\frac{1}{2}p_1q_1(t_2-t_1)^2,$$

这里π_1、Π_1表示t_2黄道对t_1黄道的倾角和交点，可以从(137)和(138)两式求得，Π_1从t_1平春分点Υ^1起算，而Υ为t_1到t_2期间的黄经总岁差量，由(145)式，保留到三阶项有

$$\Upsilon=(\Upsilon''-\Upsilon')+\frac{1}{2}(\Pi_1''-\Pi_1')\pi_1''\pi_1'-\frac{1}{12}(\Pi_1''-\Pi_1')^3$$

$$+p_1q_1t_1(t_2-t_1),$$

其中Υ'、π_1'、Π_1'为t_1时的量，Υ''、π_1''、Π_1''为t^2时的量，而它们又都以基本历元t_0为起算点。

关系式(150)可以从三角形SZ_1Z_2(图48)得出，也可以通过把黄道直角坐标系作三次连续旋转而求得：第一次绕Z_1轴向东转Π_1角；第二次绕两个黄道位置的交线转π_1角；第三次绕Z_2轴向西转Λ_2角。如果把上述关系式改写成以下形式就可以用来进行数值计算，

$$\cos\beta_2\cos(\lambda_2-\Lambda_2)=\cos\beta_1\cos(\lambda_1-\Pi_1),$$

$$\cos\beta_2\sin(\lambda_2-\Lambda_2)=\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\Pi_1)+\sin\pi_1\Big[\sin\beta_1$$

$$-\cos\beta_1\sin(\lambda_1-\Pi_1)\tan\frac{1}{2}\pi_1\Big],$$

$$\sin\beta_2=-\sin\beta_1+2\cos^2\frac{1}{2}\pi_1\Big[\sin\beta_1-\cos\beta_1\sin\times(\lambda_1$$

$$-\Pi_1)\tan\frac{1}{2}\pi_1\Big].$$

把第一式乘$\cos(\lambda_1-\Pi_1)$，第二式乘$\sin(\lambda_1-\Pi_1)$，然后相加，同时为简化起见设

$$\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1-(\Lambda_2-\Pi_1),$$

$$q=\sin\pi_1\Big[\tan\beta_1-\sin(\lambda_1-\Pi_1)\tan\frac{1}{2}\pi_1\Big],$$

就给出

$$\cos\beta_2\cos\Delta\lambda=\cos\beta_1[1+q\sin(\lambda_1-\Pi_1)];$$

而把第一式乘 $-\sin(\lambda_1-\Pi_1)$，第二式乘 $\cos(\lambda_1-\Pi_1)$，再相加便得出

$$\cos\beta_2\sin\Delta\lambda=q\cos\beta_1\cos(\lambda_1-\Pi_1) .$$

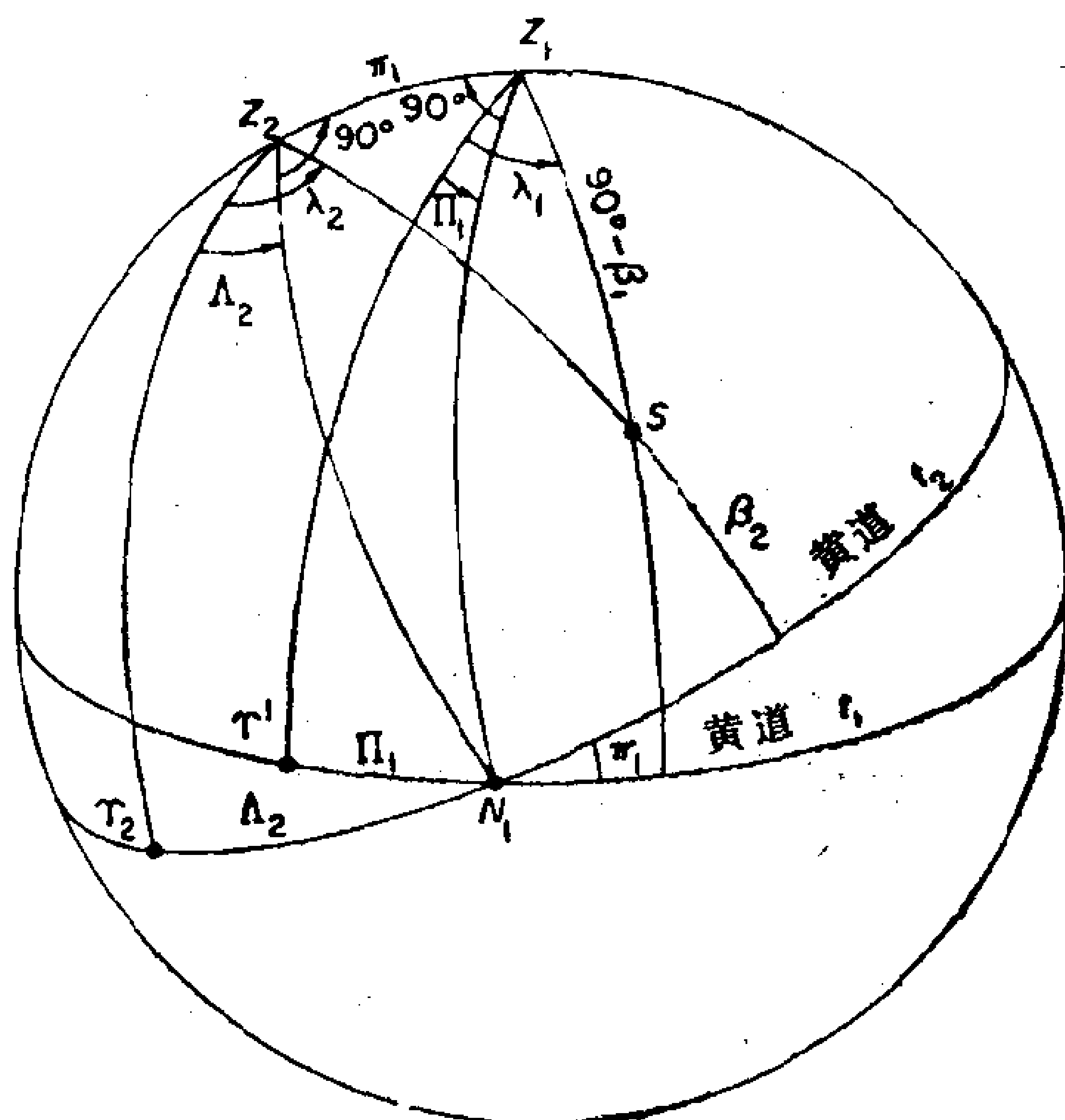


图 48　黄经和黄纬的岁差变化

从最后这两个方程我们立即得出确定 λ_2 的公式

$$\tan\Delta\lambda=\frac{q\cos(\lambda_1-\Pi_1)}{1+q\sin(\lambda_1-\Pi_1)}, \tag{151}$$

$$\lambda_2=\lambda_1+\Upsilon+\Delta\lambda+\frac{1}{2}p_1q_1(t_2-t_1)^2,$$

而为确定 β_2，把其中的第一式乘以 $\cos\frac{1}{2}\Delta\lambda$，第二式乘以 $\sin\frac{1}{2}\Delta\lambda$，两者相加就有

$$2\sin\frac{1}{2}(\beta_2+\beta_1)\sin\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)=$$

$$-q\cos\beta_1\frac{\sin\left(\lambda_1-\Pi_1+\frac{1}{2}\Delta\lambda\right)}{\cos\frac{1}{2}\Delta\lambda},$$

再写出如下形式的有关 $\sin\beta_2$ 的方程

$$2\sin\frac{1}{2}(\beta_2+\beta_1)\cos\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)=q\cos\beta_1\cot\frac{1}{2}\pi_1,$$

两式相除就有

$$\tan\frac{1}{2}(\beta_2-\beta_1)=-\frac{\sin\left(\lambda_1-\Pi_1+\frac{1}{2}\Delta\lambda\right)}{\cos\frac{1}{2}\Delta\lambda}\times\tan\frac{1}{2}\pi_1, \quad (152)$$

或者在保证有足够精度前提下有

$$\beta_2=\beta_1-\pi_1\sin\left(\lambda_1-\Pi_1+\frac{1}{2}\Delta\lambda\right)\sec\frac{1}{2}\Delta\lambda.$$

在实际计算中，仅仅当时间间隔 t_2-t_1 非常长的时候，才需要有这么高精度的表达式，在一般情况下，比这简单得多的近似表达式就已足够了。对于短时间间隔来说，可以采用这一间隔的长度与间隔中点处 $d\lambda/dt$ 和 $d\beta/dt$ 两个值的乘积。以下是一种适于编表使归算的计算工作得以简化的公式：

$$\Delta\lambda=a-b\cos(\lambda_1+c)\tan\beta_1,$$
$$\Delta\beta=b\sin(\lambda_1+c),$$

式中系数 a、b、c 是

$$a=\overline{p}(t_2-t_1),$$
$$b=\overline{\kappa}(t_2-t_1),$$
$$c=\overline{N}+\frac{1}{2}a,$$

其中$\overline{p}$、$\overline{\kappa}$、$\overline{N}$表示在t_1到t_2的中点处的$d\Psi/dt$、κ和$N=180°-\Pi$的数值。

这些表达式实质上相当于泰勒级数

$$\lambda(t_2)=\lambda(t_1)+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)_1\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)_1(\Delta t)^2+\cdots\cdots$$

的一阶项和二阶项，对β也是类似的。如果采用间隔Δt的起点时的p、κ和N值，那么所表示的就仅仅只是一阶项了。

黄道坐标的章动归算

由于章动完全是由赤道的运动造成的，因而它仅仅通过对于春分点位置的影响而使黄道坐标发生改变，这就是说黄纬是不变的，而对于瞬时真春分点的黄经是

$$\lambda=\lambda_0+\Delta\Psi,$$

其中λ_0是相对于瞬时平春分点的黄经，而$\Delta\Psi$为黄经章动。

黄道直角坐标的岁差变化

设有一个直角坐标系，其xy平面为t_1历元的黄道面，z轴指向北黄极，而x轴指向春分点，则任意一个天体在该坐标系内的坐标x_1、y_1、z_1可以通过解析几何中的常用公式换算为对于另一个任意时刻t_2的黄道和春分点的坐标x_2、y_2、z_2，这些公式是：

$$x_2=\cos(x_2,x_1)x_1+\cos(x_2,y_1)y_1+\cos(x_2,z_1)z_1,$$
$$y_2=\cos(y_2,x_1)x_1+\cos(y_2,y_1)y_1+\cos(y_2,z_1)z_1,$$
$$z_2=\cos(z_2,x_1)x_1+\cos(z_2,y_1)y_1+\cos(z_2,z_1)z_1,$$

如果仅仅考虑黄道的长期运动和总岁差，那么我们在一些有关的球面三角形（图 49）中利用余弦定律，并略去岁差中的$\frac{1}{2}p_1q_1t^2$项后就有

$$\cos(x_2,x_1)=\cos\Pi_1\cos(\Pi_1+\gamma)+\sin\Pi_1\sin(\Pi_1+\gamma)\cos\pi_1,$$
$$\cos(x_2,y_1)=\sin\Pi_1\cos(\Pi_1+\gamma)-\cos\Pi_1\sin(\Pi_1+\gamma)\cos\pi_1,$$

$$\cos(x_2,\ z_1) = -\sin(\Pi_1+\Upsilon)\sin\pi_1;$$
$$\cos(y_2,\ x_1) = \cos\Pi_1\sin(\Pi_1+\Upsilon) - \sin\Pi_1\cos(\Pi_1+\Upsilon)\cos\pi_1,$$
$$\cos(y_2,\ y_1) = \sin\Pi_1\sin(\Pi_1+\Upsilon) + \cos\Pi_1\cos(\Pi_1+\Upsilon)\cos\pi_1,$$
$$\cos(y_2,\ z_1) = \cos(\Pi_1+\Upsilon)\sin\pi_1;$$
$$\cos(z_2,\ x_1) = \sin\Pi_1\sin\pi_1,$$
$$\cos(z_2,\ y_1) = -\cos\Pi_1\sin\pi_1,$$
$$\cos(z_2,\ z_1) = \cos\pi_1;$$

由此，令 $\cos\pi_1 = 1-2\sin^2\frac{1}{2}\pi_1$，并对 $\cos\Upsilon$ 也用类似的关系，就得到

$$x_2 = x_1 - 2\left[\sin^2\frac{1}{2}\Upsilon + \sin\Pi_1\sin(\Pi_1+\Upsilon)\sin^2\frac{1}{2}\pi_1\right]x_1 + \left[2\cos\Pi_1\sin(\Pi_1+\Upsilon)\sin^2\frac{1}{2}\pi_1 - \sin\Upsilon\right]y_1 - [\sin(\Pi_1+\Upsilon)\sin\pi_1]z_1,$$

$$y_2 = y_1 + \left[2\sin\Pi_1\cos(\Pi_1+\Upsilon)\sin^2\frac{1}{2}\pi_1 + \sin\Upsilon\right]x_1 - 2\left[\sin^2\frac{1}{2}\Upsilon + \cos\Pi_1\cos(\Pi_1+\Upsilon)\sin^2\frac{1}{2}\pi_1\right]y_1 + [\cos(\Pi_1+\Upsilon)\sin\pi_1]z_1,$$

$$z_2 = z_1 + (\sin\Pi_1\sin\pi_1)x_1 - (\cos\Pi_1\sin\pi_1)y_1 - \left(2\sin^2\frac{1}{2}\pi_1\right)z_1,$$

式中 Υ 为从 t_1 到 t_2 之间的总岁差，Π_1 和 π_1 是 t_2 黄道对 t_1 黄道的交点和倾角。

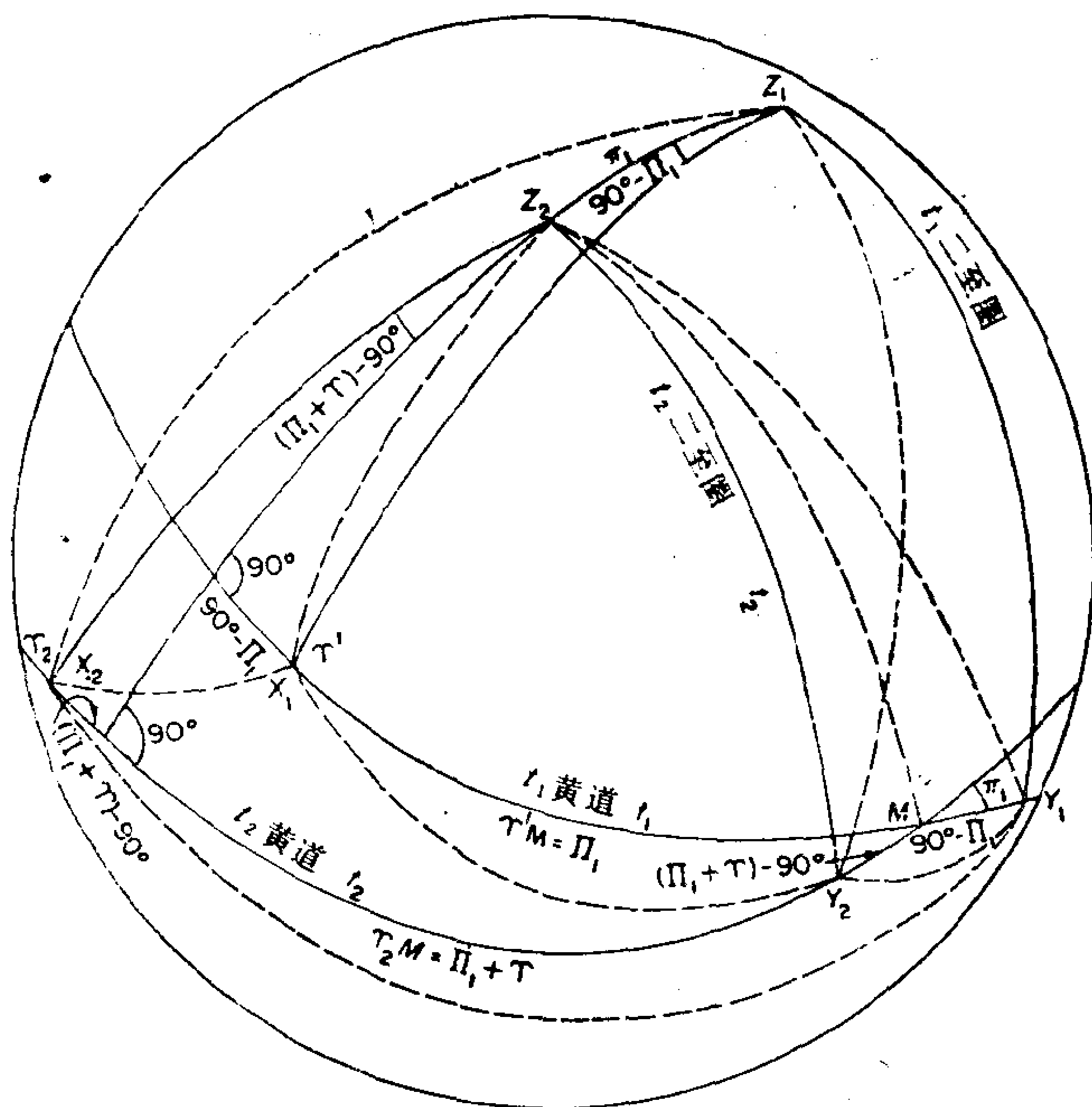


图 49 黄道直角坐标的变化

因为

$$x_1=\cos(x_1,x_2)x_2+\cos(x_1,y_2)y_2+\cos(x_1,z_2)z_2,$$

$$y_1=\cos(y_1,x_2)x_2+\cos(y_1,y_2)y_2+\cos(y_1,z_2)z_2,$$

$$z_1=\cos(z_1,x_2)x_2+\cos(z_1,y_2)y_2+\cos(z_1,z_2)z_2,$$

所以我们可以用同样的系数来实现逆转换。它的系数矩阵是前一个转换的系数矩阵的共轭阵（即行列互换），而之所以如此是因为实际上从 t_2 到 t_1 的总岁差为 $-\Upsilon$，而 t_1 黄道对 t_2 黄道的交点（从 Υ_2 起算）是 $180°+(\Pi_1+\Upsilon)$，由此，以 $\cos(x_2,\ y_1)$ 为例来说，用 $-\Upsilon$ 代替其中的 Υ_1 以 $180°+(\Pi_1+\Upsilon)$ 代替 Π_1，我们就得到

$$\cos\Pi_1\sin(\Pi_1+\Upsilon)-\sin\Pi_1\cos(\Pi_1+\Upsilon)\cos\pi_1=\cos(y_2,x_1),$$

其余可依此类推。

空间平面相对于黄道面的各个要素的岁差变化

设某一空间平面与任意特定时刻 t 的黄道面的交角为 i，而从平春分点起算的该平面的升交点黄经为Ω，则由于黄道和春分点的岁差运动，i 和Ω将随历元 t 的改变而改变。

考虑这样一个球面三角形，它的一条边是某一平面P与天球的交线，而另外两条边则是两个不同时刻 t_1、t_2 的黄道面与天球的交线(图50)。由纳比尔法则，并略去总岁差中的$\frac{1}{2}p_1q_1t^2$项，我们有

$$\tan\frac{1}{2}[\Omega-(\Pi_1+\Upsilon)-\Delta\omega]$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(i_1+\pi_1)}{\cos\frac{1}{2}(i_1-\pi_1)}\tan\frac{1}{2}(\Omega_1-\Pi_1),$$

$$\tan\frac{1}{2}[\Omega-(\Pi_1+\Upsilon)+\Delta\omega]$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(i_1+\pi_1)}{\sin\frac{1}{2}(i_1-\pi_1)}\tan\frac{1}{2}(\Omega_1-\Pi_1),$$

$$\tan\frac{1}{2}(i-i_1)=-\tan\frac{1}{2}\pi_1$$

$$\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\Omega_1+\Omega-2\Pi_1-\Upsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\Omega_1-\Omega+\Upsilon)},$$

式中π_1、Π_1是t_2黄道对t_1黄道的倾角和交点，Π_1从t_1平春分点起算；Υ是t_1到t_2期间的黄经总岁差量；i_1、Ω_1是P对t_1

黄道的倾角和交点；而 i 、Ω 是 P 对 t_2 黄道的倾角和交点，其中每个交点都从相应的瞬时平春分点起算，$\Delta\omega$ 是由两个黄道所截得的在 P 上的弧段。

也可以利用高斯方程：

$$\cos\frac{1}{2}i\cos\frac{1}{2}[\Omega-(\Pi_1+\gamma)-\Delta\omega]$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\Omega_1-\Pi_1)\cos\frac{1}{2}(i_1-\pi_1),$$

$$\sin\frac{1}{2}i\cos\frac{1}{2}[\Omega-(\Pi_1+\gamma)+\Delta\omega]$$

$$=\cos\frac{1}{2}(\Omega_1-\Pi_1)\sin\frac{1}{2}(i_1-\pi_1),$$

$$\cos\frac{1}{2}i\sin\frac{1}{2}[\Omega-(\Pi_1+\gamma)-\Delta\omega]$$

$$=\sin\frac{1}{2}(\Omega_1-\Pi_1)\cos\frac{1}{2}(i_1+\pi_1),$$

$$\sin\frac{1}{2}i\sin\frac{1}{2}[\Omega-(\Pi_1+\gamma)+\Delta\omega]$$

$$=\sin\frac{1}{2}(\Omega_1-\Pi_1)\sin\frac{1}{2}(i_1+\pi_1).$$

这些严格的公式是很少用到的。我们可以从这些公式出发，根据级数展开式，或者利用别的一些近似计算方法，来求得一些能满足任何精度要求的近似公式。

在天球与平面 P 的交线以及天球与黄道面两个位置的两条交线所构成的这个球面三角形中，

$$\frac{\sin\Delta\omega}{\sin\pi_1}=\frac{\sin(\Omega-\Pi_1)}{\sin i},$$

$$\sin\pi_1\cos(\Omega_1-\Pi_1)=\sin i_1\cos i-\cos i_1\sin i\cos\Delta\omega$$

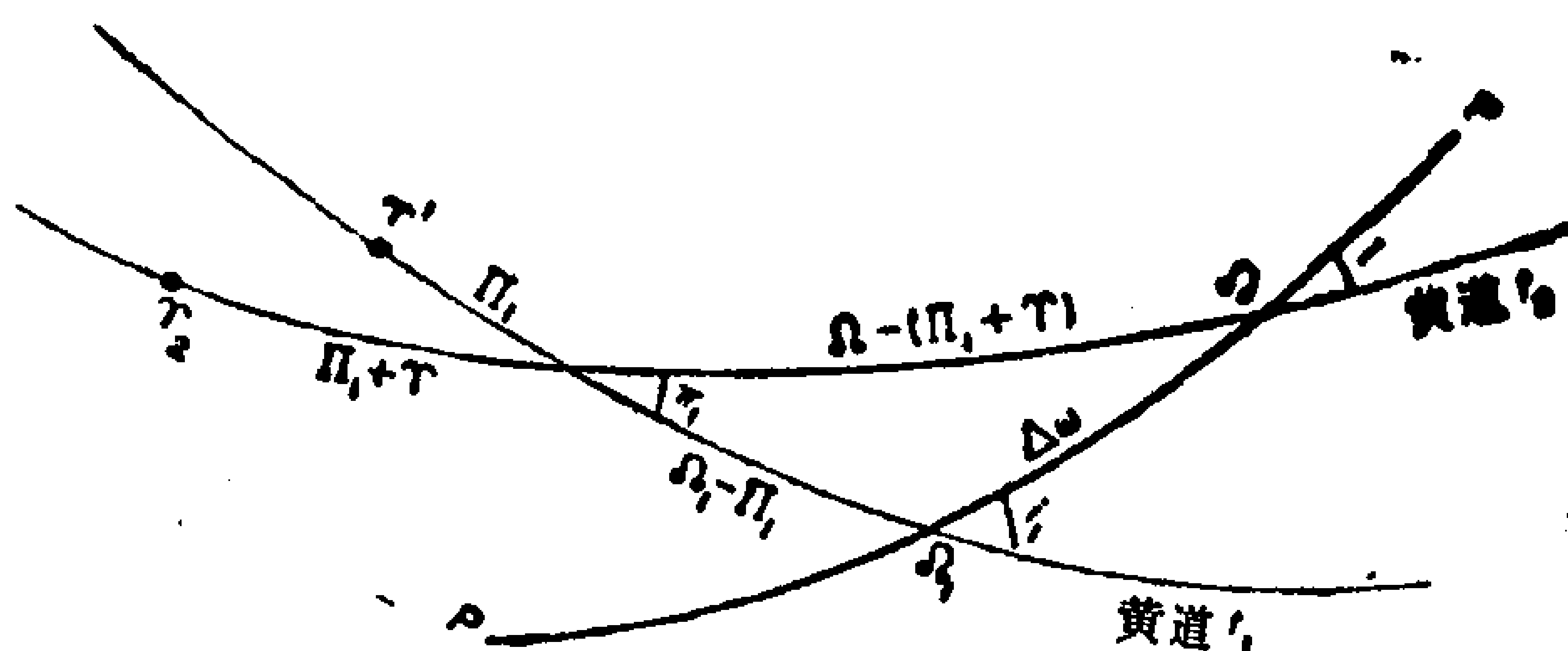


图 50　空间平面的黄道要素的变化

$$=\sin(i_1-i)+2\sin i\cos i_1\sin^2\frac{1}{2}\Delta\omega,$$

$$\begin{aligned}\sin\Delta\omega\cos i=&\sin[\Omega-(\Pi_1+\Upsilon)]\cos(\Omega_1-\Pi_1)\\&-\cos[\Omega-(\Pi_1+\Upsilon)]\sin(\Omega_1-\Pi_1)\cos\pi_1\\=&\sin(\Omega-\Omega_1-\Upsilon)\\&+2\cos[\Omega-(\Pi_1+\Upsilon)]\sin(\Omega_1\\&-\Pi_1)\sin^2\frac{1}{2}\pi_1,\end{aligned}$$

以第一个方程代入第三式，有

$$\begin{aligned}\sin[\Omega-(\Omega_1+\Upsilon)]=&\sin\pi_1\sin(\Omega_1-\Pi_1)\cot i\\&-2\cos[\Omega-(\Pi_1+\Upsilon)]\sin(\Omega_1\\&-\Pi_1)\sin^2\frac{1}{2}\pi_1\ .\end{aligned}$$

黄道的运动是极其微小的，因而在很长的时间间隔内把这些方程写为以下的近似形式仍然可以保持很高的精度：

$$\Delta\omega=\frac{\sin(\Omega_1-\Pi_1)}{\sin i}\pi_1,$$

$$i=i_1-\pi_1\cos(\Omega_1-\Pi_1)+\left(\frac{1}{2}\Delta\omega\right)^2\sin 1''\sin 2i_1\ ,$$

$$\Omega=\Omega_1+\Upsilon+\pi_1\sin(\Omega_1-\Pi_1)\cot i$$

$$-\left(\frac{1}{2}\pi_1\right)^2\sin 1''\sin 2(\Omega_1-\Pi_1),$$

从上面这些公式便可以依次计算出$\Delta\omega$、i和Ω。

通常情况下，关于i和Ω表达式中的二阶项是可以忽略的。这时，上述方程式实际上就变得相当于从各要素关系的微分所求得的公式了。在任意瞬间t，黄道以速率$\kappa=d\pi_1/dt$旋转，旋转轴离开瞬时平春分点的黄经为$\Pi_\kappa=180°-N$；而平春分点则沿着黄道朝西运动，运动速度为$p=d\Upsilon/dt$。对上述三角形取微分(图51)，我们发现在间隔dt内有

$$di=-\cos(\Omega-\Pi_\kappa)d\pi_1,$$

$$d\Omega=d\Upsilon+\sin(\Omega-\Pi_\kappa)\cot i\,d\pi_1,$$

$$d\omega=\sin(\Omega-\Pi_\kappa)\operatorname{cosec} i\,d\pi_1,$$

式中$d\pi_1=\kappa\,dt$。对于从t_1到t_2的这段时间间隔，应用积分计算的中值定理有

$$i=i_1-[\kappa\cos(\Omega-\Pi_\kappa)]_{t=t'}(t_2-t_1),\qquad t_1<t'<t_2$$

至于Ω和$\Delta\omega$的情况也是类似的，取$t'=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$，也即是t_1和t_2的平均值，这时，所引起的误差仅仅是二阶和高阶项。因此，在实际计算中，通常所采用的方程是

$$i=i_1-\kappa\cos(\Omega-\Pi_\kappa)\cdot(t_2-t_1),$$

$$\Omega=\Omega_1+[p+\kappa\sin(\Omega-\Pi_\kappa)\cot i](t_2-t_1),$$

$$\Delta\omega=\kappa\sin(\Omega-\Pi_\kappa)\operatorname{cosec} i\cdot(t_2-t_1),$$

式中Ω、i、κ、Π_κ、p应该用它们在$\frac{1}{2}(t_1+t_2)$时的数值。如果这一平均时刻的Ω和i值为未知，那么或者可以用它们的估值(例如，对交点来说，可以对Ω_1加上t_1到t_2时间间隔内黄经岁差值的一半)，或者可以用它们的初值，然后为了保证所要求的精度，必要的话就用由此得到的一次近似值来推得所求量的第二次近似值。

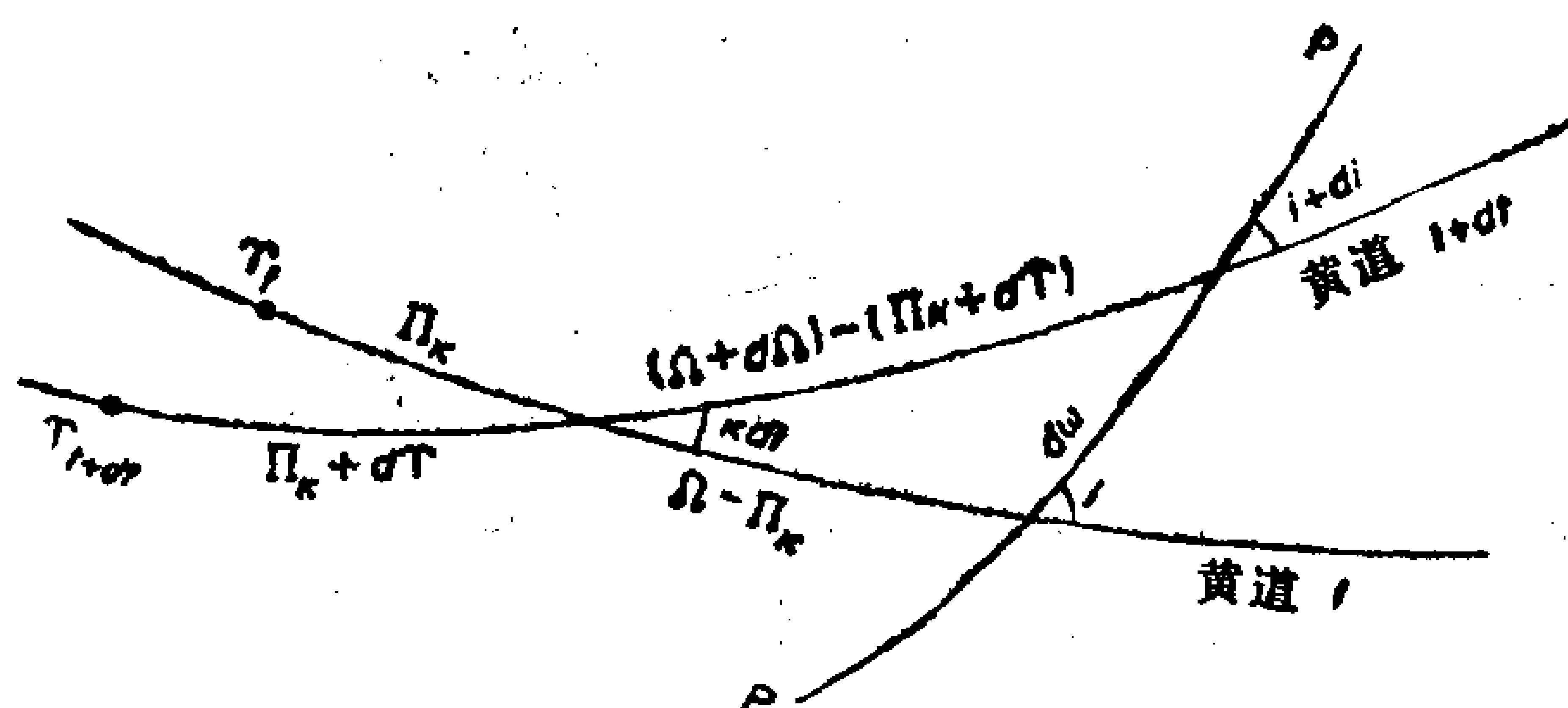


图 51　空间平面的黄道要素的近似变化

赤道坐标的岁差归算

设天体S对于t_0时平春分点和平赤道的赤道坐标为α_0、δ_0，而对于t时平春分点和平赤道的坐标值为α、δ，则由三角形SP_0P（图52）可得把α_0、δ_0归算到α、δ的严格公式

$$\cos\delta\sin A' = \cos\delta_0\sin A,$$

$$\cos\delta\cos A' = \cos J\cos\delta_0\cos A - \sin J\sin\delta_0,$$

$$\sin\delta = \sin J\cos\delta_0\cos A + \cos J\sin\delta_0,$$

式中$A=\alpha_0+\zeta_0$，$A'=\alpha-z$，而J表示t平赤道对t_0平赤道的倾角。归算常数ζ_0、z、J要求用相对于历元t_0的t时刻的数

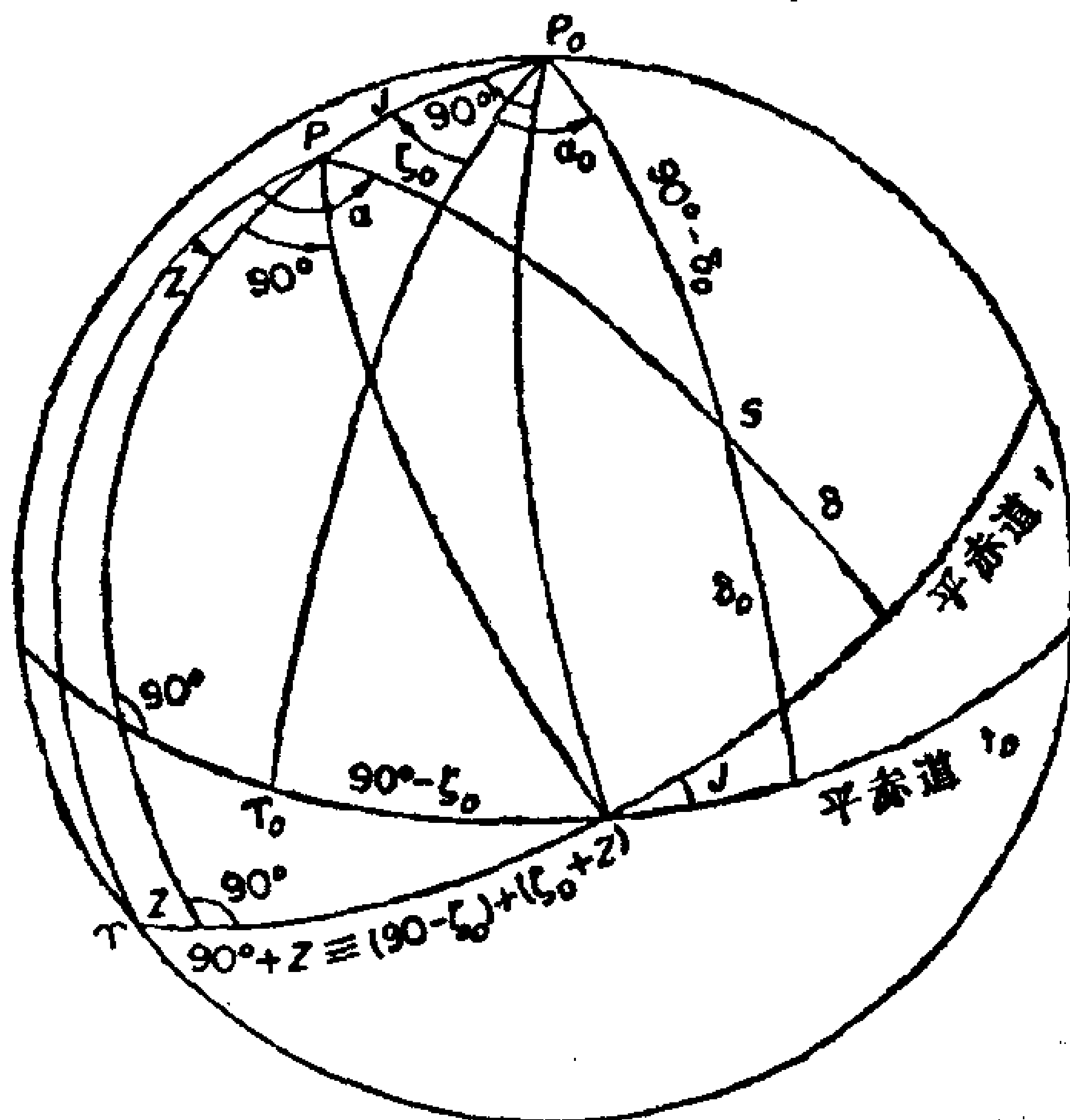


图 52　赤道坐标的岁差变化

值，如果 t_0 不是基本历元，那么这些数值必须从以间隔 $t-t_0$ 的各次幂表示的通用表达式来加以求得，这时的 t_0 和 t_1 是从基本历元起算的。

显然，这些式子可以直接从有关黄道坐标归算的严格公式求得，其中只需以(α、δ)代替(λ、β)，以及

用 $90°+z$ 代替 Λ_2，

用 $\mu=\zeta_0+z$ 代替 Υ，

用 J 代替 π_1，

用 $90°-\zeta_0$ 代替 Π_1，

(151)和(152)式是为了适于实际数值运算由严格公式推导而来的，对这两个方程作上述同样的替换就有

$$q=\sin J\left[\tan\delta_0+\cos(\alpha_0+\zeta_0)\tan\frac{1}{2}J\right],$$

$$\tan[(\alpha-\alpha_0)-\mu]=\frac{q\sin(\alpha_0+\zeta_0)}{1-q\cos(\alpha_0+\zeta_0)},\qquad(153)$$

$$\mu=\zeta_0+z,$$

$$\tan\frac{1}{2}(\delta-\delta_0)$$

$$=\frac{\tan\frac{1}{2}J\cos\left\{(\alpha_0+\zeta_0)+\frac{1}{2}[(\alpha-\alpha_0)-\mu]\right\}}{\cos\frac{1}{2}[(\alpha-\alpha_0)-\mu]}.$$

仅仅对于在天极附近的恒星，而且当它们的位置变化与其极距相比占有相当比重时才需要这些严格的公式；出现这种情况又有两种原因，一种是时间间隔 $t-t_0$ 特别长，另一种是赤纬非常之大。

但是，即使用了严格公式，对于遥远的日期来说所能确定的也仅仅是近似坐标，这是因为归算常数 ζ_0、J、z 的数值只能根据时间的幂级数来求得，因而当与历元相隔的时间(历元前或后)

达到几个世纪以上时就不能可靠地给出高精度的结果。

对于历元之前的时间来说，瞬时赤道对历元赤道的倾角 J 取负值，从几何上来说，这时降交点的赤经为 $90^\circ-\zeta_0$，而天极的赤经为 $180^\circ-\zeta_0$，但是在代数符号上作了这样的规定之后就无需从几何上来考虑问题了，因为 ζ_0 和 z 也是负数。不过，如果愿意的话，只要以 $-z$ 代替 ζ_0，以 $-\zeta_0$ 代 z，以 $-J$ 代 J，这样就可以使起始时间与终端时间互易其位。

严格表达式可以展开为级数，或者直接展开，或者利用马克劳林定理，而从这些展开式就可以导出一些在形式和精度上能满足任何具体问题要求的近似公式。如果取到二阶项，上述第二个方程的左端便是 $(\alpha-\alpha_0)-\mu$；把右端按 q 的幂展开，再把 q 按 J 的幂展开，这样就得到(保留到二阶项)

$$\alpha=\alpha_0+(z+\zeta_0)+J\sin(\alpha_0+\zeta_0)\tan\delta_0$$

$$+\frac{1}{4}J^2\sin2(\alpha_0+\zeta_0)+\frac{1}{2}J^2\sin2(\alpha_0+\zeta_0)\tan^2\delta_0,$$

$$\delta=\delta_0+J\cos(\alpha_0+\zeta_0)-\frac{1}{2}J^2\sin^2(\alpha_0+\zeta_0)\tan\delta_0\ .$$

这些公式可以用历元平黄赤交角 ε^0 以及 t_0 固定黄道上黄经日月岁差 Ψ_1 和交角章动 $\Delta\varepsilon^0$ 的各次幂和交叉乘积来加以表示。由(125)式的第二、第三式可以得到以下的展开式

$$J\cos\zeta_0=\Psi_1\sin\varepsilon^0+\Psi_1\Delta\varepsilon^0\cos\varepsilon^0$$

$$-\frac{1}{6}\Psi_1^3\sin\varepsilon^0-\frac{1}{2}\Psi_1(\Delta\varepsilon^0)^2\sin\varepsilon^0$$

$$+\frac{1}{6}J^2\Psi_1\sin\varepsilon^0,$$

$$J\sin\zeta_0=-\Delta\varepsilon^0+\frac{1}{2}\Psi_1^2\sin\varepsilon^0\cos\varepsilon^0$$

$$+\frac{1}{6}(\Delta\varepsilon^0)^3+\frac{1}{2}\Psi_1^2\Delta\varepsilon^0\cos^2\varepsilon^0$$

$$-\frac{1}{6}J^2\Delta\varepsilon^0,$$

把这两个展开式以及有关μ的展开式(127)代入前面的公式，取到一阶项就有

$$\alpha=\alpha_0-a+\Psi_1\cos\varepsilon^0+\Psi_1\sin\varepsilon^0\sin\alpha_0\tan\delta_0$$
$$-\Delta\varepsilon^0\cos\alpha_0\tan\delta_0,$$
$$\delta=\delta_0+\Psi_1\sin\varepsilon^0\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon^0\sin\alpha_0 .$$

在没有必要用严格表达式时，可以按马克劳林定理把坐标展开为时间的幂级数，从而求得适合于实际计算的近似公式。对α有

$$\alpha(t)=\alpha(0)+\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 t+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)_0 t^2+\cdots\cdots,$$

对δ也是类似的。我们已经导出了赤经、赤纬的岁差变化率，即(149)式：

$$\frac{d\alpha}{dt}=m+n\sin\alpha\tan\delta,$$

$$\frac{d\delta}{dt}=n\cos\alpha,$$

对这两个式子进行微分，便可以求得级数的高阶项。二阶导数为

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=n^2\sin 2\alpha\left(\frac{1}{2}+\tan^2\delta\right)$$

$$+mn\tan\delta\cos\alpha+\frac{dm}{dt}+\frac{dn}{dt}\tan\delta\sin\alpha,$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}=-n^2\sin^2\alpha\tan\delta-mn\sin\alpha+\frac{dn}{dt}\cos\alpha,$$

它们代表了α和δ的长期变化。但是，比这更高阶的各阶导数表达式很快就变得越来越复杂，以致无法付之实际应用，因而实际计算中采用的是各种近似公式，具体情况视归算范围所涉及的时间间隔而定。

马克劳林级数中各阶导数的表达式，或者α、δ按z、ζ_0、J展开的展开式，又都可以展开为时间的幂级数，只要把有关m、n、J等各个量的时间幂级数代进去就可以做到这一点，而根据这一点，α和δ完全可以用带有数值系数的时间幂级数来加以表示。这种表示方法的主要价值是适合于编表，从而使大量计算工作得以简化，但是，由于在目前已经可以利用高速度的计算机，因而在这一问题上的表格计算方法实际上已经弃而不用了。

归算常数ζ_0、z和J表示了瞬时平赤道和历元平赤道的相对位置，它也确定了瞬时平极和历元平极彼此间的相对位置。如果t_2从某个历元t_1起算，那么t_2时的瞬时平天极相对于t_1历元的平春分点和平赤道的坐标值为

$$\alpha_2 = 360° - \zeta_0, \qquad \delta_2 = 90° - J,$$

而历元平极对于瞬时平春分点和平赤道的坐标值为

$$\alpha_1 = 180° + z, \qquad \delta_1 = 90° - J,$$

其中ζ_0、z和J为对于历元t_1而言的t_2时的值。如果归算常数用天极坐标来表示，在两个平赤道和t_1黄道所构成的三角形中，我们就有

$$\sin\delta_2 = \cos\varepsilon^0\cos\Theta_1 + \sin\varepsilon^0\sin\Theta_1\cos\Psi_1,$$

$$\cos\delta_2\sin\alpha_2 = \cos\varepsilon^0\sin\Theta_1\cos\Psi_1 - \sin\varepsilon^0\cos\Theta_1,$$

$$\cos\delta_2\cos\alpha_2 = \sin\Theta_1\sin\Psi_1;$$

$$\sin\delta_1 = \cos\varepsilon^0\cos\Theta_1 + \sin\varepsilon^0\sin\Theta_1\cos\Psi_1,$$

$$\cos\delta_1\sin(\alpha_1 + a) = \sin\varepsilon^0\cos\Theta_1\cos\Psi_1 - \cos\varepsilon^0\sin\Theta_1,$$

$$\cos\delta_1\cos(\alpha_1 + a) = -\sin\varepsilon^0\sin\Psi_1,$$

其中ε^0表示t_1时的平黄赤交角，Θ_1是t_2赤道对t_1黄道的倾角，而Ψ_1和a分别为对于t_1历元的黄经日月岁差和行星岁差。

如果t_2在t_1之前，归算常数就是负的。从代数学上来看，

这时瞬时天极的赤纬 $\delta_2=(90°-J)>90°$，而赤经 $\alpha_2=360°-\zeta_0$，这在几何上就应当解释成赤纬 $(180°-\delta_2)<90°$，以及赤经为 $\alpha_2\pm180°$，至于历元天极对于瞬时天极的相对位置的情况也是同样的。

拱极星的直角坐标

对于拱极星来说，只要先把它们的坐标化为直角坐标，然后就可以很方便地进行岁差归算。赤道直角坐标由下列方向余弦给出

$$x=\cos\alpha\cos\delta,$$
$$y=\sin\alpha\cos\delta,$$
$$z=\sin\delta.$$

对 t 取微分并以（149）式代入后，就给出岁差的瞬时变化率为

$$\frac{dx}{dt}=-my-nz,$$

$$\frac{dy}{dt}=+mx,$$

$$\frac{dz}{dt}=+nx.$$

根据这些变化率对直角坐标进行归算之后，就可以把它们重新化为 α 和 δ。

赤道坐标的章动归算

设 α_0、δ_0 为对于瞬时平春分点和平赤道的赤经、赤纬，α、δ 为对于瞬时真春分点和真赤道的坐标，那么很显然，只要把岁差归算中的 J 代之以平极 P_0 至真极 P 的圆弧 g_0（图 53），把 ζ_0 代之以平二分圈与过两个天极的大圆间的交角 G_0，并且用真二分圈与过 P_0、P 的大圆在真天极处的交角 G' 代替 z，我们就可以求得从 α_0、δ_0 归算到 α、δ 的严格的三角表达式：

$$\cos\delta\sin(\alpha-G')=\cos\delta_0\sin(\alpha_0+G_0),$$

$$\cos\delta\cos(\alpha-G')=\cos g_0\cos\delta_0\cos(\alpha_0$$

$$+G_0)-\sin g_0\sin\delta_0,$$

$$\sin\delta=\sin g_0\cos\delta_0\cos(\alpha_0$$

$$+G_0)+\cos g_0\sin\delta_0,$$

其中 g_0、G_0、G' 可以根据章动 $\Delta\Psi$、$\Delta\varepsilon$ 和平黄交角 ε_0 求得，这或者是通过（146）式，或者是利用 P_0、P_1 和瞬时黄极 E 这三点所构成的三角形来求得，在该三角形中 $\varepsilon=\varepsilon_0+\Delta\varepsilon$。

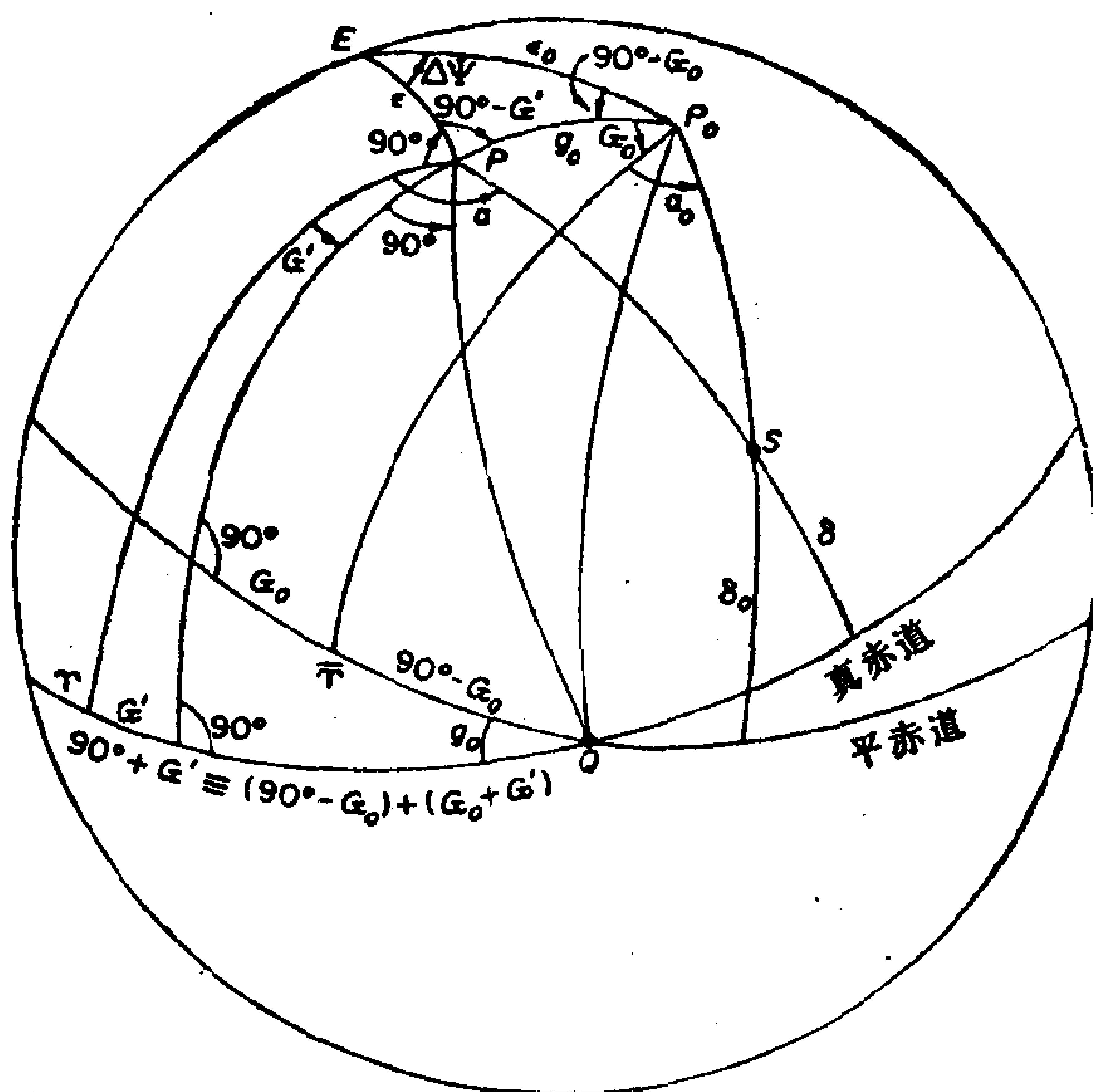


图 53　章动所引起的赤道坐标的变化

因为在三角形 EP_0P 中，角 $\Delta\Psi$ 永远小于20″，弧 P_0P 又始终不会超过 $\Delta\varepsilon$ 的极大值（10″ 左右），所以对于确定 g_0、G_0 和 G' 来说，并不需要严格的方程式。（147）式是用 $\Delta\Psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 的各次幂和交叉乘积来表示的、有关 $g_0\sin G_0$、$g_0\cos G_0$ 和 $G'+G_0$ 的展开式，从其中的一阶项确定 g_0、G_0 和 G' 的一阶近似值，并用这些近似值来代替形式为（153）式的岁差归算公式中的 J、ζ_0 和 z，由此就可以得到章动归算公式，而且这样得到的

公式对于所有的实际问题来说实质上是严格的。用 g_n、G_n 和 f_n 表示由一阶项所确定的 g_0、G_0 和 $G'+G_0$ 的近似值，我们有

$$g_n \sin G_n = -\Delta\varepsilon,$$
$$g_n \cos G_n = \Delta\Psi \sin \varepsilon_0,$$
$$f_n = \Delta\Psi \cos \varepsilon_0;$$

而章动归算公式就变为

$$A_n = \alpha_0 + G_n,$$
$$p_n = g_n \tan \delta_0,$$
$$\tan(A'_n - A_n) = \frac{p_n \sin A_n}{1 - p_n \cos A_n},$$
$$\alpha = \alpha_0 + (A'_n - A_n) + f_n,$$
$$\delta = \delta_0 + g_n \cos \frac{1}{2}(A'_n + A_n) \sec \frac{1}{2}(A'_n - A_n).$$

在通常情况下并不采用这种实际上严格的归算方法，只要按泰勒定理展开所得到的表达式就足够了。因为章动完全是由赤道运动引起的，对于瞬时真春分点和真赤道的赤经和赤纬是量 $\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ 和 $\Psi + \Delta\Psi$ 的函数，而这两个量则确定了赤道相对于瞬时黄道的位置，按泰勒定理

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\Psi + \Delta\Psi,\ \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon) \\ &= \alpha_0(\Psi,\ \varepsilon_0) + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\Psi}\right)_0 \Delta\Psi + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\right)_0 \Delta\varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\Psi^2}\right)_0 (\Delta\Psi)^2 + \left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\Psi\partial\varepsilon}\right)_0 \Delta\Psi\Delta\varepsilon \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varepsilon^2}\right) (\Delta\varepsilon)^2 + \cdots\cdots, \end{aligned}$$

对 δ 也是类似的，式中 $\alpha_0(\Psi,\ \varepsilon_0)$、$\delta_0(\Psi,\ \varepsilon_0)$ 为平赤经和平赤纬。因为 $\Delta\Psi$ 就是黄经的变化 $\Delta\lambda$，而 $\Delta\beta = 0$，我们从有关黄道和赤道两个坐标系之间的微分变化关系的公式有：

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\Psi}=\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}=\cos\varepsilon+\sin\varepsilon\sin\alpha\tan\delta,$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}=-\cos\alpha\tan\delta,$$

以及同样有

$$\frac{\partial\delta}{\partial\Psi}=\cos\alpha\sin\varepsilon,\quad \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}=\sin\alpha$$

从这些公式出发，通过进一步的微分就可以求得更高阶的各阶导数。

我们可以通过象前面岁差归算展开过程中所作的那种代换，同时进一步以 $\Delta\Psi$ 代替 Ψ_1，以 ε_0 代 ε^0，$\Delta\varepsilon$ 代 $\Delta\varepsilon^0$，并且令 $a=0$，从而求得严格方程的直接展开式；而从这种展开式也可以得到（在任何所要求的精度范围内）与上面那些式子等效的一些表达式。

取到一阶项有

$$\begin{aligned}\alpha-\alpha_0&=(\cos\varepsilon_0+\sin\varepsilon_0\sin\alpha_0\tan\delta_0)\Delta\Psi\\&\quad-\cos\alpha_0\tan\delta_0\Delta\varepsilon,\\ \delta-\delta_0&=\sin\varepsilon_0\cos\alpha_0\Delta\Psi+\sin\alpha_0\Delta\varepsilon,\end{aligned}\tag{154}$$

利用 g_n、G_n、f_n，上式变为

$$\begin{aligned}\alpha-\alpha_0&=f_n+g_n\sin(G_n+\alpha_0)\tan\delta_0,\\ \delta-\delta_0&=g_n\cos(G_n+\alpha_0).\end{aligned}\tag{155}$$

在这些表达式中令 $\delta_0=0°$，就得到二分差为 $\Delta\Psi\cos\varepsilon_0$；参见（147）式。

岁差和章动的贝塞尔归算

在实际计算中，为了求得对于任意特定日期的真春分点和真赤道的位置(α、δ)，通常的做法是先确定该日期所在的贝塞尔岁首平位置(α_0、δ_0)，然后再加上从岁首到该日期的岁差以及该日期的章动。如果时间段 τ 以年为单位，那么由（149）式可知岁差的一阶归算量为

$$\alpha-\alpha_0=\tau(m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0),$$
$$\delta-\delta_0=\tau n\cos\alpha_0, \tag{156}$$

而由（154）式得章动的一阶归算量为

$$\alpha-\alpha_0=(\cos\varepsilon_0+\sin\varepsilon_0\sin\alpha_0\tan\delta_0)\Delta\Psi$$
$$-\cos\alpha_0\tan\delta_0\Delta\varepsilon, \tag{157}$$
$$\delta-\delta_0=\sin\varepsilon_0\cos\alpha_0\Delta\Psi+\sin\alpha_0\Delta\varepsilon,$$

这两项归算可以合并在一起，并且用一种便于实际计算的形式来加以表示。用 ψ' 表示岁首固定黄道上日月岁差的年变化率，以 λ' 表示赤经行星岁差的年变化率，从（131）式对于 $\tau=0$，我们有

$$m=\psi'\cos\varepsilon_0-\lambda',\qquad n=\psi'\sin\varepsilon_0;$$

而（157）式可以写为

$$\alpha-\alpha_0=\left(\frac{m+\lambda'}{\psi'}+\frac{n}{\psi'}\sin\alpha_0\tan\delta_0\right)\Delta\Psi$$
$$-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0,$$
$$\delta-\delta_0=\Delta\Psi\frac{n}{\psi'}\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon\sin\alpha_0.$$

于是方程（156）和（157）之和就变为

$$\alpha-\alpha_0=n\left(\tau+\frac{\Delta\Psi}{\psi'}\right)\left(\frac{m}{n}+\sin\alpha_0\tan\delta_0\right)$$
$$+\lambda'\frac{\Delta\Psi}{\psi'}-\Delta\varepsilon\cos\alpha_0\tan\delta_0,$$
$$\delta-\delta_0=n\left(\tau+\frac{\Delta\Psi}{\psi'}\right)\cos\alpha_0+\Delta\varepsilon\sin\alpha_0;$$

再设

$$A=n\left(\tau+\frac{\Delta\Psi}{\psi'}\right)=n\tau+\Delta\Psi\sin\varepsilon_0,$$
$$B=-\Delta\varepsilon,$$

$$E=\lambda'\frac{\Delta\Psi}{\psi'},$$

$$a=\frac{m}{n}+\sin\alpha_0\tan\delta_0,$$

$$b=\cos\alpha_0\tan\delta_0,\qquad (158)$$

$$a'=+\cos\alpha_0,$$

$$b'=-\sin\alpha_0,$$

我们就有

$$\alpha-\alpha_0=Aa+Bb+E,$$

$$\delta-\delta_0=Aa'+Bb'.\qquad (159)$$

这种形式的归算方法首先为贝塞尔所提出，再加上形式类似的恒星光行差归算项（71）式，就成为在恒星视位置的实际计算中所采用的一种标准方法，但是，根据通用的记号和求得这些因子的方法又往往会采取不同的实际计算方法。因子a、b、a'、b'取决于恒星的位置，对任何一个特定的恒星来说，它们几乎是固定不变的，所以对每一颗恒星在一段连续的时间间隔内可以取用同样的数值，因此这些因子被称为**贝塞尔恒星常数**。因子A、B、E取决于参考圈的运动，称为**贝塞尔星数**或**日数**，在天文年历中以表格形式每天给出它们的数值。含τ的各项给出了岁差效应，而其它一些项则给出了黄经和交角章动效应。以前在许多刊物中，字母A和B总是用来表示光行差日数，而C、D和E则表示岁差和章动的日数。在天文年历中，现有的实际计算方法从1915年之后已变得标准化了，但在**1962年之前**所用的记号是

$$A=\tau+\frac{\Delta\Psi}{\psi'},$$

$$a=m+n\sin\alpha_0\tan\delta_0,$$

$$a'=n\cos\alpha_0.$$

由（158）式所定义的A和B按下式计算g和G，

$$g\sin G = B,$$
$$g\cos G = A,$$

这样一来从岁首到瞬时的岁差就同章动一道包括在g、G之内，而如果令

$$f = \frac{m}{n}A + E,$$

我们从（159）式就有

$$\begin{aligned}\alpha - \alpha_0 &= f + g\sin(G + \alpha_0)\tan\delta_0,\\ \delta - \delta_0 &= g\cos(G + \alpha_0).\end{aligned} \tag{160}$$

从A中略去τ，我们就得到仅仅包含章动的A、B、E，或者f、g、G，因为$f = m\tau + \Delta\Psi\cos\varepsilon_0$，这时方程（160）式便回到方程（157）式。

量f、g、G称为**独立日数**，如果我们要的仅仅是某颗恒星在几个孤立日期的位置，那么用这几个量就比A、B、E更为方便，因为这时不用计算（159）式中的恒星常数，但是当需要一个连续的星历表时，贝塞尔日数则有更大的优越性。

在1960年前，根据当时A所表示的量有

$$g\cos G = nA,$$
$$f = mA + E.$$

岁差和章动的二阶归算

我们可以从岁差和章动的泰勒级数的二阶项，或者利用严格公式的直接展开式，从而把贝塞尔一阶归算扩展到二阶，其中又有两种情况，即或者用贝塞尔日数来表示，或者用独立日数来表示。

引入了二阶项之后，我们就必须把从平春分点和平赤道到真春分点和真赤道的归算同相反方向的归算区别开来。还有，必须先把岁首到瞬时的岁差改正加在对于平春分点和平赤道的初始坐标α_0、δ_0上，**然后**才能确定章动改正，这是因为用动力学方法求得的章动表达式是用对于瞬时平春分点的量来表示的，而且显

然代表了参考圈对于其平位置的某种位移，但是α_0、δ_0可以是天球上的几何位置的坐标，也可以是受光行差位移后位置的坐标。

为了确定从岁首到瞬时的岁差归算，取岁首为历元，而从这一历元起所经过的时间则以年为单位来量度。如果以α_0、δ_0表示对于岁首平春分点和平赤道的赤经、赤纬，α_1、δ_1为对于瞬时平春分点和平赤道的坐标值，则我们可以直接从关于赤经、赤纬岁差的马克劳林级数导出从α_0、δ_0到α_1、δ_1的归算公式，其中只要令$t=\tau$，并且把$\tau=0$时的导数代进去就可以了，保留到二阶项有

$$\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_0=&+\{m_0+n_0\sin\alpha_0\tan\delta_0\}\tau\\&+\left\{\frac{1}{4}n_0^2\sin 2\alpha_0+\frac{1}{2}m_0n_0\cos\alpha_0\tan\delta_0\right.\\&+\frac{1}{2}n_0^2\sin 2\alpha_0\tan^2\delta_0+\frac{1}{2}\left(\frac{dm}{dt}\right)_0\\&\left.+\frac{1}{2}\sin\alpha_0\tan\delta_0\left(\frac{dn}{dt}\right)_0\right\}\tau^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_1-\delta_0=&+(n_0\cos\alpha_0)\tau\\&-\frac{1}{2}\left\{n_0^2\sin^2\alpha_0\tan\delta_0+m_0n_0\sin\alpha_0\right.\\&\left.-\cos\alpha_0\left(\frac{dn}{dt}\right)_0\right\}\tau^2,\end{aligned}$$

其中m_0、n_0是岁首赤经总岁差和赤纬岁差的周年变化率。同样的表达式可以从以Ψ_1和$\Delta\varepsilon^0$的各次幂和交叉乘积表示的严格方程的展开式求得，这时需以马克劳林级数

$$\Psi_1(\tau)=\Psi_1(0)+\left(\frac{d\Psi_1}{dt}\right)_0\tau+\cdots\cdots$$

等来代替Ψ_1、$\Delta\varepsilon^0$和a，并用m_0和n_0来表示所得的结果，在$\tau=0$，即在历元时位移Ψ_1、a和$\Delta\varepsilon^0$为零。

为求得对于瞬时真春分点和真赤道的赤经 α 和赤纬 δ，就要在 α_1、δ_1 上加上瞬时章动，而这同样可以从泰勒级数

$$\alpha=\alpha(\Psi+\Delta\Psi,\ \varepsilon_0+\Delta\varepsilon)$$

$$=\alpha_1+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\Psi}\right)_1\Delta\Psi+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\right)_1\Delta\varepsilon+\cdots\cdots$$

等求得，或者可以从由严格方程的直接展开式所得到的表达式

$$\alpha-\alpha_1=(G'+G_0)+g_0\sin(\alpha_1+G_0)\tan\delta_1$$

$$+\frac{1}{4}g_0^2\sin 2(\alpha_1+G_0)$$

$$+\frac{1}{2}g_0^2\sin 2(\alpha_1+G_0)\tan^2\delta_1+\cdots\cdots,$$

$$\delta-\delta_1=g_0\cos(\alpha_1+G_0)$$

$$-\frac{1}{2}g_0^2\sin^2(\alpha_1+G_0)\tan\delta_1+\cdots\cdots.$$

来求得。由日数的定义，以及 $\Delta\Psi$ 和 $\Delta\varepsilon$ 各次幂及交叉乘积表示的关于 $G'+G$、$g_0\sin G_0$、$g_0\cos G_0$ 的（147）式，有

$$G'+G_0=\left(\frac{m}{n}A'+E\right)+\frac{1}{2}A'B$$

$$+\frac{A'^2}{12}\left(\frac{m}{n}A'+E\right)$$

$$=f-m\tau-\frac{1}{2}n\tau g\sin G+\frac{1}{4}g^2\sin 2G,$$

$$g_0\sin G_0=B+\frac{1}{2}A'\left(\frac{m}{n}A'+E\right)$$

$$-\frac{1}{6}B^3-\frac{1}{2}B\left(\frac{m}{n}A'+E\right)^2$$

$$+\frac{1}{6}g_0^3\sin G_0$$

$$= g\sin G + \frac{1}{2} fg\cos G - \frac{1}{2} m\tau g\cos G$$

$$- \frac{1}{2} n\tau(f - m\tau),$$

$$g_0\cos G_0 = A' - B\left(\frac{m}{n} A' + E\right) - \frac{1}{2} A'B^2$$

$$- \frac{1}{6} A'^3\operatorname{cosec}^2\varepsilon_0 + \frac{1}{6} g_0^3\cos G_0$$

$$= g\cos G - fg\sin G + m\tau g\sin G - n\tau,$$

式中 $A' = A - n\tau$，同样，泰勒级数中各阶导数可以用 m、n 以及贝塞尔日数或独立日数来加以表示。保留到二阶项的二分差是：

$$G' + G_0 = \Delta\Psi\cos\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\Delta\Psi\Delta\varepsilon\sin\varepsilon_0.$$

用这些表达式来代替 α_1、δ_1，并且令

$$m = m_0 + \left(\frac{dm}{dt}\right)_0\tau + \cdots\cdots, \quad n = n_0 + \left(\frac{dn}{dt}\right)_0\tau + \cdots\cdots,$$

我们就得到以独立日数表示的从 α_0、δ_0 到 α、δ 的二阶归算公式

$$\alpha = \alpha_0 + f + g\sin(G + \alpha_0)\tan\delta_0$$

$$+ \frac{1}{4} g^2\sin 2(G + \alpha_0) + \frac{1}{4} g^2\sin 2G$$

$$+ \frac{1}{2} fg(\cos G\cos\alpha_0 - 2\sin G\sin\alpha_0)\tan\delta_0$$

$$+ \frac{1}{2} g^2\sin 2(G + \alpha_0)\tan^2\delta_0, \tag{161}$$

$$\delta = \delta_0 + g\cos(G + \alpha_0)$$

$$- fg\left(\frac{1}{2}\cos G\sin\alpha_0 + \sin G\cos\alpha_0\right)$$

$$- \frac{1}{4} g^2[1 - \cos 2(G + \alpha_0)]\tan\delta_0.$$

较差岁差和较差章动

由于归算值 $\alpha-\alpha_0$ 和 $\delta-\delta_0$ 与赤经、赤纬的数值有关，对不同的两个天体来说，它们的归算量是不同的，因此这两个天体对于瞬时真春分点和真赤道的坐标差 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 就不等于对于岁首平春分点和平赤道的坐标差 $\Delta\alpha_0$ 和 $\Delta\delta_0$。取到一阶项有

$$\Delta\alpha=\Delta\alpha_0+\frac{\partial(\alpha-\alpha_0)}{\partial\alpha}\Delta\alpha+\frac{\partial(\alpha-\alpha_0)}{\partial\delta}\Delta\delta,$$

$$\Delta\delta=\Delta\delta_0+\frac{\partial(\delta-\delta_0)}{\partial\alpha}\Delta\alpha+\frac{\partial(\delta-\delta_0)}{\partial\delta}\Delta\delta;$$

对 (159) 式取微分得出

$$\begin{aligned}\Delta\alpha&=\Delta\alpha_0+(A\cos\alpha-B\sin\alpha)\tan\delta\,\Delta\alpha\\&\quad+(A\sin\alpha+B\cos\alpha)\sec^2\delta\,\Delta\delta\\&=\Delta\alpha_0+g\cos(G+\alpha)\tan\delta\,\Delta\alpha\\&\quad+g\sin(G+\alpha)\sec^2\delta\Delta\delta,\\\Delta\delta&=\Delta\delta_0-(A\sin\alpha+B\cos\alpha)\Delta\alpha\\&=\Delta\delta_0-g\sin(G+\alpha)\Delta\alpha,\end{aligned}$$

其中 g 以弧度为单位，公式右端的 α、δ 为从岁首至瞬时的中点的坐标值。

位置角的岁差和章动

如一点 P_1 至邻近的一点 P_2 的圆弧为 s，s 的位置角 p 的变化完全是由天极的日月运动造成的，这一变化与 η 角变化反向，其中 η 为由 P_1、天极和黄极所构成的三角形中 P_1 点处的内角。对这个三角形进行微分，顾及 β 为常数就有

$$\cos\delta\,d\eta=\cos\alpha\,d\varepsilon-\sin\varepsilon\sin\alpha\,d\lambda,$$

取到一阶项为

$$\Delta p=(\psi'\sin\varepsilon\sin\alpha-\cos\alpha\Delta\varepsilon')\sec\delta,$$

其中 ψ' 和 $\Delta\varepsilon'$ 表示黄经及交角的日月岁差和章动的总和。

只考虑岁差，并略去交角的日月岁差，就有

$$dp=n\sin\alpha\sec\delta.$$

利用独立星数则 Δp 的表达式变为

$$\Delta p = g\sin(G+\alpha)\sec\delta,$$

这个公式也可以通过对 $s_0\cos p_0 = \Delta\delta_0$ 取微分求得，其中右端的导数中用关于 $\Delta\delta - \Delta\delta_0$ 的表达式代入，而在左端的导数中则作代换 $s_0\sin p_0 = \cos\delta\Delta\alpha$。

距离北极星 18″ 的那颗 9 等伴星的位置角从 1780 年以来增加了 14°，但是其中有 10° 的变化是由岁差所造成的坐标系变化引起的。

岁差和章动所引起的赤道直角坐标的变化

对于 xy 平面在平赤道面、x 轴指向平春分点的直角坐标系，其坐标轴由于平赤道和平春分点的岁差运动而不断地改变着自己在空间的方向。在任意时间 t_2，这些坐标轴与它们在另一个任意时间 t_1 时的方向间的交角由下式给出，

$$\cos(x_2,x_1) = -\sin\zeta_0\sin z + \cos\zeta_0\cos z\cos J,$$

$$\cos(x_2,y_1) = -\cos\zeta_0\sin z - \sin\zeta_0\cos z\cos J,$$

$$\cos(x_2,z_1) = -\cos z\sin J,$$

$$\cos(y_2,x_1) = +\sin\zeta_0\cos z + \cos\zeta_0\sin z\cos J,$$

$$\cos(y_2,y_1) = +\cos\zeta_0\cos z - \sin\zeta_0\sin z\cos J,$$

$$\cos(y_2,z_1) = -\sin z\sin J,$$

$$\cos(z_2,x_1) = +\cos\zeta_0\sin J,$$

$$\cos(z_2,y_1) = -\sin\zeta_0\sin J,$$

$$\cos(z_2,z_1) = +\cos J,$$

这些关系式或者可以从有关黄道坐标的相应方程导得，这时需用 J 代替 π_1，用 $90°-\zeta_0$ 代替 Π_1，以及用 ζ_0+z 代替 γ；或者也可以从天球上有关的三角形直接推导出来。

因此，如果设某一天体对于 t_1 平春分点和平赤道的赤道直角坐标为 (x_1, y_1, z_1)，而对于 t_2 平春分点和平赤道的坐标值为 (x_2, y_2, z_2)，那么考虑到 $\cos J = 1-2\sin^2\frac{1}{2}J$ 以及有关

$\cos(\zeta_0+z)$的类似关系式，由(x_1, y_1, z_1)换算为(x_2, y_2, z_2)的方程式是：

$$x_2 = x_1 - 2\left[\sin^2\frac{1}{2}(\zeta_0+z) + \cos\zeta_0\cos z\sin^2\frac{1}{2}J\right]x_1$$
$$+\left[2\sin\zeta_0\cos z\sin^2\frac{1}{2}J - \sin(\zeta_0+z)\right]y_1$$
$$-[\cos z\sin J]z_1,$$

$$y_2 = y_1 + \left[\sin(\zeta_0+z) - 2\cos\zeta_0\sin z\sin^2\frac{1}{2}J\right]x_1$$
$$-2\left[\sin^2\frac{1}{2}(\zeta_0+z) - \sin\zeta_0\sin z\sin^2\frac{1}{2}J\right]y_1$$
$$-[\sin z\sin J]z_1,$$

$$z_2 = z_1 + (\cos\zeta_0\sin J)x_1 - (\sin\zeta_0\sin J)y_1$$
$$-\left(2\sin^2\frac{1}{2}J\right)z_1,$$

式中t_2时ζ_0、z、J的数值必须从有关这些量的通用表达式来加以求得，而所谓通用表达式是用任意历元t_1起算的时间t_2-t_1来表示的，其中t_1又从所采用的基本历元起算。利用同样的系数可以实现相反的换算，只要把转换矩阵的行列对换就可以了。

为了求得对于真春分点和真赤道的直角坐标，就需要进一步加上章动改正，只要把有关赤道坐标x、y、z的（17）式对黄经λ和交角ε取微分，并用x、y、z、ε、$\Delta\varepsilon$、$\Delta\Psi$来表示所得的结果，这样便可以导出章动改正。取到一阶项有：

$$dx = -r\cos\beta\sin\lambda d\lambda$$
$$= -r(\sin\varepsilon\sin\delta+\cos\varepsilon\cos\delta\sin\alpha)d\lambda$$
$$= -(y\cos\varepsilon+z\sin\varepsilon)\Delta\Psi,$$

以及同样有：

$$dy = +x\cos\varepsilon\Delta\Psi - z\Delta\varepsilon,$$
$$dz = +x\sin\varepsilon\Delta\Psi + y\Delta\varepsilon.$$

用以确定空间平面相对于赤道面位置的各个要素的岁差变化

为了用空间某一平面 P 对于赤道的交点 Ω 和倾角 i 来表征该平面的位置，我们以任意特定历元 t 时的天赤道面作为基本参考面。这时，由于赤道和春分点的岁差运动引起 Ω 和 i 随 t 而变化，而这种变化显然可以从有关黄道的相应关系式来求得，其中严格方程式中 t_2 黄道对于 t_1 黄道的倾角 π_1 和交点 Π_1，要用 t_2 赤道对于 t_1 赤道的倾角 J 和交点 $90°-\zeta_0$ 来代替（交点赤经 $90°-\zeta_0$ 从 t_1 平春分点起算），而从 t_1 到 t_2 的黄经总岁差量 ♈ 要用赤经总岁差量来代替(图 54)。

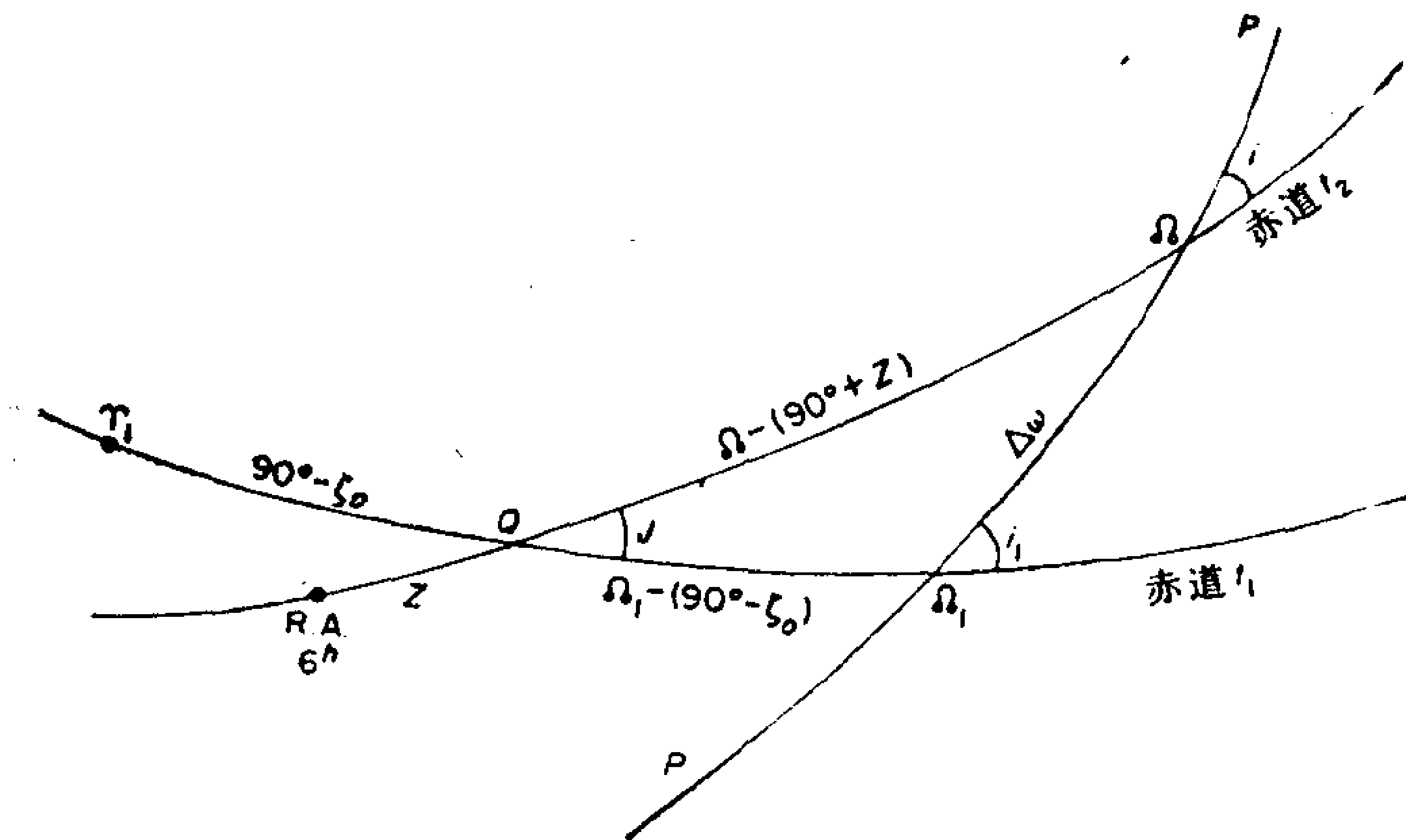


图 54 空间平面赤道要素的岁差变化

对于大部分问题来说，微分关系式在实际计算中具有足够的精度，在这种关系式中，黄道绕着某根轴（它从瞬时平春分点起

算的黄经为 Π_κ）的旋转速率 κ 用赤道绕着某根轴（它从瞬时平春分点起算的赤经为 6^h）的旋转速率 n 来代替，而黄经总岁差的变化率 p 用赤经总岁差的变化率 m 来代替。于是有

$$\Delta i = -n \sin \Omega \cdot (t_2 - t_1),$$

$$\Delta\Omega = +(m - n \cos \Omega \cot i)(t_2 - t_1),$$

$$\Delta\omega = -n \cos \Omega \operatorname{cosec} i \cdot (t_2 - t_1),$$

式中对于 Ω、i、n、m 采用它们在 $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ 时的数值。

第十三章　星历表

岁差和章动所引起的天体坐标的变化反映了天球形象的变化，特别是经历了一段时间间隔之后，这种变化在许多现象中是很容易被观测出来的。从直接应用的目的来说，无论是在星历表计算中还是对于观测所得到的坐标值，都需要进行归算，其中除了有关光行差、视差和**观测环境**所必需的其它改正外，还必然包括把坐标归算到所需要的**参考系**时应加的岁差和章动改正。

在观测天文学中，用来表示旋转天球上位置（与天球的地方形象无关）的基本参考系是赤道坐标系。观测结果必须通过地方参考系这一中间过渡而归算到这个系统中来，因此，一般来说，从观测得到的赤道坐标所对应的是观测瞬间的赤道和春分点在众星之间的**瞬时位置**。这是因为每一瞬间在给定地理位置处的天球地方形象，以及天球上的赤道坐标系和地方地平坐标系之间的几何关系，都是由地球自转轴在空间的瞬时方向以及它在地球内部的瞬时位置所确定的。

地球相对于轴的位移引起自转轴在**地球内部**位置的变化，这种变化并不影响天极和天赤道在恒星中的位置，但是使地平圈在恒星间的位置，因而也就使地平圈相对于天极和赤道的位置发生位移。这种位移是极其微小的，而且不会累积起来。它们对地方参考系以及天球形象的影响已在第九章中作了介绍。

日月岁差和章动改变了自转轴**在空间**的方向，但却并不改变它在地球内部的位置。天极和赤道在众星之间移动，由于整个地球随着轴而运动，地平圈就随同天极一道在恒星间移动，因而它同天极和赤道的相对位置保持不变。地方参考系以及它对于赤道坐标系的关系也就没有受到影响。但是，随着天极在恒星之间的运动，某一颗恒星在连续各天内的周日平行圈是天球上一些不同

的小圆。由于天极对地平圈的相对位置保持不变，因而对于任何特定的地理位置来说，这些不同日期内的周日平行圈同该地的视地平以及天文地平圈的相对位置都是不同的。

岁差和章动引起的天球形象的变化

地轴的章动所造成的参考圈的位移相对说来是比较小的，而且不会越变越大。但是轴的岁差所引起的变化尽管很慢，然而在长时期内却是累积性的。后者造成的天体周日平行圈的变化，以及它们同地平圈和子午圈之间关系的变化，引起了周日运动可观的逐日不规则变化，经过漫长的时间之后，便使星座的形象产生很可观的、而且是越来越大的改变。

中天时刻的逐日变化

子午平面绕着自转轴旋转，而轴的空间位置在不断地改变，由此造成了周日圈的变化，从而使同一颗恒星连续两次上中天之间的时间间隔发生不规则的变化。这种变化对不同的恒星是不同的，并且和春分点中天的变化情况也不一样，它们反映了连续两次上中天之间的时间间隔内恒星的赤经和赤纬所发生的变化，而这种变化则是由天极和春分点在恒星之间的运动造成的。天极的运动引起的时圈和赤纬圈的位移，一方面使春分点产生某种位移，从而使所有的恒星的赤经都发生相同的变化；另一面还引起因不同恒星而异的赤经的另一种变化。在连续各天的周日平行圈内，中天时恒星的赤经总是等于春分点的时角，影响上中天时刻的有两个因素，一个是一天内视赤经的增加量 $\Delta\alpha$，它使每天上中天时刻推迟，另一个是春分点上中天的加速量 $\Delta\theta$，它使上中天时刻提前，这里的 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\theta$ 都是相应于平时系统的量值。

中天平时时刻的周日增量

$=\Delta\alpha-\Delta\theta+$化算到平时系统的相应归算量

$=$每平太阳日时角的减少量

中天的周年变化

对于连续各年的同一日期来说，同一恒星中天的平时时刻是不同的，这一方面是因为赤经的变化 $\Delta\alpha$，另一方面是因为恒星日和平太阳日之间的差异 $\Delta\theta$ 所造成的。就任何一个特定日期来说，如果上一年 $\alpha-\theta$ 的平时时刻为零，则当年的 $\alpha-\theta\neq0$，要迟一段时间 Δt 后才出现上中天，这里 Δt 为 $\Delta\alpha-\Delta\theta$ 相应的平时数。

对任意一个特定的日期来说，从上一年这一日期的上中天平时时刻起到今年同一日期同一平时时刻所经历的时间间隔为（如果中间没有插入闰日）：

365 平太阳日

　　$=366$ 平恒星日 -57.292^{s} （平恒星时）

　　$=366$ 平恒星日 -57.13^{s} （平太阳时）

式中 57.13^{s} 是与 $\Delta\theta$ 相应的平时数，其中略去了赤经章动值在不同年份之间的微小变化。要是碰到闰年，那么在 2 月 28 日以及这一天以前所用的是同一个关系式，而且对于上一年 3 月 1 日到闰年 2 月 29 日的两次中天之间也是用这个关系式。对于闰年的 3 月 1 日以及这一天以后的日期来说，从上一年同一日期上中天起所经历的时间间隔为

366 平太阳日

　　$=367$ 平恒星日 $+2^{m}59.263^{s}$ （平恒星时）

　　$=367$ 平恒星日 $+2^{m}58.77^{s}$ （平太阳时）

同时，α 在一年内是增大的，其增大的数值就是赤经方向的岁差、章动、光行差以及自行的总和。光行差在连续各年的同一日期是几乎完全一样的，而章动大体上是一个周期性量，其周期约为 18 年。

因此，如果略去不同年份内同一日期光行差的差值，再略去章动所引起的 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\theta$ 的周期为 18 年的变化，那么相邻两年之间同一日期上中天平时时刻所增加的量为

$$\Delta t=\begin{cases}+57.13^{s}\ \text{（没有闰日）}\\-178.77^{s}\ \text{（　有闰日）}\end{cases}+\text{（岁差和自行所引起的）}\Delta\alpha$$

其中 $\Delta\alpha$ 应化算为相应的平时数。

$\Delta\alpha$ 因不同的恒星而异，对于那些赤经近乎相同的恒星来说常常会改变它们上中天的先后次序。两颗恒星中天之间的间隔在一段比较短的时间内可以很可观的变化。观测者有时用下面这种方法来确定子午圈的位置，这就是观测北极星位于大熊座 ζ 星（开阳）或仙后座 δ 星的正上方或正下方的时刻，并计算从该瞬间到北极星中天瞬刻间的时间间隔。为了这一目的，这些时间间隔曾以表格形式刊布于 1912 到 1959 年间的**美国天文年历和航海历**中。在这期间，它们的长度从 7～8 分钟增大到半小时以上。

地平坐标系天球形象的岁差变化

岁差变化具有累积性，因而它们所造成的影响在一段比较短的时间间隔内就变得甚为可观。天球对于地平圈的相对形象会受到各种影响，尽管对其中某些影响的严格计算相当复杂，然而它们的一般特征是容易认识的。实际上，赤道极绕着黄极在一个圆上向西运动(从北极上方来看为顺时针方向)，同时使得赤道坐标系中所有的参考圈在恒星之间发生位移。但是为了确定星座位置的变化，我们可以象古代天文学家们所做的那样，用**恒星天球**绕黄极的**向东**运动来表示岁差位移，同时让天球上的全部参考圈保持不动，特别是使赤道系统各参考圈同地球表面上地理参考圈之间的相对关系保持不变❶。

经过不太长的若干年之后，岁差对某个特定时刻恒星高度和方位角的影响是很显著的，以至于有时候对导航定位的影响颇为可观，这是因为在确定位置时要用到一些特定恒星的高度和方位角表，而这种表格则是从某个固定历元的赤经和赤纬计算而来的。例如，美国海军部水道局出版物第 1 卷第 249 期中就列出了

❶ 例如，可参见 M.R.Cohen and I.E.Drabkin, "Source Book in Greek Science", pp.115—117. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1959.

有关这种影响的改正表。这一卷给出了选定的一些恒星的高度和方位角，并以春分点的地方时角和地理纬度为引数。位置是通过对恒星的实际高度进行观测来加以确定的，但是对观测结果进行归算时要用到一些表格，而这些表格是从对于固定历元，而不是对于观测瞬间的赤道和春分点的恒星坐标计算而来的。因此，导航位置的经纬度就是观测点天顶对历元赤道和春分点的格林尼治时角和赤纬，就好象观测位于天顶的某一颗恒星一样。在从该历元起算的这段时间内，赤道和春分点在天球上发生了移动，而恒星则保持在天球的同一位置上。因此，天球上**被观测**点位于天顶时的表列坐标并不是观测瞬间的坐标值，而在表列坐标所确定的**导航位置**处，天球上的这一被观测点实际上并不位于天顶。为了把这一点移到天顶去，并在天顶被观测到，导航位置必须随同坐标系的位移作大小相等方向相反的移动，或者，它必须移动与天球上天顶坐标变化大小相等、方向相同的一段距离，两者是等价的。

如果略去黄道的长期运动，则黄纬 β 处的位移改正为 $\Delta\Upsilon\cos\beta$，方向沿黄纬圈(图 55)，这里 $\Delta\Upsilon$ 是自历元 t_0 起算的

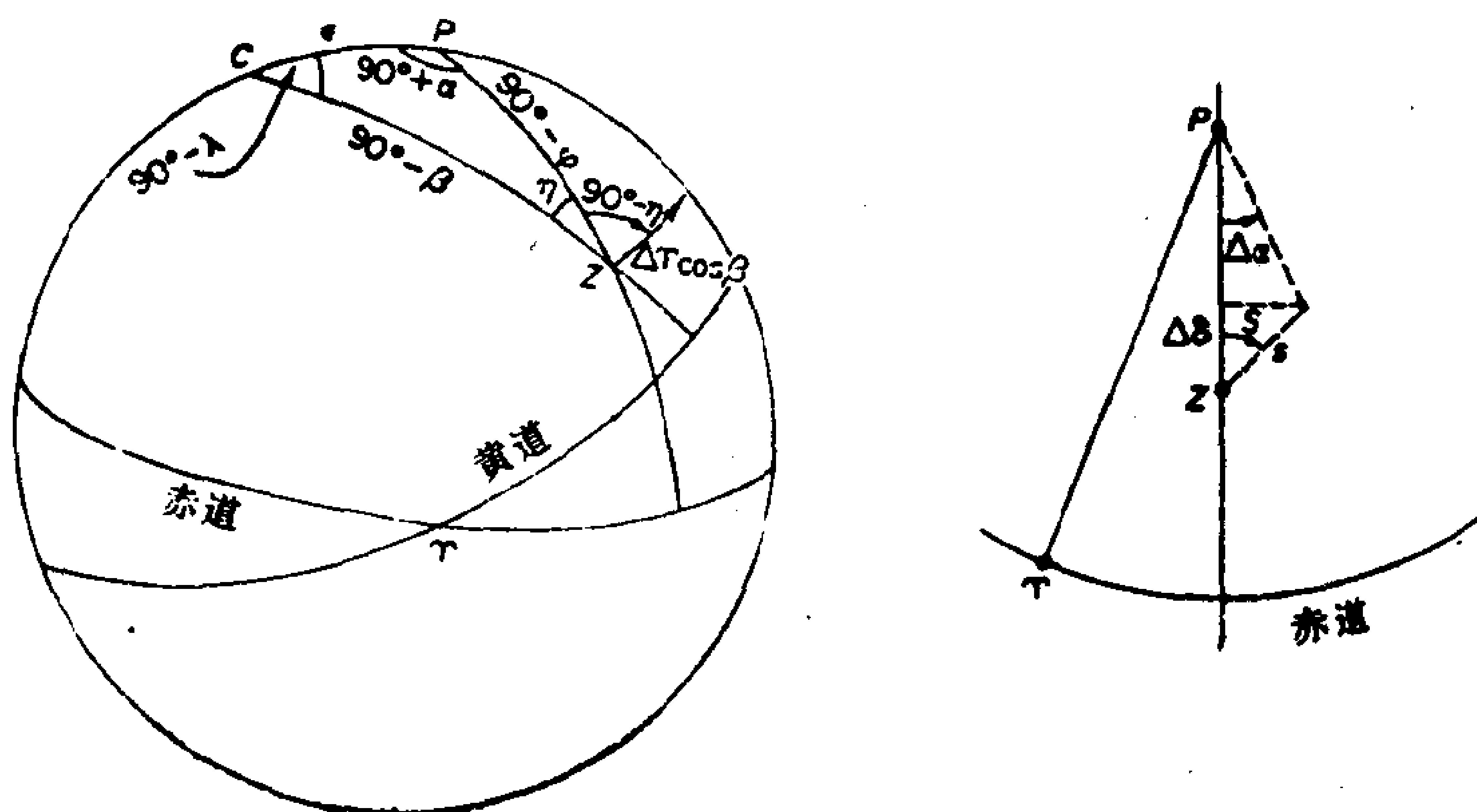


图 55　导航位置的岁差和章动改正。这一位置所要移动的方向为 90°$-\eta$，它从北天极起按顺时针量度。

岁差和章动的累积量。如果在历元**之后**，导航位置必须沿着与黄道平行的方向**朝东**移动，在历元**之前**则**朝西**移动。因为天顶处的赤纬等于纬度 φ 根据（9）式，位移量可由下式确定：

$$\sin\beta=\sin\varphi\cos\varepsilon-\cos\varphi\sin\alpha\sin\varepsilon,$$

$$\cos\beta\Delta\Upsilon=[0.8378'(t-t_0)+\Delta]\cos\beta,$$

式中 Δ 表示瞬时章动对于历元章动的剩余量，根据（11）式，位移的方向由下式

$$\cot\eta=\cos\varphi\sec\alpha\cot\varepsilon+\sin\varphi\tan\alpha$$

加以确定。因为天顶位于子午圈上，它的 a 等于春分点的地方时角或者说地方恒星时，于是我们就可以从这些方程式直接计算出以 φ 和 $LHA\Upsilon$ 为引数的改正用表●。

另一方面，根据贝塞尔归算公式（159）式，导航位置沿方位 S 所移动的距离 s 由下式确定，

$$s\cos S=\Delta\varphi=Aa'+Bb',$$

$$s\sin S\sec\varphi=\Delta(LHA\Upsilon)=Aa+Bb.$$

经过很长的一段时间间隔之后，岁差对星座季节形象的累积效应使晚间天空的面貌发生巨大的变化。古代诗句中对天体的出没有一种非常方便的说法（这种说法现在基本上已经舍弃不用了），其中讲到一颗恒星每年的可见期是从它偕日而升开始直到它偕日而落为止，当它与太阳一同升起时，我们是第一次看到它出现在黎明时的东方地平线上，而当它与太阳一同下落时，那是它最后一次出现于黄昏的西方低空之中。从这一年到下一年，任何一颗恒星每年偕日出没的时间并没有什么明显的变化，但是过了几个世纪之后，由于岁差效应的缘故，偕日出没的日期可能会变得很不一样，不过时间上的变化率对同一颗恒星来说并不是始终不变的，并且对不同的恒星又有很大的不同，因而就没有任何普

● 这里 $LHA\Upsilon$ 为春分点地方时角的缩写。——译者注

遍性的规律可言。

由于岁差，恒星年就比回归年、或者说比平均格里高利历年长 0.01416^d，因此当太阳还没有回复到恒星间的同一点时，它已经完成了一个回归循环，而平均来说新的历年也就开始了。黄道在恒星间的位置几乎是保持不变的，因此，每经过 1000 年太阳到达恒星间任何特定点的时间在儒略历内大约要推迟 6 天，或者说在格里高利历内要推迟 14 天左右。

与此同时，岁差相当于天球绕着黄极向东旋转，转过的角度等于总岁差的全部位移量。这种岁差旋转使太阳沿着黄道朝东移动同样的角距离，而恒星则沿着与黄道平行的一段小圆弧移动，移动后的恒星与天极的相对位置发生了变化，这时它所描绘出的周日平行圈也就不同了。

在给定地理位置的地方，偕日出没日期的变化取决于两个因素的联合影响：一个是恒星周日平行圈的变化，另一个是太阳到达恒星间必须到达的那一点的日期的变化，这是指太阳到了这一点时，恒星便在黎明前升起或在黄昏前没入于西方地平线之下。有关这一日期及其长期变化的理论计算需要通过复杂的三角运算，因为这一问题历来在研究工作中的极端重要性，人们编制了若干种用表便于计算。但是，要使一颗有确定亮度的恒星可以在黎明时升起之后，或者在黄昏时下落之前为我们所看见，天空应有足够的黑度，因而太阳就必须位于地平线以下足够低的地方。恒星出没时太阳可以有的最小俯角称为**星现角**，它取决于当地的大气条件，因而必须就每一个具体的地区通过实测的方法来加以确定。恒星首次与末次可见的实际日期对这种非天文因素的依赖关系便给计算所得到的日期的可靠性带来了某种限制。

视位置计算与观测中的岁差和章动的归算

在太阳系主要天体的精密星历表中，通常给出的是视地心赤道坐标，因为这些表主要用于把理论同子午环观测作严格的比

较，而这些坐标就是根据子午观测并按一般方法归算后所直接得到的坐标。对于那些用别的方法或为了其它目的而进行观测的天体来说，也许用一些不同形式的星历表更为有利。不同形式的星历表有各种不同的专门名称，这在文献中是屡见不鲜的。

确切地说，视位置是从运动地球的中心所看到的天体**在天球上的位置**，这一位置同为了用坐标值来表示它而采用的具体参考系是没有关系的，而且严格说来可以用任意一种坐标系来表示这个位置。但是，对实际观测位置作了大气折射、视差以及周日光行差改正后所给出的视位置，一般说来是相对于观测时间的瞬时春分点和瞬时赤道而言的。在实际应用中，**视位置**这个术语通常仅仅用于以瞬时真春分点和真赤道为参考系所表示的坐标位置。

由于地心及被观测天体两者的运动所造成的光行差效应，使视位置发生位移，结果便偏离了从地心出发的几何方向，在视位置中除去了光行差效应之后所给出的是地心的真几何位置。习惯上通常选用特定历元的固定平春分点为参考来表示从地心出发的这一几何投影，这时便称为平位置。但是，如果有必要的话，也可以把它参考于任何别的坐标系。为了从视位置求得平位置，根据这两个术语习惯上所常用的定义，就需要作瞬时章动归算，这样才能把天体的位置化算到同一瞬间的平春分点和平赤道系统。然后，如果要想把这一位置化算到某个其它历元的平春分点和平赤道系统，那就要进一步再作岁差归算。

原则上说，在计算星历表时，为了确定天球上某个天体的视运动可以有两种方法，其一是根据这个天体以及地球的实际空间运动的引力理论，其二是利用对这一运动的经验表达方式，后者是根据很长一段时期内的直接观测结果而得到的。对于恒星来说，后一种方法是唯一可行的途径，而从历史的观点来说，这一方法也是研究太阳系天体运动的必要准备，而且为了确定在引力理论中所出现的一些常数的具体数值，它也是必不可少的。

为了计算太阳系天体的星历表，我们可以利用推导引力运动

的动力学理论时所得到的坐标表达式，或者利用从这些表达式所编成的一些表格，来确定地球和别的天体在空间某个坐标系内的位置。从这些坐标直接求得的任一瞬间天体在天球上的位置乃是地心位置，它代表了从地心指向该一瞬间天体实际空间位置的几何方向。如果用瞬时真春分点和真赤道或瞬时黄道作为参考系，那么这一位置便称为**真位置**，许多作者一直就是这样来称呼它的。

对于恒星星历表的计算来说，某个特定历元的恒星坐标以及它们自行的变化率，是从根据观测所编成的星表来求得的。星表给出的是某个选用历元的平位置，通常以表格形式列出，它们以该历元的平春分点和平赤道为参考系，而且包括了周年光行差的椭圆分量。对恒星来说，真位置（要是这一名称的含义同太阳系天体所用的意思一样）是无法确定的，但是如果没有椭圆光行差，则平位置便代表了相对于运动着的太阳系质心而言的光线的几何方向，有些作者就把这一位置称为真位置。

在实际观测中，恒星是用作测定其它天体位置的最直接的参考点。直接观测量是天体对于比较星的赤经差 $\Delta\alpha$ 和赤纬差 $\Delta\alpha$，但是，根据具体情况，可以通过几种不同的方法来测定这些差数，再从所测定的这些差数以及比较星的坐标来确定天体的坐标。例如，在目视测微器观测中，通常的做法是对测得的 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\delta$ 作较差折射改正，并且把这种改正后的坐标差直接加在比较星的星表平位置上。因此，观测位置所在的参考系是固定平春分点和平赤道，所以把它称为**平位置**也许是恰当的，尽管在文献中这个名称原来并不用在运动天体上。然后，这个平位置可以通过有关岁差、章动、光行差和视差的进一步改正再归算为视位置，或者也可以不作这一步归算。但是，在照相观测中，是在恒星的星表平位置上加上对底片测量进行归算后所求得的 $\Delta\alpha$和$\Delta\delta$值，从而求得待测天体的平位置，通过底片归算所自动引入的不仅有较差折射改正，而且还有岁差、章动和光行差的较差改正。于是用这种方法所得到的位置就被称为**天文照相位置**，它与目视方法

所得到的平位置不同，两者所差的就是**较差**岁差、**较差**章动和**较差**光行差。默冬曾建议用**天文目视位置**这一名称，以区别于用目视方法求得的平位置，但是没有得到采用。

在目视观测中，较差折射改正（它同具体的测微器以及使用这一测微器的方法有关）和观测期间天体运动的改正以及仪器误差的改正，这些只能由观测者本人来作出恰当的考虑，因为观测者对观测所处的全部环境条件是完全熟悉的。但是，至于岁差、章动和光行差的较差改正，及视差的改正和归算到视位置的改正，这些都可以按照使用这些观测结果的人的需要来加以考虑，最好不要包括在观测者的归算工作之中。还有，在目视观测中，岁差、章动和恒星光行差的较差改正，同观测本身的误差以及比较星位置的误差相比，通常是可以忽略不计的，因此可以把它们看作是一些偶然误差，只要待测天体和比较星之间的距离不超过 1° 左右，就用不到考虑这些改正。

所以，一个运动天体的平位置，可以定义为直接以比较星平位置为参考的天体位置。严格说来，恒星的星表平位置加上观测所得到的赤经差和赤纬差(这里差数的意义取为**天体减比较星**)，并考虑到有关大气折射较差改正，以及岁差、章动的较差改正和恒星光行差**较差**改正，由此所得到的才是天体的平位置。对于照相平位置或者说天文照相位置，这些改正已自动包括在底片的归算之中，但是对目视平位置来说，岁差、章动以及光行差的较差改正可以在观测归算中略去。由这个方法所确定的平位置同比较星的平位置是以同样的春分点和赤道为参考的，并且以实际的**观测时间**作为相应的日期。

在实际计算中，观测平位置通常以岁首平春分点和平赤道为参考的。要是再**加上**恒星光行差的(73)式，即 $+\frac{1}{15}h\sin(H+\alpha)\cdot\sec\delta$ 和 $+h\cos(H+\alpha)\sin\delta+i\cos\delta$，从观测时间中**减去**光行时间，并加上视差改正之后，观测平位置就进一步归算为某种真位

置，这时的位置便成了对于同一平春分点而言的几何位置，这一位置可以直接同几何星历表相比较，后者是从**同一瞬间**地球和天体的实际空间位置求得的，某些作者把它称为**真平位置**。观测视位置同样可以归算为真平位置，这时需要进一步减去岁差和章动的影响。

在文献中，**平位置**、**天文照相位置**和**视平位置**这三个名称都是在同样的意义之下加以应用的。另一方面，当**平位置**和**天文照相位置**所指的是同一个量时，有时候得把这两个名称彼此区别开来。然而，有时候给出的定义是不正确的[1]。

对于理论工作，以及为了对在很长一段时间内所做的观测进行比较来说，在问题涉及的整个时间间隔内所用的应是同一个固定春分点。在实际计算中，所需要的是把瞬时真春分点归算到选用历元的固定平春分点，或者是进行相反的归算，而在这些归算中通常用岁首平春分点作为中间过渡。

恒星视位置的星历表

恒星视位置在任意特定参考系中的坐标是在不断变化的，这是因为恒星有自行，许多情况下还因为恒星所在的双星或聚星系统中存在轨道运动，此外，还在于因地球运动所引起的恒星光行差位移和周年视差位移。

恒星的星历表是根据星表位置编成的，后者通常是对于某一特定历元和春分点的平位置，其中包括了椭圆光行差。从这些相对于选用历元的平春分点的初始时刻的位置出发，任何一年的岁首平位置都是在星表坐标上加上自行和岁差引起的变化之后求得的，再进一步加上从该年岁首到这一年内某一日期的自行和岁差、这一日期的章动以及恒星光行差，就推得了这一日期的视位置，其中必要的时候还应该加上周年视差和双星运动的改正。

---

[1] 例如，在 Union Obs.Circ.34，267；60，225 中，平位置的定义包括了光行差改正，实际上给出的是真平位置。参见 G.Merton，M.N.R.A.S.85，513-520 (1925)。

由于恒星是天球上实际存在的最直接的参考点，因此，选定一批恒星并列出其视位置的星历表，对于方位观测来说是必不可少的，以前在**美国天文年历**以及别的一些国家的天文年历中就曾经包含有这方面的内容。但是，随着时光的流逝，所需要的恒星星数不断地增加，同时对恒星位置所要求的精度也越来越高，因此要把能充分满足需要的星历表都包括在这样一些书册之中是不切实际的。在国际天文学联合会的赞助之下，从 1941 年起独立出版了一部**基本星视位置表**，这样，恒星视位置星历表最终便从天文年历中省去了。

恒星在天球上几乎是完全固定不动的，因而在 18 世纪初期之前一直没有觉察到恒星彼此间所构成的图形有过任何的变化，它们一直被称为**固定的星**，以区别于游星或说行星。但是哈雷在把当时的一些主要恒星的位置同古代所确定的位置作了比较之后发现，大角、毕宿五和天狼这三颗星相对于其它恒星有着显著的移动，而这一点在 1738 年又为卡西尼在大角星上得到了证实。托拜厄斯.梅耶把 1706 年罗默所作的观测同 1750 年和 1756 年内他本人和拉凯勒的观测结果作了比较，从而获得了相当一批恒星存在有自行的证据。

自行 μ——单位时间内沿天球上大圆弧的角位置变化，它是恒星相对于太阳的实际空间运动的视切向分量，径向分量就是视向速度，可以通过分光观测的方法加以测定（图 56）。设有一颗恒星以速度 V 运动，运动方向与恒星视线方向交 θ 角，则该恒星的视向速度为

$$v_r = V\cos\theta,$$

对于作退行的恒星取为正，而切向速度为

$$v_t = V\sin\theta = r\mu = \frac{a}{\pi}\mu,$$

如果 μ 以**每年**的弧秒数来表示，则有

$$v_t = 4.74\frac{(\mu)''}{(\pi)''\sin 1''}\text{km/sec},$$

这里 r 为到恒星的距离，π 为周年视差，a 是天文单位。自行是

$$\mu=-\frac{d\theta}{dt}=\frac{V}{r}\sin\theta.$$

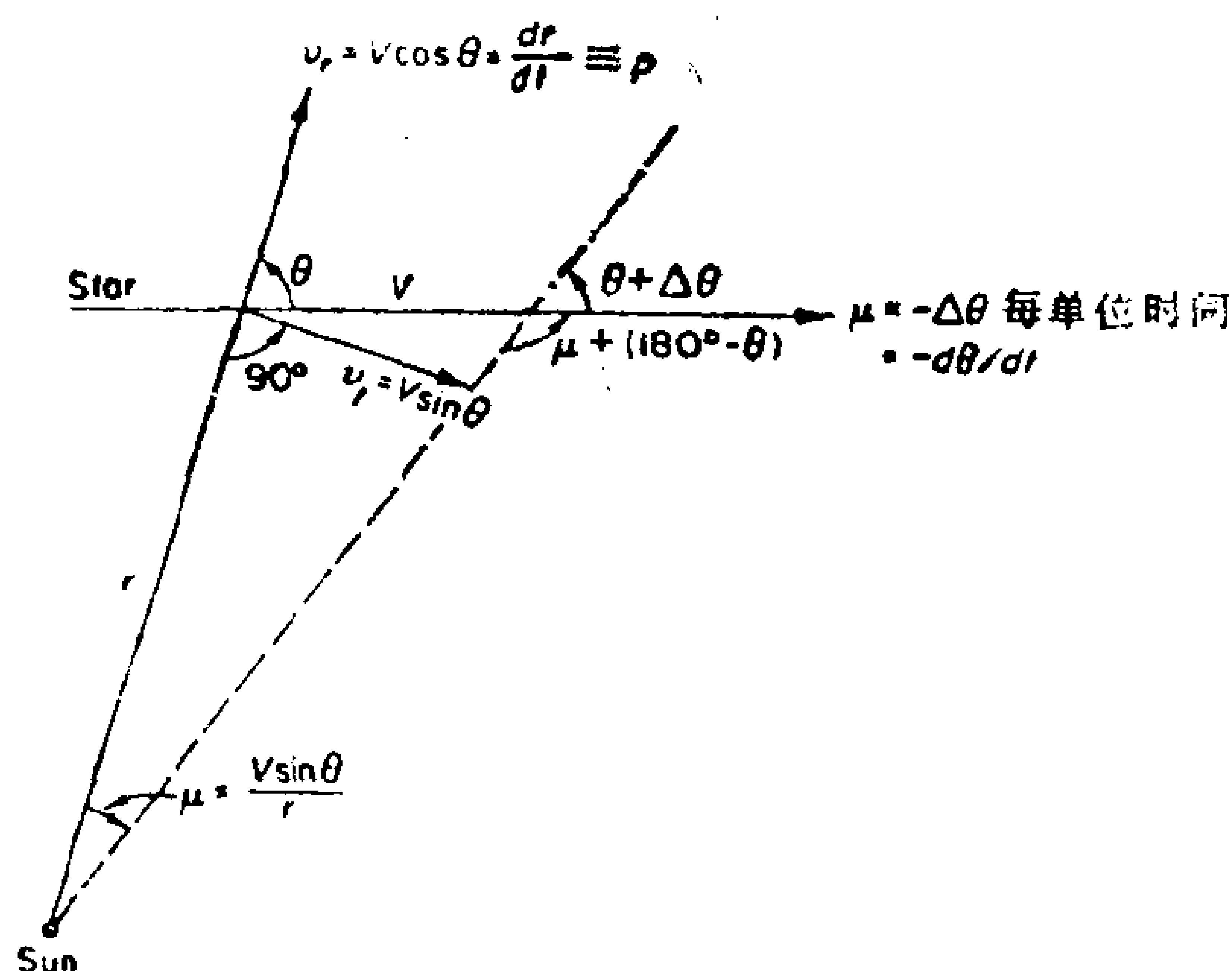


图 56 自行

恒星的位置通常以某特定年份的春分点为参考，但又属于某个不同的历元。这或者意味着在把这一历元观测到的位置归算到选定的春分点时不加任何自行改正，或者意味着这一位置取自某种星表并作了自行改正，所以就自行来说这个位置属于上面所提到的历元，但参考轴则是由选定的春分点所确定的。

与太阳系天体的运动不同，恒星的自行不能通过动力学理论加以计算，它们只能靠观测来求得。为了确定某一颗恒星的自行，需要在一系列不同的时间对这颗恒星的位置进行反复的观测，而一般来说由于自行运动的量值非常之小，要想求得可靠的结果，则前后观测的时间必须相隔很长。

就已有的观测资料可用的时间间隔来说，对空间匀速直线运动的任何偏离是不可能探测出来的。这种运动造成了自行大小、视差和视向速度上的长期变化，但只对少数几个自行特别大的恒星来说，才有比较显著的影响。如果 $V=$ 常数，由于透视加速度

造成的 μ 的变化是

$$\frac{d\mu}{dt}=V\left(-\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{dr}{dt}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{d\theta}{dt}\right)=-2\frac{\mu}{r}\frac{dr}{dt},$$

因此周年自行的年变化率为

$$d\mu/dt=-0.00000205\,\mu\pi(dr/dt),$$

这里 μ 是以弧秒计的年自行，π 为以秒为单位的周年视差，而视向速度 dr/dt 以 km/sec 为单位。

对巴纳德星来说，$\mu=10.31''$，$\pi=0.545''$，视向速度为 -108 km/sec，计算得到的自行周年透视加速度为 $0.00124''\pm0.00003''$。下表给出了它的两个分量❶：

	赤经	赤纬
计算值	$-0.00014''\pm0.00006''$	$+0.00118''\pm0.00004''$
观测值	$-0.00010''\pm0.00001''$	$+0.00123''\pm0.00003''$

由（13）式知自行的赤经、赤纬分量为

$$\mu_\alpha=\mu\sin\varphi\sec\delta,$$

$$\mu_\delta=\mu\cos\varphi,$$

这里 φ 是 μ 方向的位置角，又由（14）式得黄经、黄纬分量为

$$\mu_1=+\mu_\alpha\sin E\cos\delta\sec B+\mu_\delta\cos E\sec B,$$

$$\mu_2=-\mu_\alpha\cos E\cos\delta+\mu_\delta\sin E,$$

式中 B 是黄纬，而

$$\cos E=\sin\varepsilon\cos\alpha\sec B.$$

由关于 dx、dy、dz 的表达式（18）知，因自行引起的方向余弦的变化为

$$\mu_x=-y\mu_\alpha-z\cos\alpha\mu_\delta,$$

$$\mu_y=+x\mu_\alpha-z\sin\alpha\mu_\delta,$$

$$\mu_z=+\cos\delta\mu_\delta.$$

自行 μ 的分量 μ_α、μ_δ 在不同历元的坐标系中显然是不同的，

❶ P. van de Kamp, Astr. Jour. 68, 515-521(1963).

以是因为天球上的参考圈相对于 μ 方向所在的大圆的取向是不同的，同样，随着恒星在天球上各参考圈之间位置的改变，同一坐标系内的自行分量也会发生变化。

设以 t_0 历元赤道和春分点为参考时，某颗恒星的位置为 (α_0, δ_0)，而这颗恒星经过 t 时间间隔后对于同一赤道和春分点的位置为 (α, δ)，那么在由 (α_0, δ_0)、天极以及 (α, δ) 这三个点所构成的三角形（图 57）中有

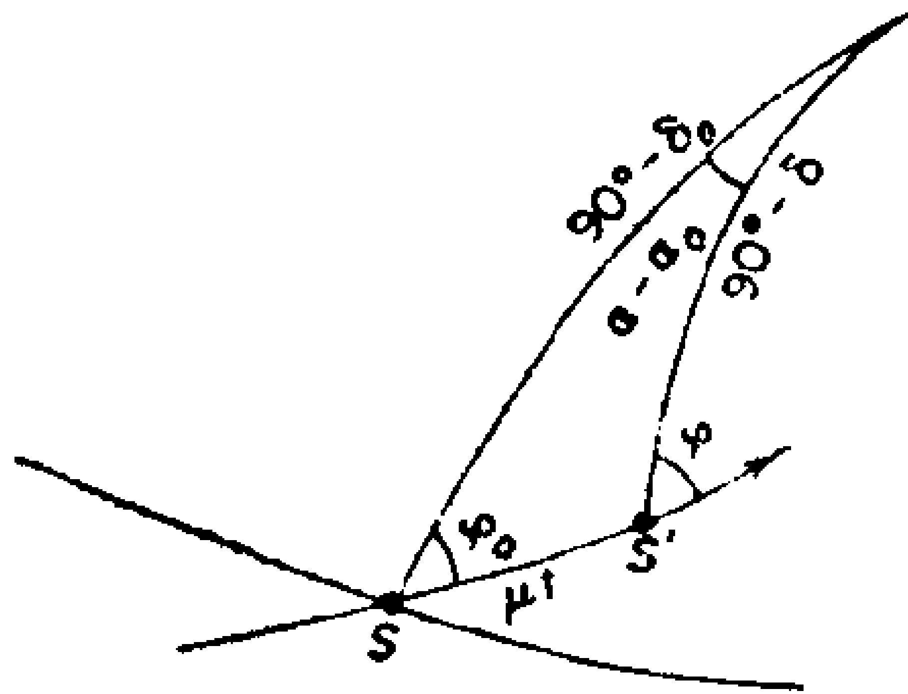


图 57　自行在赤经、赤纬上的变化

$$\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_0)=\sin\varphi_0\sin\mu t,$$

$$\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_0)=\cos\delta_0\cos\mu t-\sin\delta_0\cos\varphi_0\sin\mu t,$$

$$\cos\delta\sin\varphi=\cos\delta_0\sin\varphi_0,$$

$$\cos\delta\cos\varphi=\cos\delta_0\cos\varphi_0\cos\mu t-\sin\delta_0\sin\mu t,$$

$$\sin\delta=\sin\delta_0\cos\mu t+\cos\delta_0\cos\varphi_0\sin ut,$$

这里 φ_0、φ 为两个时间的自行方向的位置角，因此 $\varphi-\varphi_0$ 是因为自行本身引起的位置角的变化。从这些方程式，我们严格地有，

$$\tan(\alpha-\alpha_0)=\frac{\sin\varphi_0\tan\mu t\sec\delta_0}{1-\cos\varphi_0\tan\mu t\tan\delta_0},$$

以及引入辅助量 r、M，

$$r=-\sin\mu t\left(\tan\delta_0+\cos\varphi_0\tan\frac{1}{2}\mu t\right),$$

$$\tan M = \frac{r\sin\varphi_0}{1+r\cos\varphi_0},$$

$$\tan\frac{1}{2}(\delta-\delta_0) = \frac{\cos\left(\varphi_0 - \frac{1}{2}M\right)}{\cos\frac{1}{2}M}\tan\frac{1}{2}\mu t,$$

$$\varphi = \varphi_0 - M.$$

恒星自行是很小的，所以即使对于很长的时间间隔来说，实际上从来不需要这些严格的方程式。充其量说，用马克劳林展开式的前两项就足够了，通过对关系式

$$\cos\delta\sin\varphi = \cos\delta_0\sin\varphi_0 = 常数$$

进行微分有

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}\frac{d\delta}{dt} = \mu\tan\delta\sin\varphi,$$

恒定的自行运动 μ 本身使天体在天球上的位置发生变化，从而又会引起自行的赤经、赤纬分量的变化，由上式得这一变化为

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}(\mu\sin\varphi\sec\delta)$$

$$= \mu\left(\cos\varphi\sec\delta\frac{d\varphi}{dt} + \mu_\delta\sin\varphi\sec\delta\tan\delta\right)$$

$$= 2\mu_\alpha u_\delta\tan\delta,$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = -\mu\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -\mu_\alpha^2\sin\delta\cos\delta,$$

如果用 μ_α、μ_δ 来表示，且以弧秒为单位，我们就有

$$\alpha = \alpha_0 + \mu_\alpha t + (\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta\sin 1'')t^2 + \cdots\cdots$$

$$= \alpha_0 + \left(\mu_\alpha + \frac{1}{2}\frac{d\mu_\alpha}{dt}t\right)t + \cdots\cdots,$$

$$\delta = \delta_0 + \mu_\delta t - \frac{1}{2}(\mu_\alpha^2\sin\delta\cos\delta\sin 1'')t^2 + \cdots\cdots$$

$$=\delta_0+\left(\mu_\delta+\frac{1}{2}\frac{d\mu_\delta}{dt}t\right)t+\cdots\cdots,$$

这里 α、δ 与 α_0、δ_0 都以同样的平春分点和平赤道为参考。

透视长期加速度的附加项

$$\text{对 } d\mu_\alpha/dt \text{ 是} \qquad -2\mu_\alpha\frac{1}{r}\frac{dr}{dt},$$

$$\text{对 } d\mu_\delta/dt \text{ 是} \qquad -2\mu_\delta\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}.$$

从第一、第二和第五个严格三角方程式出发，用近似关系

$$\sin\mu t=\mu t,$$

$$\cos\mu t=1-\frac{1}{2}(\mu t)^2,$$

来表示根据 μ_α、μ_δ和方向余弦所得到的结果，并就 x、y、z 进行解算，我们就得到以 t_0赤道和春分点为参考的二阶表达式为

$$x=x_0+\mu_x t-\frac{1}{2}(\mu t)^2x_0,$$

$$y=y_0+\mu_y t-\frac{1}{2}(\mu t)^2y_0,$$

$$z=z_0+\mu_z t-\frac{1}{2}(\mu t)^2z_0.$$

当透视加速度比较显著时，上式右端应该用间隔 $t-t_0$中点处的自行值。

设对于 t_1历元平春分点和平赤道而言任意时间的自行为 μ_α、μ_δ，而同一时间对于另一个不同历元 t_2的平春分点和平赤道而言的自行为μ'_α、μ'_δ，又设恒星对于 t_1春分点的坐标为(α_1,δ_1)，而对于 t_2春分点的坐标为$(\alpha_2,\ \delta_2)$，则通过对从 $(\alpha_1,\ \delta_1)$ 到 $(\alpha_2,\ \delta_2)$ 的转换关系式进行微分，就可以由 μ_α、μ_δ求得 μ'_α、μ'_δ。令 $d\alpha_2/dt=\mu'_\alpha$，$d\alpha_1/dt=\mu_\alpha$等，可得

$$\mu'_\alpha\cos A'\cos\delta_2-\mu'_\delta\sin A'\sin\delta_2=\mu_\alpha\cos A\cos\delta_1$$

$$-\mu_\delta \sin A \sin\delta_1,$$

$$\mu'_\alpha \sin A' \cos\delta_2 + \mu'_\delta \cos A' \sin\delta_2 = \mu_\alpha \cos\theta \sin A \cos\delta_1 + \mu_\delta \cos\theta \cos A \sin\delta_1 + \mu_\delta \sin\theta \cos\delta_1,$$

这里$A' = \alpha_2 - z$，$A = \alpha_1 - \zeta_0$，由此严格地有

$$\mu'_\alpha = \mu_\alpha(\cos\theta + \sin\theta \tan\delta_2 \cos A') + \frac{\mu_\delta}{\cos\delta_2} \ \frac{\sin A' \sin\theta}{\cos\delta_1},$$

$$\mu'_\delta = -\mu_\alpha \sin A' \sin\theta + \mu_\delta(\cos\theta + \sin\theta \tan\delta_2 \cos A') \frac{\cos\delta_2}{\cos\delta_1},$$

而由恒星和两个天极位置所构成的三角形有

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\theta \sin(\alpha_1 + \zeta_0) \sec\delta_2$$
$$= \sin\theta \sin(\alpha_2 - z) \sec\delta_1.$$

在实际计算中，取这些方程的近似形式就已足够了。例如，取

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\theta \sin\alpha \sec\delta,$$

令$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$，我们有

$$\mu'_\alpha \cos\delta = \mu \sin\varphi_2 = \mu_\alpha \cos\delta \cos\Delta\varphi + \mu_\delta \sin\Delta\varphi,$$
$$\mu'_\delta = \mu_\delta \cos\Delta\varphi - \mu_\alpha \cos\delta \sin\Delta\varphi.$$

从上面关于$\sin\Delta\varphi$的近似表达式，我们很精确地有

$$\Delta\varphi = \theta \sin\alpha \sec\delta,$$

或者，因为在第一个天极位置处θ为零，而它在任一瞬间的变化率就是天极向♈运动的速率n，

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \sin\alpha \sec\delta = n \sin\alpha \sec\delta,$$

由此得到因天极的运动所引起的自行变化率为

$$\frac{d\mu_\alpha}{dt} = \mu \cos\varphi \sec\delta \frac{d\varphi}{dt} + \mu \sin\varphi \sec\delta \tan\delta \frac{d\delta}{dt}$$
$$= n(\mu_\alpha \cos\alpha \tan\delta + \mu_\delta \sin\alpha \sec^2\delta),$$

$$\frac{d\mu_\delta}{dt} = -\mu \sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} = -n\,\mu_\alpha \sin\alpha.$$

恒星平位置的归算

恒星对于任意历元和任意春分点的平位置，可以通过以下两种方法之一归算到任意别的历元和春分点，这两种方法的效果是等价的：

（1）从初始历元t_1的位置出发，第一步可以先求得对于同一平春分点和平赤道的、任意别的历元t_2时的位置，这需要对t_1时的坐标(α_0，δ_0)加上t_2-t_1期间的自行$\Delta\alpha$、$\Delta\delta$，它们则是由t_1时刻与α_0、δ_0属于同一坐标系的μ值的两个分量μ_α、μ_δ计算而得的，但是如果必要的话同时要考虑因自行本身引起的μ_α、μ_δ的变化所带来的二阶项。作为t_1历元赤经、赤纬方向位置及自行的参考系的春分点和赤道，同时也就是t_2历元的位置$\alpha_1=\alpha_0+\Delta\alpha$和$\delta_1=\delta_0+\Delta\delta$所在的参考系，这个参考系无需一定取同一个历元$t_1$，它可以取为某个不同的历元$T_1$。然后，利用常用的赤道坐标转换公式，就可以把对于$t_2$历元和$T_1$春分点的坐标($\alpha_1$,$\delta_1$)归算到任意别的历元$T_2$(后者可以是同一个$t_2$，也可以不是$t_2$)，从而给出对于$t_2$历元和$T_2$春分点的坐标($\alpha_2$，$\delta_2$)。而且如果需要的话，也可以求得$t_2$时刻对于$T_2$春分点和赤道的自行$\mu'_\alpha$、$\mu'_\delta$，这时首先要对$\mu_\alpha$、$\mu_\delta$加上$t_2-t_1$期间由自行本身所引起的自行变化改正，然后对$t_2$时刻的自行值进一步加上由$T_1$到$T_2$的参考系变化所引起的改正量。

（2）首先可以把t_1历元、T_1春分点的坐标（α_0，δ_0）归算到T_2的春分点和赤道，而t_1时的自行μ_α、μ_δ同样也归算到T_2春分点。然后利用这些经归算所得的自行值，便可以计算（t_2-t_1）期间在T_2参考系中的坐标变化，必要时把二阶项也包括在内，这样就给出t_2历元、T_2春分点的坐标(α_2、δ_2)。

当恒星离开天极足够近时，椭圆光行差的变化就变得很显著，这时必须计算出t_1时椭圆光行差的数值，并在t_1平位置中扣去这个量，接着，在把这个改正了的平位置归算到时刻t_2之后，应计算出t_2时的椭圆光行差，并加到求得的结果上去。但

是，仅仅对于拱极星才需要应用这种严格的方法（对这些恒星要考虑到很长时期内的岁差效应），特别在编制基本星表或自行研究工作中要用到平位置时尤其是如此。在FK_3和FK_4编制工作中这种方法仅仅用于赤纬大于81°的恒星。对于赤纬较低的那些恒星来说，误差的主要部分已自然包括在自行之中，这时用严格方法把星表平位置归算到别的历元就反而是不正确的❶。

为了使这些归算工作简化起见，星表中通常列出因岁差和自行所引起的坐标变化率以及这些变化的改变速率。因总岁差和自行所造成的赤经周年变化称为赤经**年变**，对于赤纬则有赤纬年变。年变的变化率称为**长期变化**。它是年岁差变化率和年自行变化率之和，其中前者是由于m、n、α、δ的变化引起的，而后者则是由岁差以及自行本身引起的。长期变化是坐标对时间的二阶导数，它与年变或者说一阶导数一起将足以使归算工作达到马克劳林展开式头两项所给出的精度。当精度要求更高时，可以确定三阶导数，但是三阶项的严格形式极其复杂，因而不能付诸实用，而一般说来如果粗略的近似式不够用，那么这时利用三角公式进行归算要比计算这些变化更为简捷。当极距很小时，则必须采用三角归算的方法，其具体情况与所需要的精度有关。

把自行加在表示岁差变率的表达式（149）上，并且对它进行微分，其中对自行取导数时要把由于自行本身以及天极运动这两方面因素所引起的变化包括在内，这样我们就得到了年变及其长期变化率

$$\frac{d\alpha}{dt}=m+n\sin\alpha\tan\delta+\mu_\alpha,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\frac{dm}{dt}+\sin\alpha\tan\delta\frac{dn}{dt}$$

❶ 参见：F.P.Scott, A method for evaluating the elliptic E terms of the aberration. Astr. Jour. 69, 372—373(1964).

$$+n\cos\alpha\tan\delta\left(\frac{d\alpha}{dt}+\mu_\alpha\right)$$

$$+n\sin\alpha\sec^2\delta\left(\frac{d\alpha}{dt}+\mu_\delta\right)+2\mu_\alpha\mu_\delta\tan\delta,$$

$$\frac{d\delta}{dt}=n\cos\alpha+\mu_\delta,$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}=\cos\alpha\frac{dn}{dt}-n\sin\alpha\left(\frac{d\alpha}{dt}+\mu_\alpha\right)$$

$$-\mu_\alpha^2\sin\delta\cos\delta,$$

式中可以把m、n、dm/dt、dn/dt的数值代进去。在二阶导数中我们可以取

$$\sin\alpha\tan\delta=\frac{1}{n}\left(\frac{d\alpha}{dt}-\mu_\alpha-m\right),$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{n}\left(\frac{d\delta}{dt}-\mu_\delta\right).$$

在少数情况下由于投影效应自行的长期变化很为可观，这时也可以把这部分变化包括在二阶导数之中。

如果精确到二阶项，那么只要确定任意时间间隔t_2-t_1的中点$t=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$处的变化值，再把这个数值乘上t_2-t_1，这样便可以求得该间隔t_2-t_1的归算值，因为保留到这一阶时

$$f(t_1)=f(t)-\left(\frac{df}{dt}\right)_t(t-t_1)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_t(t-t_1)^2,$$

$$f(t_2)=f(t)+\left(\frac{df}{dt}\right)_t(t_2-t)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)_t(t_2-t)^2,$$

由此，又因为$t-t_1=t_2-t=\frac{1}{2}(t_2-t_1)$，便得

$$f(t_2)=f(t_1)+(t_2-t_1)\left(\frac{df}{dt}\right)_{\frac{1}{2}(t_1+t_2)},$$

对这个问题来说，所需要的只是t时α、δ的近似值，这可以从t_1时的α、δ值以及t时的m、n值来求得。

以前，星表的实际计算工作中普遍采用的方法就是给出**年变**（或者如果自行未知或略去不计时，即为年岁差）以及这些量的**长期变化**（也就是年变的每**世纪**变化率）。后来，许多星表又给出了不同的量，为了不致发生混淆起见，就需要在星表中每一页的底部给出有关的公式，以说明如何利用这些特定的量把星表位置归算到别的历元去，这也就是国际天文学联合会所建议的做法。

如果年变及其长期变化都以同一时间单位给出，则关于归算公式的前两项的表达式是

$$\alpha-\alpha_0=T\frac{d\alpha}{dT}+\frac{1}{2}T^2\frac{d^2\alpha}{dT^2}$$

$$=T\left(\frac{d\alpha}{dT}+\frac{1}{2}T\frac{d^2\alpha}{dT^2}\right),$$

对δ也有类似的表达式，这里间隔T以所给出的年变$d\alpha/dT$及其长期变化$d^2\alpha/dT^2$的时间单位为单位。如果给出的是**年变**以及它们的每**世纪**变化，就有

$$\alpha-\alpha_0=t\frac{d\alpha}{dt}+\frac{1}{200}t^2\times\text{长期变化},$$

这里t以年为单位。不管哪一种情况，把中点历元处的年变乘以所经历的时间，就可以给出所要的结果。

现有的星表通常包括长期变化之半这个因子，并且在表内名为**二阶项**这一栏内列出。

对三阶导数来说，不同星表所采用的近似表达式各不相同。求近似值的一种常用的方法是对两个历元的二阶导数取其差值。例如，艾克尔伯格所用的近似公式为●：

$$d^3/dT^3=2[(d^2/dT^2)_{1950}-(d^2/dT^2)_{1900}],$$

而在他的星表中列出的三阶项就是上列数值的六分之一。为了从初始历元 t_0 归算到任意一个终端历元 t_1，纽康主张采用这样的方法：对换历元后所得到两个马克劳林级数，取它们的半和，并且把 $d^2\alpha_1/dt^2-d^2\alpha_0/dt^2=t(d^3\alpha/dt^3)$ 代入其中，这样就给出

$$\alpha_1-\alpha_0=\frac{1}{2}t\left(\frac{d\alpha_0}{dt}+\frac{d\alpha_1}{dt}\right)-\frac{t^2}{12}\left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}-\frac{d^2\alpha_0}{dt^2}\right).$$

奥韦斯在把布拉德雷的恒星位置从 1755 年归算到 1865 年的工作中，计算了初始历元、终端历元以及该两历元中点处 t_1 时的岁差值 p，并用 $\alpha_2-\alpha_1=\frac{t}{6}(p_0+4p_1+p_2)$ 作为总的归算量●。

从平位置到视位置的归算

在把恒星位置从平位置归算为视位置的过程中，计算时所取的历元是贝塞尔太阳年的岁首。在过去，为了确定一年内任意日期的视位置，就要计算对于该日期所在的那一年岁首平位置的归算值。但是，对下一年的岁首平位置加上某个归算值同样可以求得日期视位置，其结果是等价的，而为了尽可能减少二阶效应，从 1960 年起的具体做法是计算从靠近这一日期的那一个岁首起的归算值。由于所计算的是从**最接近**任意某个日期的那个岁首起

● W.Eichelberger, Astr.Pap.Amer. Eph.X, Pt.I.

● 关于由岁差和自行引起的三阶导数的严格表达式可参见 G.W.Hill, "Collected Works", Vol.I, pp.60 and 62.

到该日期为止的归算值（这就是说，当该日期落在任一年的后半年时就从下一年岁首起进行归算），这个归算值所涉及的时间段就决不会超过±0.5^{y}，而不是从历元起归算时最大可达一整年。

当准确到一阶项时，从岁首起到日期为止的岁差归算、该日期的章动以及光行差的归算，这三者是彼此独立无关的。它们可以从历元平坐标起，或者从该日期的视坐标起分别地加以计算，然后再相加。归算值带上适当的代数符号之后，或者可以加在平位置上从而得到视位置，或者也可以加在视位置上从而得到平位置。精确到高阶项的归算工作要牵涉到岁差、章动和光行差的联合效应，这时情况就要复杂得多。

光行差是**恒星对于它的真几何方向的视位移**，这是由于地球相对于某个**惯性**参考系的运动而引起的。因此，在考虑光行差改正时，决定天球上恒星坐标位置的基本坐标方向，必须同计算光行差时决定地球坐标位置的坐标方向**相同**，而光行差必须根据地球对于惯性坐标系的相对速度来加以计算。为此，在实际计算中所用的坐标系的原点取为太阳系的质心，而坐标轴在空间的方向是固定不动的。

恒星坐标的岁差和章动是由**坐标系的运动**引起的。在实际天文计算工作中，所用的章动计算公式中的量是对瞬时平春分点而言的；而所求得的恒星坐标的变化显然就是对于以**瞬时平春分点和平赤道**为参考的坐标位置的改正数。因此，在考虑章动改正之前，天球上的瞬时位置**首先**必须是对于瞬时平春分点的位置，这就需要把岁差加在对于历元平春分点的坐标值上，而章动则必须根据这些瞬时平坐标来进行计算。

但是，需加章动改正的瞬时位置可以是对于瞬时平春分点的**几何**位置，也可以是**视**位置。由于参考圈运动所引起的坐标变化同光行差造成的恒星位移是无关的。光行差可以加在岁差和章动之后，也可以在它们之前先加，但是对于阶数较高的归算来说，

这两种方法所得到的具体数值是不同的，因而要用不同的代数表达式来加以表示。

把任意瞬间对于瞬时平春分点和平赤道的几何位置或视位置的坐标归算到真春分点和真赤道，这一步工作可以计算到任意所需要的精确度，这里又有两种方法：一种是利用章动的严格三角表达式，另一种是用有足够项数的泰勒展开式。视位置是由几何位置坐标来求得的，这里或者是严格地用光行差的三角表达式（79）和(80)，或者只是利用（77）式求到所需要的精确度，其中的光行差必须根据地球的速度分量来加以确定，而且计算地球速度分量和确定恒星几何坐标时所用的应该是同样的春分点和赤道。仅仅对于非常靠近天极的天体才必须用严格的三角归算。

当视差较大时可以把它同光行差联合起来一并考虑。视差改正可以写为以下的形式

$$\Delta\alpha=\pi(cY-dX),\qquad \Delta\delta=\pi(c'Y-d'X),$$

其中太阳的坐标X和Y基本上与C和D成正比。因此，只要用表达式$c+d\pi k_1$、$d-c\pi k_2$、$c'+d'\pi k_1$、$d'-c'\pi k_2$分别代替恒星常数c、d、c'、d'，视差改正就可以同$Cc+Dd$和$Cc'+Dd'$这两项合并，其中

$$k_1=R/(k\cos\varepsilon),\qquad k_2=R\cos\varepsilon/k,$$

这里R是太阳的半径矢量，ε是黄赤交角，而k是光行差常数。如果R的平均值取为1，则其偏离平均值的最大变化为1/60，一般情况下可以忽略不计。

利用方向余弦，由第四章中关于恒星地心直角坐标（x', y', z'）和日心坐标（x, y, z）之差的表达式以及（74）式，我们就有以下足够精确的近似公式

$$x'=x-\pi\frac{C}{k}\sec\varepsilon,$$

$$y'=y-\pi\frac{D}{k}\cos\varepsilon,$$

$$z' = z - \pi \frac{E}{k} \sin \varepsilon.$$

不论是光行差还是周年视差所引起的恒星在天球上的位移，都会使恒星在一年内绕着它的平位置描绘出一个椭圆。在相对于平位置的直角坐标中，恒星的位置是

$$x = -k\cos(\lambda - \odot) - \pi\sin(\lambda - \odot),$$

$$y = +k\sin(\lambda - \odot)\sin\beta - \pi\cos(\lambda - \odot)\sin\beta,$$

或者，根据下式所定义的辅助量p、q

$$k = p\cos q, \quad \pi = p\sin q,$$

其坐标即为

$$x = -p\cos(\lambda - \odot - q),$$

$$y = +p\sin(\lambda - \odot - q)\sin\beta,$$

由此可知半长轴为$\sqrt{k^2+\pi^2}$，半短轴为$\sin\beta\sqrt{k^2+\pi^2}$。要是又有很大的自行迭加在一起，那么恒星在天球上的轨迹就是一条波形曲线。当太阳黄经等于恒星黄经和比恒星黄经大180°时，黄经光行差出现极大和极小；当太阳黄经与恒星黄经差90°时，黄纬光行差为极大或极小。视差在黄经和黄纬方向上的极大和极小值出现在光行差极值之后90°的地方●。

视位置的二阶归算

贝塞尔日数和独立日数是由一些量的级数展开式的一阶项所确定的这些量严格地代表了瞬时运动黄道和运动赤道对于历元固定黄道和固定赤道的相对位置。要是在这些展开式中保留二阶项，那么从贝塞尔日数和独立日数所得到的对于视位置的一阶归算就可以扩展到二阶。

为了这个目的，我们可以把任意日期τ时对于岁差和章动的日数精确地定义为：

● 有关适合于电子计算机按直角坐标来计算视位置归算的方法见 F.P.Scott and I.A.Hughes, Compntation of apparent places for the Southern Reference Star Program. Astr.Jour.69, 368—371(1964).

$$A = n\left(\tau + \frac{\Delta\Psi}{\Psi'}\right),\quad f = \frac{m}{n}A + E,$$

$$B = -\Delta\varepsilon,\qquad g\sin G = B, \tag{162}$$

$$E = \lambda'\frac{\Delta\Psi}{\Psi'},\qquad g\cos G = A,$$

式中 τ 表示从贝塞尔太阳年岁首起到该日期的长度，以回归年为单位；$\Delta\Psi$ 为瞬时黄道上的黄经章动，而 $\Delta\varepsilon$ 为瞬时交角章动；Ψ' 是**瞬时固定黄道**上的**日月**岁差的年变化率 $d\Psi_1/dt$，而 λ' 是该日期的行星岁差的年变化率 da/dt。该日期的赤经、赤纬总岁差的年变化率为

$$m = \Psi'\cos\varepsilon - \lambda',$$
$$n = \Psi'\sin\varepsilon,$$

这里 ε 表示瞬时平黄赤交角；瞬时真黄赤交角为 $\varepsilon + \Delta\varepsilon$。

设

$$A' = A - n\tau = n\Delta\Psi/\Psi' = \Delta\Psi\sin\varepsilon,$$

由这些定义我们有

$$E = \lambda'\frac{A'}{n} = \Delta\Psi\left(\cos\varepsilon - \frac{m}{n}\sin\varepsilon\right),$$

$$\begin{aligned}
\Delta\Psi\sin\varepsilon &= A' \\
&= g\cos G - n\tau, \\
\Psi\cos\varepsilon &= (m/n)A' + E \\
&= f - m\tau, \\
\Delta\varepsilon &= -g\sin G.
\end{aligned}$$

该日期的黄经总岁差的变化率为

$$\Psi' - \lambda'\cos\varepsilon = m\cos\varepsilon + n\sin\varepsilon.$$

设对于任意特定的**固定**春分点和**固定**赤道的地球的**质心赤道**直角速度分量为 $\dot{x}^0$、$\dot{y}^0$、$\dot{z}^0$，顾及

$$\dot{z}^0 = \dot{y}^0 \tan \varepsilon^0,$$

并且在 $\dot{x}^0$ 和 $\dot{y}^0$ 中**除去椭圆分量**，则有关光行差的日数由下式确定

$$\begin{aligned} -(1/c)\,\dot{x}^0 &= D^0 &&= h^0 \cos H^0, \\ +(1/c)\,\dot{y}^0 &= C^0 &&= h^0 \sin H^0, \qquad (163) \\ +(1/c)\,\dot{z}^0 &= C^0 \tan \varepsilon^0 = i^0, \end{aligned}$$

这里 c 是光速。根据对于计算速度分量时所用的**相同的**固定春分点和固定赤道的**几何**赤经、赤纬，由（77）式便给出了对于几何方向的二阶视位移。

光行差**仅仅**与地球对于某个惯性坐标系的**相对速度**有关，而在实际计算中所用的是地球的质心速度。在天球上所看到的恒星的实际方向同确定恒星视位置的坐标系无关。原则上说，为了获得对于瞬时真春分点和真赤道的视位置，可以有两条途径：（1）首先确定对于这个春分点和赤道的几何坐标，然后在同一参考系内确定因光行差而产生了视位移后的恒星坐标；（2）首先求出对于岁首平春分点和平赤道的视位置，然后再求出由于坐标系的岁差、章动所产生的该点的坐标变化；两种方法是等价的。但是，在实际数值计算中，这两种方法解决问题的速度是不同的。

岁首平位置是由对于历元 $\tau=0$ 时的平春分点和平赤道的几何位置的坐标 α_0、δ_0 来表示的。在这一历元时刻，相对于岁首固定黄道和平赤道的黄经日月岁差 Ψ_1、交角日月岁差 $\Delta\varepsilon^0$ 以及行星岁差 a 全都为零。在这一历元时的平黄赤交角用 ε_0 来表示，而赤经、赤纬的年岁差值用 m_0、n_0 来表示。

（1）**首先把岁差和章动加在**岁首平位置 α_0、δ_0 上，这样我们就得到了对于瞬时真春分点和真赤道的**几何**位置 α、δ，（161）式所表示的就是精确到二阶项时的这一坐标值。然后，将此 α、δ 值代入（77）式右端的赤经、赤纬中，而星数则采用从对于**瞬时固定真**春分点和**真**赤道的质心速度分量所算得的值，

这样就得到了对于瞬时真春分点和真赤道的、精确到二阶的视位置坐标 α'、δ'。

我们可以按下面的一阶泰勒展开式把关于 α' 和 δ' 的表达式写为精确到二阶的 α_0 和 δ_0 的显函数

$$\alpha' = \alpha'(\alpha_0, \delta_0) + \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\alpha}\right)_0 (\alpha - \alpha_0) + \left(\frac{\partial\alpha'}{\partial\delta}\right)_0 (\delta - \delta_0),$$

对 δ' 也有类似的展开式，其中

$$\begin{aligned}
\partial\alpha'/\partial\alpha &= \quad 1 + h\cos(H+\alpha)\sec\delta,\\
\partial\alpha'/\partial\delta &= +h\sin(H+\alpha)\sec\delta\tan\delta,\\
\partial\delta'/\partial\alpha &= -h\sin(H+\alpha)\sin\delta,\\
\partial\delta'/\partial\delta &= \quad 1 + h\cos(H+\alpha)\cos\delta - i\sin\delta;
\end{aligned}$$

最后的表达式是

$$\begin{aligned}
\alpha' = \alpha_0 &+ f + g\sin(G+\alpha_0)\tan\delta_0\\
&+ h\sin(H+\alpha_0)\sec\delta_0\\
&+ \frac{1}{2}g^2\sin(2G+\alpha_0)\cos\alpha_0\\
&+ fg\cos(G+\alpha_0)\tan\delta_0\\
&- \frac{1}{2}fg\cos G\cos\alpha_0\tan\delta_0\\
&+ \frac{1}{2}g^2\sin 2(G+\alpha_0)\tan^2\delta_0\\
&+ \frac{1}{2}h^2\sin 2(H+\alpha_0)\sec^2\delta_0\\
&+ gh\sin(G+H+2\alpha_0)\sec\delta_0\tan\delta_0\\
&+ fh\cos(H+\alpha_0)\sec\delta_0, \qquad (164)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta' = \delta_0 &+ g\cos(G+\alpha_0) + h\cos(H+\alpha_0)\sin\delta_0\\
&+ i\cos\delta_0 - fg\sin(G+\alpha_0)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}fg\cos G\sin\alpha_0$$

$$-\frac{1}{2}g^2\sin^2(G+\alpha_0)\tan\delta_0$$

$$+ih\cos(H+\alpha_0)\cos 2\delta_0-\frac{1}{2}i^2\sin 2\delta_0$$

$$+\frac{1}{2}h^2\cos^2(H+\alpha_0)\sin 2\delta_0$$

$$-\frac{1}{2}h^2\sin^2(H+\alpha_0)\tan\delta_0$$

$$-gh\sin(H+\alpha_0)\sin(G+\alpha_0)\sec\delta_0$$

$$-fh\sin(H+\alpha_0)\sin\delta_0-ig\cos(G+\alpha_0)\sin\delta_0$$

$$+gh\cos(G-H)\cos\delta_0,$$

式中 i 、 h 、H表示从对于**瞬时固定真**春分点和**真**赤道的质心速度分量所算得的值。

（2）**首先把光行差直接加在**岁首平位置坐标 α_0、δ_0 上，这样我们就得到了对于**岁首平**春分点和**平**赤道的**视**位置坐标 α_0'、δ_0'，为了把 α_0'、δ_0' 表示到二阶项，要用 α_0、δ_0 作为（77）式右端的赤经、赤纬值，并且要从**岁首固定平春分点和平赤道**的质心速度分量来确定星数。然后，用 α_0'、δ_0' 作为表示岁差、章动的（161）式的右端的赤经、赤纬值，这样就得到了对于瞬时真春分点和真赤道的精确到二阶的视位置坐标 α'、δ'。

我们可以根据下面的一阶泰勒级数展开式把有关 α' 和 δ' 的表达式写为精确到二阶的 α_0 和 δ_0 的显函数：

$$\begin{aligned}\alpha'&=\alpha(\alpha_0',\ \delta_0')\\&=\alpha[\alpha_0+(\alpha_0'-\alpha_0),\ \delta_0+(\delta_0'-\delta_0)]\\&=\alpha(\alpha_0,\ \delta_0)+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha_0}\right)(\alpha'-\alpha_0)\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial\delta}{\partial\delta_0}\right)(\delta_0'-\delta_0),$$

对于 δ' 也有类似的表达式，其中

$$\partial\alpha/\partial\alpha_0 = \quad 1+g\cos(G+\alpha_0)\tan\delta_0,$$

$$\partial\alpha/\partial\delta_0 = +g\sin(G+\alpha_0)\sec^2\delta_0,$$

$$\partial\delta/\partial\alpha_0 = -g\sin(G+\alpha_0),$$

$$\partial\delta/\partial\delta_0 = 1.$$

在最后得到的表达式中，i、h、H所表示的是从对于岁首固定平春分点和平赤道的质心速度分量算得的光行差日数，而不是前面一种方法中的对于瞬时真春分点和真赤道的日数。另外，有关 α' 的表达式同第一种方法所得到的表达式之间的差异仅仅在于没有最后一项 $+fh\cos(H+\alpha_0)\sec\delta_0$，而代之以第一种方法所没有得到的一项 $+ig\sin(G+\alpha_0)\sec\delta_0$。在有关 δ' 的表达式中的差异仅仅在于没有第一种方法所给出的最后三项

$$-fh\sin(H+\alpha_0)\sin\delta_0-ig\cos(G+\alpha_0)\sin\delta_0$$
$$+gh\cos(G-H)\cos\delta_0.$$

无论哪一种方法，其中关于岁差和章动的日数 f、g、G和A、B、E都是对于瞬时平春分点而言的，严格说来m和n所对应的时间是 $t_0+\frac{1}{2}\tau$。在仅仅精确到二阶的归算工作中，实际上二阶项中用 α_0、δ_0 或 α、δ 是无关紧要的。

如果先加光行差改正，由于 $A=n(\tau+\Delta\Psi/\Psi')$，则用贝塞尔日数所表示的归算量为

$$(\alpha'-\alpha_0)\cos\delta_0=(Aa+Bb+Cc+Dd+E)\cos\delta_0$$

$$+\frac{1}{2}AB\cos\delta$$

$$+\sin\alpha\left(AC\tan\varepsilon-\frac{m}{n}AB\sin\delta\right)$$

$$+\cos\alpha\left(BC\tan\varepsilon+\frac{1}{2}\quad\frac{m}{n}A^2\sin\delta\right)$$

$$+\sin 2\alpha\left[\frac{1}{2}\ (A^2-B^2)\cos\delta\left(\frac{1}{2}+\ \tan^2\delta\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(C^2-D^2)\sec\delta+(AD-BC)\tan\delta\right]$$

$$+\cos 2\alpha\left[AB\cos\ \delta\left(\frac{1}{2}\ +\tan^2\delta\right)\right.$$

$$\left.+\ CD\sec\delta+(AC+BD)\tan\ \delta\right]$$

$$+E\sin\delta\left(\frac{1}{2}\quad A\cos\alpha-B\sin\alpha\right),\qquad(165)$$

$$(\delta'-\delta_0)=Aa'+Bb'+Cc'+Dd'$$

$$+\frac{1}{4}(C^2+D^2)(\sin 2\delta-\tan\delta)$$

$$-\frac{1}{2}C^2\tan^2\varepsilon\sin 2\delta-\frac{1}{2}(AD+BC)\sec\delta$$

$$-\frac{1}{4}(A^2+B^2)\tan\delta-\sin\alpha\left(\frac{1}{2}\quad\frac{m}{n}A^2\right.$$

$$\left.+C^2\tan\varepsilon\cos 2\delta\right)-\cos\alpha\left(\frac{m}{n}AB\right.$$

$$\left.-\ CD\tan\varepsilon\cos 2\delta\right)-\sin 2\alpha\left[\frac{1}{2}AB\tan\delta\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\ (AC+BD)\sec\delta+\frac{1}{2}CD(\tan\delta+\sin 2\delta)\right]$$

$$+\cos 2\alpha\left[\frac{1}{4}(A^2-B^2)\tan\delta-\frac{1}{4}(C^2-D^2)\right.$$

$$\cdot(\tan\delta+\sin 2\delta)+\frac{1}{2}(AD-BC)\sec\delta\Big]$$

$$-E\left(\frac{1}{2}A\sin\alpha+B\cos\alpha\right).$$

要是把归算公式（164）化为贝塞尔日数，与上式相比，则赤经中少一项 $C\tan\varepsilon(A\sin\alpha+B\cos\alpha)$，而代之以

$$\left(\frac{m}{n}A+E\right)(D\cos\alpha-C\sin\alpha),$$

在赤纬上代替 $-\frac{1}{2}(AD+BC)\sec\delta$ 这一项的是在归算公式（164）中包含有以下诸项

$$\frac{1}{2}(AD+BC)\sec\delta\cos 2\delta$$

$$+C\tan\varepsilon\sin\delta(B\sin\alpha-A\cos\alpha)$$

$$-\left(\frac{m}{n}A+E\right)\sin\delta(D\sin\alpha+C\cos\alpha).$$

在（164）式所表示的方法中是先作岁差、章动归算，后加光行差改正，这种方法也许看来比较合乎常理，而且代表了传统上的概念。但是，对于高精度恒星视位置的实际计算工作来说，先加光行差归算的方法（165）式有着更多的优点。二阶归算量比较小，因而可予忽略不计的赤纬范围就比较大。还有，从最接近的岁首平位置出发来计算视位置，这样就把归算的间隔限制在 $-\frac{1}{2}<\tau<\frac{1}{2}$，因而二阶归算所能达到的极大值就可以保持小于用 $0<\tau<1$ 进行计算时所得到的值；而如果在归算中先加的是光行差改正，那么在需要进行二阶归算时通常可以仅仅限于计算主项。

高赤纬天区的二阶归算量是很可观的，这时在二阶项中可以用 $\pm\tan\delta_0$ 来代替 $\sec\delta_0$，其符号依赤纬的正、负而定。引入这

一近似关系之后，$\alpha'-\alpha_0$ 中的二阶主项便具有公共因子 $\tan^2\delta_0$，在 $\delta'-\delta_0$ 中则有公共因子 $\tan\delta_0$。如果在赤经归算中 $\tan^2\delta_0$ 的系数用 J 表示，而赤纬归算中的 $\tan\delta_0$ 的系数用 J' 表示，则这些项可以写为

$$J\tan^2\delta_0=\frac{1}{2}\tan^2\delta_0[g^2\sin 2(G+\alpha_0)$$
$$\pm 2gh\sin(G+H+2\alpha_0)$$
$$+h^2\sin 2(H+\alpha_0)], \qquad (166)$$
$$J'\tan\delta_0=-\frac{1}{2}\tan\delta_0[g^2\sin^2(G+\alpha_0)$$
$$\pm 2gh\sin(G+\alpha_0)\sin(H+\alpha_0)$$
$$+h^2\sin^2(H+\alpha_0)].$$

要是 τ 限制在 $-\frac{1}{2}<\tau<\frac{1}{2}$，而且归算最接近岁首的平位置时首先考虑光行差改正，则把（166）式的改正量加在一阶归算量上之后，所得到的视位置的最大残余二阶误差，对任何赤纬来说在 $\Delta\alpha\cos\delta$ 或 $\Delta\delta$ 上都不可能超过 0.003″ 左右。在这一精度范围内，当 $\tau\tan\delta<100$ 时，岁差和章动的三阶项可以忽略不计。

这一归算方法使高精度的恒星视位置计算工作得以大大简化，因此从 1960 年起在天文年历中便采用这一方法。包括（162）式所定义的 A 在内的日数是对最接近的岁首而言的，它们只能适用于 $-\frac{1}{2}<\tau<\frac{1}{2}$。根据地球对于最接近岁首的平春分点和平赤道所确定的坐标系的相对速度来计算 C 和 D，其效果相当于先对该历元平位置加上光行差改正。由（166）式所确定的系数 J 和 J' 称为**二阶日数**，我们可以用日期和赤经为引数，以一种非常简便的表格来给出每一年的这两个系数值的历表。视坐标是由最接近岁首的平位置按以下公式求得的：

$$\alpha=\alpha_0+\tau\mu_\alpha+Aa+Bb+Cc+Dd+E+J\tan^2\delta,$$
$$\delta=\delta_0+\tau\mu_\delta+Aa'+Bb'+Cc'+Dd'+J'\tan\delta.$$

在$-60°<\delta<+60°$范围内，略去全部二阶归算量时在$\Delta\alpha\cos\delta$和$\Delta\delta$上所产生的最大误差不会超过0.008″，当赤纬为±81°时才仅仅增加到0.020″。而且，仅仅在Ω、α和τ的有限范围内才会出现这样的极大误差。因此，视位置的星历表可以用标准的一阶公式来进行计算，同时再附以一份J和J'的历表，而不论哪项工作在一旦需要时，就可以根据这个表很容易地求得具有足够精度的二阶改正。

当有关岁差、章动和光行差的二阶或高阶归算是根据任何用日数表达的一些公式来进行计算时，这些公式的结构和应用必须同计算这些日数的具体数值时所用的方法取得一致。为了采用1960年引入天文年历的日数，必须按（1）光行差，（2）岁差，（3）章动这样的次序，把有关的各个归算量的公式依次加在最接近岁首的平位置上，这同导出（165）式的情况是一样的。

对于任意历元t_0的春分点和赤道的光行差日数，可以归算到另一个历元t的春分点和赤道，为此只要加上沿这两个不同参考系坐标轴方向的地球质心速度分量之差的改正量。有关地球坐标换算的归算量是

$$\begin{aligned}\Delta x&=-\Delta X\\&=+Y\sec\varepsilon_0(p+\Delta\Psi),\\ \Delta y&=-\Delta Y\\&=-X\cos\varepsilon_0(p+\Delta\Psi)+Y\tan\varepsilon_0\Delta\varepsilon,\end{aligned}$$

式中ε_0是t_0时的黄赤交角，$p=(m\cos\varepsilon_0+n\sin\varepsilon_0)(t-t_0)$是$t-t_0$期间的黄经总岁差量，而$\Delta\Psi$和$\Delta\varepsilon$代表从$t_0$到$t_1$的章动的变化，对上式进行微分后给出

$$\Delta\dot{x}_0=+\dot{Y}\sec\varepsilon_0(p+\Delta\Psi),$$
$$\Delta\dot{y}_0=-\dot{X}\cos\varepsilon_0(p+\Delta\Psi)+\dot{Y}\tan\varepsilon_0\Delta\varepsilon,$$

这里对Δx和Δy中Y和X的系数没有进行微分，这是因为对于确定C和D来说，计算这些速度是相对于所选用的历元的**固定**春分点和**固定**赤道而言的。因此，把日数从t_0坐标系归算到历元t坐标系的改正量是

$$
\begin{aligned}
\Delta D_0 &= \Delta(h_0 \cos H_0) \\
&= +C_0 \sec \varepsilon_0 (p+\Delta\Psi) \operatorname{arc} 1'', \\
\Delta C_0 &= \Delta(h_0 \sin H_0) \\
&= -D_0 \cos \varepsilon_0 (p+\Delta\Psi) \operatorname{arc} 1'' \\
&\quad -C_0 \tan \varepsilon_0 \Delta\varepsilon \operatorname{arc} 1'' \\
&= -D_0(mA'+E) - D_0 p \cos \varepsilon_0 \\
&\quad +B_0 C_0 \tan \varepsilon_0, \\
\Delta i_0 &= \Delta C_0 \tan \varepsilon_0 .
\end{aligned}
$$

视位置的引力星历表及其与观测的比较

编制有关太阳、月球以及主要行星的高精度视位置星历表的主要目的在于同子午观测的结果进行比较，而为了得到这样的星历表需要把行星光行差改正加在由引力理论算得的几何位置上，并且要把改正后的位置归算到瞬时真春分点和真赤道。

视位置星历表可以直接同作了大气折射和地心视差改正的子午观测结果进行比较。但是，以前在计算太阳、月球和行星的基本星历表过程中，并不包括章动的短周期项。因此，由于在确定钟差时已经加了短周期项，观测位置就不可能严格地同星历表位置进行比较。在观测的归算过程中，如果忽视了表列位置同观测位置之间的不一致性就可能会带来明显的误差——表列位置中没有包括短周期项，而观测位置则是根据受到短周期项影响的钟差（或者是从天底）推导出来的。

在子午观测中所观测的是视位置，而且这一视位置又要同某种计算视位置进行比较，在比较星坐标中没有包括椭圆光行差。对于所求得的运动天体的位置来说，仅仅当这一位置是通过与恒星的星表**平**位置的比较来加以确定时，椭圆光行差才会给它带来

某种误差。

行星星历表是由行星的日心坐标和太阳的地心坐标综合编成的。为此所用的是直角坐标。设对于同一春分点和赤道的太阳的赤道直角坐标为(X，Y，Z)，而行星的日心赤道直角坐标为(x，y，z)，则由此而得到的坐标$\xi = x + X$，$\eta = y + Y$，$\zeta = z + Z$便给出了**表列**时间为t时的行星**几何**位置的赤经和赤纬。如果把行星光行差加在这个几何星历表上，就得到了表列时间的**视**位置星历表，而该表所属的春分点和赤道则与直角坐标相同。任何坐标t时的视位置，就是在t时的几何位置中减去光行时间Δt内该坐标的地心运动

$$\xi' = x_t + X_t - \Delta(x + X)$$
$$= [(x_t - \Delta x) + X_t] + \text{恒星光行差。}$$

由太阳和行星表直接得到的坐标是对于瞬时平春分点的黄道极坐标。我们可以根据这些表列坐标以及（17）式的瞬时平黄赤交角，算出对于瞬时平春分点和平赤道的赤道直角坐标。但是，通常的做法是利用数值积分直接求得行星的日心赤道直角坐标(x，y，z)。在这种情况下，通常所采用的是对于固定平春分点和平赤道的坐标值，因而必须先把这个坐标值和取自太阳表的太阳坐标(X，Y，Z)归算到同一个历元，然后才能把两者进行相加。

天体测量星历表

为了直接同相对于比较星星表的平位置而言的照相位置进行比较，1950年在**美国天文年历**中对冥王星列出了一种星历表，称为天体测量星历表；在1960年对四颗主要的小行星也列出了这种星历表。在编制天体测量星历表时，首先要根据引力理论就每天格林尼治民用时0^h计算相对于地心的空间几何位置Q的赤道直角坐标

$$\xi = x + X, \quad \eta = y + Y, \quad \zeta = z + Z,$$

这里的ξ、η、ζ是对于某个固定平春分点的坐标值，然后，加上行星光行差Δq，从而求得0^h时的实际视位置P'，这时要对ξ、

η、ζ加上相应的增量（84）式

$$\Delta\xi = -\Delta t \frac{d\xi}{dt}$$

等，其中Δt是光行时间，最后再要扣去恒星光行差（71）式，这时类似地要对（ξ、η、ζ）加上一个相应的线性位移$-\rho\Delta\theta$，它的三个分量是$\Delta_1\xi = +X'\Delta t$，……，由（68）式及$C$、$D$的定义就有

$$\Delta_1\xi = +\rho D \sin 1'',$$
$$\Delta_1\eta = -\rho C \sin 1'',$$
$$\Delta_1\zeta = -\rho C \tan \varepsilon \sin 1''.$$

按常用公式由改正后的ξ、η、ζ计算赤经和赤纬，这样就给出了天体测量位置。

例如，对冥王星来说，假定的改正后的坐标为

$$\xi_1 = \xi - 0.00072103\rho \times (8\text{ 天内在 }\xi\text{ 方向的运动}) + D\rho \sin 1''$$

等，式中C和D以弧秒为单位。

天体测量赤经、赤纬由下式求得

$$\Delta_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$
$$\tan \alpha_1 = \eta_1/\xi_1, \qquad \cot \alpha_1 = \xi_1/\eta_1,$$
$$\sin \delta_1 = \zeta_1/\Delta_1.$$

到地球的真距离为

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

量Δ_1可以称为**视距离**。

为了求得星表中所给出的恒星平位置，应当在对于同一平春分点的视位置中减去恒星光行差，而这里所说的视位置就是实际所观测到的恒星位置。因此，在行星的实际视地心位置中减去光行差之后，由此得到的表列赤经、赤纬便可以直接同对于同一春分点的比较星的星表平赤经和平赤纬来进行比较。除了行星的地心视差外如，果略去由于在底片覆盖天区内的恒星光行差变化所

引起的视场畸变，则行星的天体测量位置及恒星的星表位置之间的**相对**关系就和照相底片上星象视位置之间的相对关系一样。只要利用适当分布的三颗或三颗以上的比较星，由这个原因所引起的误差就可以忽略不计。由于在C和D中没有考虑椭圆光行差，因而在行星的天体测量位置中就包含了恒星光行差的这一椭圆分量，这同恒星的星表平位置是一样的，然而天文照相位置则同全部恒星光行差完全没有关系。C和D应该用观测天体那一时刻的数值。

同样，为了把照相底片上月球在恒星间的位置同月历表进行比较，如果月球的观测位置是根据恒星的星表平位置求得的话，那么必须在月球的月历表位置中减去恒星光行差。出现在底片上的恒星的位置是它们的**视**位置，月球也是这样，为了使**相对于**恒星**平**位置的月球观测位置同这些恒星的视位置之间的相对位置一致，那么或者必须把恒星光行差加在恒星星表平位置上，或者必须把它从月球的位置中减去。

天文照相星历表

由鲍威尔开始采用的冥王星的天文照相星历表是由以下两部分组成的，一部分是表列时间 t 的太阳几何坐标 X、Y、Z；另一部分是时间 $t-\Delta t$（也就是比表列时间提前 Δt，Δt 为光行时间）的行星直角坐标 x、y、z，而且两者所参照的是同一个固定平春分点。因此，天文照相星历表所表示的是在视位置中除去全部**恒星**光行差（包括椭圆分量），并且归算到某个选用固定春分点后所得到的天体位置，它同天体测量星历表的不同在于后者要受到椭圆光行差的影响，而天文照相星历表同全部恒星光行差完全没有关系。

天文照相星历表可以直接同观测所得的天文照相位置进行比较，这时在星历表上所取的应该是对应于实际观测时间的天体位置，为了求得天文照相位置就需要把照相位置归算到同一个固定平春分点，并且加上视差和椭圆光行差改正。

第十四章 时间的计量

自远古时期以来，通常总是用天体的视运动来说明时间的推移，不论是一昼夜中的小时，或是历法和年代学的计算中所涉及的更长的间隔，至今还是同天体的运动紧紧地联系在一起。其它手段，如钟表则仅仅是辅助工具或中间设备。因而时间计量便成了天文学所特有的一个研究问题。

在天文学中，我们不考虑定义时间这样一个难以捉摸的问题，关心的仅仅是计量时间这个具体的物理问题。为了测量任何一个物理量，仅需要任意选定一个单位，并设计出某种用来与这个单位进行比较的行之有效的方法。从这一点来说，有关该物理量性质的基本定义那是无关紧要的，一般说来，对于其它物理问题也是如此。我们不需要知道某一个量的含义是什么，只要知道它能进一步推论出我们工作上所需要的有关这个量的各种性质就足够了。在数学中通常用的方法是由假设推出定义，这里在举例论证时要用公理和假设来对那些未下定义的几何元素的特征予以说明，由此再推论出几何量的全部性质及其相互关系。很久以来人们实际上一直在进行时间的计量工作，这与打算给时间下个定义或者与有关时间性质的流行的哲学概念毫无关系。时间的定义和时间计量的定义这两者之间是有实质性区别的。

要计量时间，不仅不需要去定义时间或者分析时间的哲学性质，而且对物理研究所需要的某种实用时间计量系统来说，也未必一定要求它满足能识别出理想而又均匀的时间计量尺度的那些判据，这种均匀的时间尺度只是直观想象的产物，它或多或少总是不太明确的。测量工作的根本之点是在某种类型的物理量与抽象的数字之间建立起一种唯一的对应关系，所有的方法是把任意确定的物理量同所采用的单位进行比较，这样就总可以把一个确定

的数与该物理量联系起来，这个数就是该物理量的量度。单位可取任意的量，但当需要应用上述方法比对时，它应能重复再现或者是在某些一定状态下能加以认证。通常可以认为只有一个不变的量才可能作为单位，也就是在不同场合可看成是相同单位量的那些量值，在实用允许范围内实际是全部相等的，用这样的单位连续累计得到的计量尺度就是均匀的。然而，即使用来作为单位的量也是变化的，只要在比较过程中总是约定把这个量当作为不变的计量单位，就能把计量与每个给定量联系起来。何况均匀性的概念，隐含着先需要有一个与通常测量方法无关的基本标准。而单位本身则可以是依据于一个不同的和独立的计量系统，在这个计量系统中这个单位可能找到一个不变的计量单位，也可能找不到，而这第二个系统总是受同一问题支配的。

事实上，找不到一种方法用来对照一个绝对参考标准进行最终的试验。在实用中，一个单位的不变性和相应计量尺度的均匀性，只是相对于另一个习用的计量尺度才能明确地建立起来，而不是参考一个绝对尺度。一般来说，实际上并不需要在绝对意义上假定一个理想的均匀计量单位来作为某种尺度，就能建立一个合理的满意的计量系统。时间计量正是对这些原理的一个极好的描述。

应用任何一种可行的方法，总是可以使一个已知的时间间隔与一个选定的标准间隔相比较，由此就能在时刻瞬间与抽象数字之间建立对应关系以及组成一个时间计量系统。不论这种对应关系如何紧密，它总能代表一种从物理世界经验中直观设想的时间的理想均匀流量的量度。计量时间的方法唯一需符合的条件是能充分地满足所遇到的各种要求，而在整个时间计量的历史中，真正在实践中使用的那些系统就是由当时的要求和所具有的设备所确定的。

在人类文明发展的所有阶段，指示和计量时间的方法都有实用的需要。最早的原始人对于很简单粗糙的方法就满足了，现代

的科学系统仅是这些同样方法的更精确化和细致化而已，原理却还是同以前一样：建立一个数字时间尺度的基本目的，是用具有某种精确度的方法对种种事件的发生进行排列，以确定方式把它们与时间联系起来，以作为一种通用参考基础。具体来说，物理学的主要目的是用这个时间尺度对自然现象作精确描述，它是以时间尺度作为独立变量用数学形式写出的自然定律。对这个目的来说，所采用的时间计量与直观想象的均匀的哲学时间尺度之间的关系是次要的，主要应考虑有关现象与所采用的时间尺度以有效的方式联系起来时，应该既实用又方便。随着直观时间概念的发展，时间计量系统的描述是由下述的自然要求所决定的，即要求尽量在实际上接近于绝对时间的理想均匀尺度，但实际上能实现的仅是一个逻辑上与这个概念的最终标准无关的物理定义尺度，这就是所要求的全部内容。

因而实质性的课题就是：（1）确定一个可观测的时间尺度；及（2）从观测在这个时间尺度上已知事件发生的瞬间来设计确定时刻的方法以及用这个计量方法使自然定律公式化，由此把自然现象与这个尺度的时间计量联系起来。选定某些**重复发生的现象作为参考标准**，就可以十分容易地定义一个可以实现的时间尺度。可以把任何一种重复发生现象的时间间隔作为单位来确定时间的计量单位。例如，太阳的视周日运行，月相的循环周期，地球绕太阳的公转，或一些人为的现象如摆的振动等。一种连续再现的无限的连续序列与累计数字的一一对应就产生时间尺度。以这种方式来计量时间的自然基础是天体的视运动，特别是与昼夜、季节周期的循环相联系的天体的那些运动，它们总是自然而然地用于这一目的。

在原始时期，天文现象仅仅被用于以纯经验的方式粗略地标志时间的推移，并以此作为实际活动的指南。如果仅仅为了用连续发生的事件间隔来计量时间，那么任何的循环现象，不论自然的或人为的只要有方法可以有效地计算它们的重复次数，就都可

使用。但是，由不同的现象定义的时间计量单位，当把它作为一个独立变量来描叙所有其它现象时，并非都能很好地满足应用的。对现代科学目的来说，一个满意的时间计量系统只能建立在严格的综合的理论基础上，且只有应用高精度的复杂仪器才能付诸实用。然而，对于由不同现象定义的各种时间尺度的选择，必然只能是根据它们满足当时的要求的相对能力和根据它们的实用性和方便性而定。采用任何一种实际的时间计量系统完全是人为选定的，无法可靠地决定它与均匀绝对时间的理想概念是否一致，在时间计量的实用意义上，这个问题是不重要的。由所选择的观测方法定义的时间计量必须用来作为约定的时间标准，而任何其它时间计量只能对于这个标准进行比较。

其实，古代常用的**最自然的**时间计量系统之一是以昼夜的重复再现作为主要单位，再把昼和夜分别分为 12 个**季节时**，显然与时间的均匀量度的直观概念是不相应的。它与古代另一种最重要的计时单位**“二分时”**是一种完全不同的时间尺度，二分时总是把昼夜合起来（一天）分成为 24 个等分。季节时的数量相对于二分时而言，随不同纬度和季节而变化，幅度很大，在同一天中白天和黑夜的季节时也是不相等的。以二分时计量的日长数值变化很大；而若用季节时来计量昼夜的长度，在任何地方总是等于 12 个小时。在这两种时间计量系统中，小时的进程，可以用太阳或恒星在它们周日圈上的位置来指示，那时所用的那些不够完善的计时方法，精度是不高的。

在物理学的系统发展中，应用原始的季节时作为计时单位，在实用上引起很大的复杂性，因此在天文学的应用中在比较早的时期就已不用季节时；而在日常应用中一直到中世纪机械时钟发明以前还使用它。另一方面，从古代的观点来看，引进“不变”的二分时来代替自然得多的季节时，使得在计量昼夜长度时，小时数在不同季节中的复杂变化，同样是感到麻烦的事。把太阳的周日运动与纬度和季节联系，用二分时表示日出到日落之间日长

的变化，这种必要性或许正是促进研究建立太阳在恒星间周年视运动理论这个困难课题的主要的原始因素之一。

用天体的视运动来计量时间这种传统的做法，目前可以建立在严格的力学基础上，它可以作为时间计量的原始标准，这意味着是由运动定律定义的。在这些定律通常的表达形式中，它们好象以绝对时间的独立量度作为必要条件，但如果采用不受外力作用下的质点运动作为定义时间尺度的参考现象，则牛顿第一定律（惯性定律）实际上就成为时间定义的力学标准。根据假设，在不受外力的情况下质点运动的等直线位移与等时间间隔相当。从直观概念出发，在传统的力学基本公式的术语中，普遍承认的运动的动力学方程的独立变量应是用不变单位计量的均匀时间，这个不变的单位可用惯性定律由质点在不受外力作用之下的连续等直线位移来确定。因为得不到绝对的比较标准，一个均匀的计量单位只有从定义上讲才是均匀的，而对于物理学的问题来说，由运动定律定义的时间计量单位就可以约定认为是均匀的。

在物理学中，均匀时间这个名词，只能从约定的意义来理解。均匀变化就是这种变化随着力学的时间尺度 t 等量增加，就是说一个变量的相等增量总是对应于 t 的相等增量，或者可以说任何增量与 t 的间隔成比例。随力学的量度而逐渐增加的时间，是用某个任意的单位区间来量度的，这个单位区间就是一个不变的时间单位。

为了便于实际应用，时间的计量必须是容易用观测来确定的。一个不受外力作用的质点的运动是抽象的，不能直接观测。对于由于运动定律定义的时间计量的实际认识，依赖于用这个运动的严密的力学理论，把时间计量与一个由可观测的物理运动定义出的中间实验标准相联系起来。从运动定律建立的任何力学现象的数学理论，事实上是以不受外力作用的质点的运动所确定的时间计量单位来表示的。简要地说，均匀时间是由运动方程的独立变量定义的。从效果来说，均匀时间是一种计量单位，从这种

计量来看，观测到的力学现象与力学理论是一致的，特别是在这种时间计量单位中，观测到的天体运动与这些运动的严格引力理论是一致的。实用上，天文的时间计量单位是由日、月及恒星的视运动定义的，并由观测来确定的。这些观测的计量单位与均匀时间的关系是根据天体的实际运动（反映为它们的视运动）的力学理论确定的。

就包括力与质量的基本概念的哲学问题以及由于观测到的天体运动所参考的坐标系的未知的绝对运动所带来的困难而论，在上述对绝对时间的概念的讨论中也同样存在。运动定律是经验的假设，是从对时间和运动的经验中推断出来的。它们的公式是由普通的直观概念所导出的，而且多少包含了实际观测的理想化。但实质上，这就等于假定能找到一个具体的计量方法的合理系统来定出确定的量值，并根据这些运动定律在观测的精度范围内描述自然现象。从牛顿的《原理》一书中关于时间、空间及运动的讨论，可知他已清楚地认识到实现这些测量的具体困难，必须从实验及观测来验证在这个基础上把各种现象满意地联系起来的可能性。以力学的时间计量单位表示的观测现象，可以与运动定律的独立变量所表示的理论表达式进行比较，理论与观测之间出现的任何分歧，不能够用观测的不可避免的误差来合理解释，也不能对采用的参数作适当改正而消除，只能表示所作的假设存在矛盾。

这种性质的分歧，通常解释为用来说明现象的运动定律有缺陷，如忽略了那些还没有认识其作用的力。而如果作为标准参考运动的力学理论本身有缺陷，则时间的经验计量单位与力学计量单位之间的关系必须加以修正。然而同样应该看到，为了最终消除所有可能出现的分歧，以得到对自然现象的完整一致的表达，需要对运动定律本身加以修正。可以认为相对论是比牛顿的阐述更为精确的一种运动定律，它具有消除在理论与观测之间存在的未解决的差异的作用，可能最终仍需要作进一步的改

正[●]。

过去，作为天文测时基础的物理运动是地球的自转。导出恒星时及平太阳时的周日视运动，主要是这一自转的反映。由春分点的周日运动定义的恒星时，在实用上是由观测恒星的周日运动得到的。平太阳时在原理上是由太阳周日视运动的平均速率定义的，在实用上是由观测得到的恒星时与平太阳时之间的关系来确定的。从这种关系得到的平太阳时是对由地球自转定义的时间的一种数值量度。

这些经验计量方法现在仍是实用计时的基础，但由于地球自转速率有微小的变化，在用时间的力学尺度来测量地球自转速率时，平太阳时就不是完全均匀的了。自转变化的不均匀性相对来说是微小的，但对于许多科学和技术问题，实际上这种影响是显著的，在相当长的时间间隔内它们的累积效应就很重要了。因此，由地球自转定义的时间计量单位可以由地球公转运动定义的均匀计量单位替代作为基本天文标准，称之为**历书时**。

历书时是均匀时间的数值计量单位，它是地球公转运动的引力理论中的独立变量，更确切地说，它是**纽康太阳表**的自变量。原则上，它是由反映地球公转运动的太阳周年视运动确定的。引力历书是以历书时的函数来表太阳的位置，在任一瞬间历书时的量度就是当历书位置与该瞬间的实际位置相同时的自变量的值。就是说，时间的量度是通过把时间表达为位置函数的逆关系式确定的，这个关系式就是确定它的数值的实用手段。任一瞬间的历书时是由观测得到的，即是把日、月和行星的观测位置与理论计算的引力历书位置直接比较而得，引力历书位置是以相同的均匀时间的量度值为引数，根据理论（如纽康的太阳理论）所算出的天体位置。实用上，为达到这一目的最有效且迅速的方法是观测

● 关于相对论的行星理论中的变量与时间和长度的实用天文学计量之间的关系，见G.C.Mc Vittie, Remarks on planetary theory in general relativity. Astr Jour.63, 448-452 (1958).

月球的位置。

地球自转速率的变化不能完全由理论来确定，因此，时间的均匀计量单位不能由观测天体的周日视运动而得到，因为这些运动不能用力学理论以均匀时来表示。地球自转速率变化的确定，取决于以**平太阳时**表示的观测到的天体运动与以**均匀**时表示的**理论**的引力运动相比较的结果。实用上历书时是用某种改正值的形式来确定的，这种改正值是为了得到历书时而必须对平太阳时所加的。

观测恒星经过子午圈来确定恒星时，形式上相当于应用地球自转作为标准钟。把天球作为钟面，而分布于天球上的一些选定的恒星则是钟面上的字码。当地方子午面随地球自转而在空间旋转时，子午圈也绕天球运动，它的作用就象是钟的指针。当子午圈经过每颗恒星时的读数是这具天球时钟指示的时刻。在任一瞬间这具钟的数字读数是子午面经过的那颗恒星的视赤经值，它就是恒星在春分点以东的角距，或者相等于春分点的时角，这个值就是恒星时的量度。天球钟的钟面读数确定了对人造时计读数所需加的改正值，以使人造时计与由地球自转确定的时间计量相一致。

类似地，确定均匀时的标准钟是公转运动中的太阳，而不是自转的地球。从原理上来说，公转轨道是钟面，用表示为轨道黄经的角度测量作为字码，绕轨道运动的太阳则是指针。任一瞬间的时间的计量是由太阳在轨道上的位置确定的，而不是子午面在周日运动中的位置，并且是以太阳在恒星间的视位置来表示，而不是用时角的位置表示。由观测太阳位置就确定了为得到历书时需对平太阳时所加的改正值。

在精确计时工作中，一个主要的辅助工具是一具尽可能按均匀速率运行的时钟。一具用电子振荡线路控制的，频率由原子或分子振荡所确定的时钟，当它位于强度不变的重力场中运行时，可以认为它的速率是完全均匀的，由它可以定义出均匀的时间标

准。使这种时钟速率的变化大到对实际应用有影响的因素，是钟所在地点海拔高度的改变或纬度的改变，以及太阳和其它天体离地球距离变化造成的引力变化。从原理来说，可以计算出这些变化，并对原子钟加以改正。但到现在还不能确实地知道由原子过程定义的时间尺度与由引力运动定义的力学时间尺度之间的关系是否严格地均匀，或在足够长的时间间隔中这两种尺度是否会产生分歧。而且，原子钟仅提供一种**频率**标准，它确定的是一种时间单位，而不是对这种单位作连续的计数，后者对确定自过去任一起始历元以来经过的时间间隔是必需的。天文时所确定的实质上是确定一个历元以及离这历元的时刻，因为没有一具人造时计能象天体运动那样维持无限期的连续运转。

现在好象已经认为，一具原子振荡器如果配备有适当的计数装置，依据相对论它保持的是对运动着的观测者的那种所谓“原时”，而历书时和所谓的坐标时则是同一种时间❶。

如同所有的物理量度一样，对于由理论定义出的时间尺度，从观测得到的数值不可避免地带有观测误差以及所用的测定方法的不完善带来的误差。例如，由此导出的恒星时及平太阳时就带有所用的恒星位置的误差。历书时从定义来说是严格均匀的，但在实际上从观测月球测定它时，由于采用的月球运动理论的不完善而带有长期的或长周期的不均匀性。然而，这些缺点还不致于使观测所得的尺度不能用来实际地实现理论定义。

---

❶ 由于世界时存在不均匀性和历书时的测定精度低，从1967年起，原子时已取代历书时作为基本的时间计量系统。协调世界时是以原子时秒长为基础，时刻尽量接近世界时的一种时间计量系统，它既可满足大地测量、天文导航等需要知道以地球自转角度为依据的世界时时刻的要求，又满足物理学测量要求均匀时间间隔的要求。1972年1月1日起协调世界时时刻与世界时UT1时刻之差保持在$\pm 0.9^s$之内。——译者注

第十五章　以地球自转为基础的时间计量系统

在以地球自转运动为基础的时间计量中，理想的时间单位是地球绕瞬时轴旋转一整周的周期。地球自转总是由地方子午圈相对于天球上的一固定基点的角运动来计量的，可以由观测这个基点相对于天球子午圈的周日视运动作为必要的中间实测手段。可是我们不能确实辨认出任何点是否绝对固定在天球上。实用上，最方便的参考基点是春分点。这样就可以把由春分点的周日视运动定义的恒星时作为实测的中间媒介。平太阳时原则上是根据假定的平太阳的周日运动来确定的，而在实际上是通过与恒星时的关系得到的，它是由地球自转定义的时间的实用计量单位。

恒　星　时

恒星时是用春分点对于地方子午圈的时角运动定义的。任一瞬间恒星时的数值为春分点的时角，沿着天赤道从瞬时地方天球子午圈向西量到通过该瞬间的天极和春分点的时圈为止。因为岁差和章动，春分点不是固定在天球上，又因为地极运动和垂线的日月变化，地方子午面相对于地球也不是固定的。春分点的时角运动是天球上子午圈和春分点各自运动的合成。子午圈的运动是地球绕其瞬时轴的角运动与地方子午面相对于地球运动的合成。因此，恒星时与由地球自转运动定义的时间计量单位之间的关系是很复杂的。更何况除了地球自转速率变化引起的不规则性外，恒星时还要受到许多周期和长期的不规则性的影响。

以均匀时 t 表示的春分点时角 τ 的表达式可从下面两个角度得到，一个是瞬时天球子午圈相对于形状子午圈的角度，另一个是形状子午圈相对春分点的角度（图 58）。地方形状子午圈绕

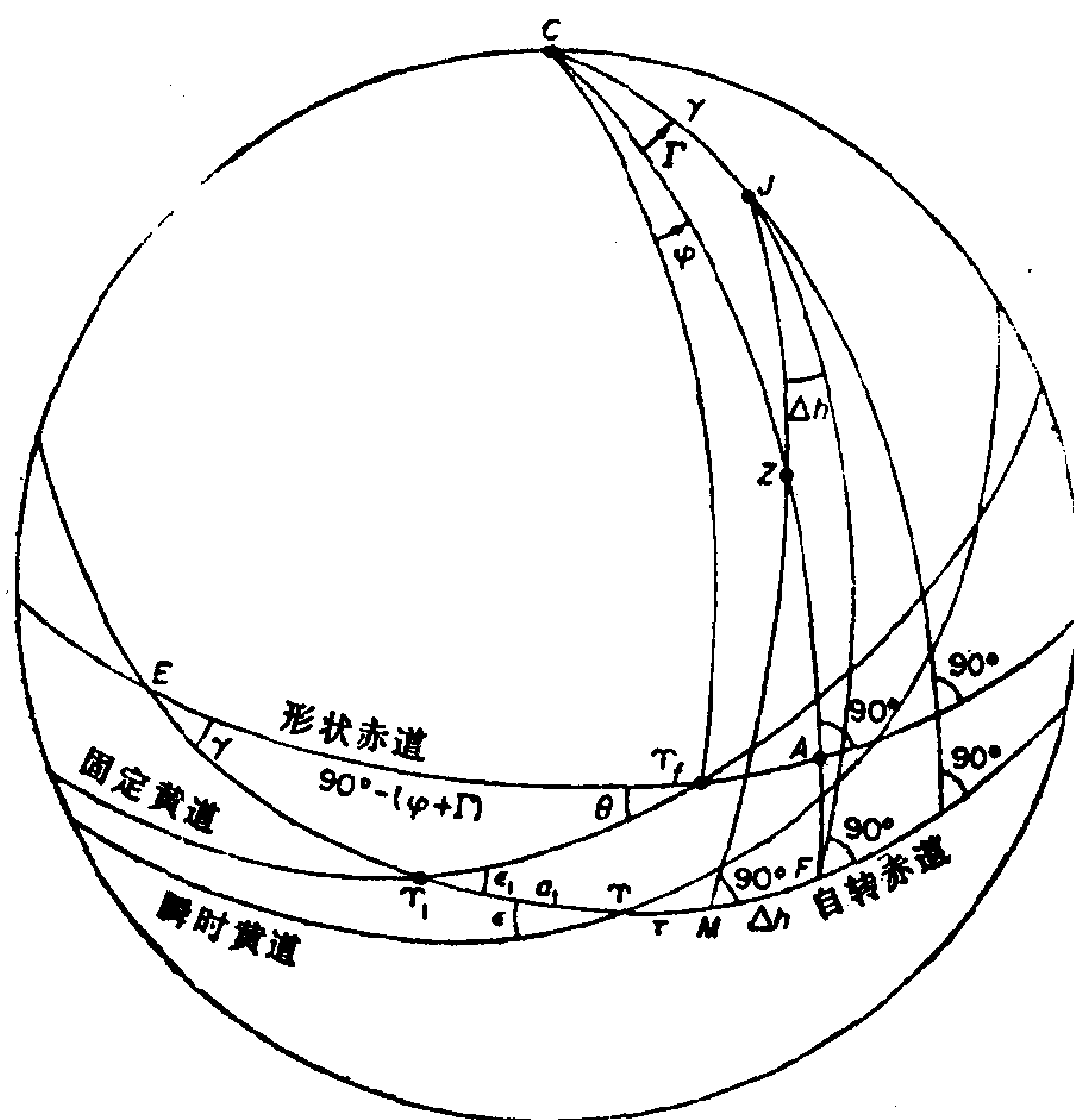


图 58　视恒星时

C——形状极；*J*——自转极；*Z*——天顶；*OZ*——形状子午圈；*JZ*——天球分午圈。$\gamma_1 F=\Omega$；$EA=b$；$EF=c$.

形状极的角运动由 φ 角量度，它在形状赤道上自固定历元黄道与形状赤道的交点 $♈_f$ 向东计量。天子午圈绕天极的旋转角，沿天赤道从天赤道与固定黄道的交点 $♈_1$ 向东计量为 $\tau+a_1$，其中 a_1 为赤道上分别被瞬时黄道与历元黄道所截的弧段。形状子午圈与天赤道的交点距 $♈_1$ 的向东计量的角距为

$$\Omega=\tau+a_1+\Delta h,$$

式中 Δh 为该交点的时角，它从瞬时天球子午圈向东计量。在由形状赤道，自转赤道以及这两个赤道对形状子午圈交点所截的弧段所组成的直角三角形中，b 边及斜边 c 组成很小的 γ 角，它可取 γ 的一阶项，因为 $\cos\gamma=\tan b\cot c$。同样，在这两个赤道

以及固定黄道与这两赤道交点间所截的弧所构成的三角形中，θ 和 ε_1 角都可取一阶项，因为 $\cos\gamma=\cos(\theta-\varepsilon_1)$，由正弦定律，$\gamma$ 的两条邻边相等。因此，对 γ 的一阶项而言，Ω 弧和 φ 弧相等，相应的关系式为

$$\tau=\varphi-a_1-\Delta h.$$

在此表达式中，由于极移引起的 Δh 的分量用（112）式表示，取 γ 的一阶项，则有

$$\Delta h=\gamma\sin\Gamma\tan\Phi,$$

式中 γ 及 Γ 用（105）式表示，Φ 为瞬时天文纬度。根据（113）式可得到由铅垂线日月变化引起的变化。

应用第十一章中 a_1 的表达式，得

$$\begin{aligned}a_1=a&+0.000655^{s}T\sin\Omega\\&-0.000085^{s}T\cos\Omega\\&+0.000049^{s}T\sin 2L_{\odot},\end{aligned}$$

式中 a 为行星岁差，$L_{\odot}$为太阳平黄经，Ω 为月球升交点黄经，T 为自 1900 年起算的儒略世纪数。

φ 角用地球自转的力学理论[1]求得。包括系数达到 0.01ms 的所有项的 φ 角为

$$\begin{aligned}\varphi&=\varphi_0+\int\omega dt\\&=+\Psi_1\cos\varepsilon^0+0.00018^{s}\sin\Omega\\&\quad+\Delta\Psi_1\cos\varepsilon^0+0.000005^{s}\sin 2\Omega\\&\quad-0.00027^{s}T,\end{aligned}$$

式中 T 为自 1900 年起算的儒略世纪数，Ψ_1 为黄经日月岁差，$\Delta\Psi_1$ 为以历元黄道为参考的黄经日月章动，ε^0 为历元平黄赤交角，ω 为自转角速率，以及 φ_0 为取决于采用的本初子午线的积分常数。

---

[1] E.W.Woolard, Astr.Pap.Amer.Eph.XV, Pt.1, 165.

假若地球是一绝对刚体，ω 就将是常数。日月引力的直接作用会产生微小的周期变化[1]，但周期很短，而且幅度也很小，以致使 τ 的不均匀变化远远在观测精度范围以内。由于地球不是刚体，由此造成的自转速率变化是可以被观测到。周期变化是由日月引力引起的潮汐形变和海洋潮汐中质量位移造成的。微小的长期变化是由潮汐摩擦及其它可能的因素造成的。周年变化以及不规则起伏则是由迄今还未完全了解的一些地球物理因素造成的。由于长时期的天文观测记录的积累，这些变化的影响在许多现象中都能得到反映。而且，由于时钟、天文观测和物理度量等方面的精确度的提高，在实用上这些变化具有直接的重要意义。

在 τ 的表达式中，φ 的$\varphi_0+\int\omega\,dt$ 项，包括了由于 ω 的变化引起的不均匀性，它表示由于地球绕瞬时轴旋转的角运动引起的地方子午面的时角运动。子午面的时角的其余部分的运动，是这个平面相对于自转地球的位置变化造成的，它包含两个分量：由地球相对于子午面的位移引起的 dh，以及与地球的任何运动无关的，由垂线的潮汐变化使子午面相对于地球的位移引起的 δh。

φ 的其余项是由自转轴方向在空间的变化引起的，这种变化对自转地球以及子午面都产生影响。再加上由于轨道平面的长期运动引起的a_1，表现了春分点沿天赤道的运动，它代表子午面的这些运动对其时角位置的影响。因此，φ 和 a_1 的这些项等价于赤经的总岁差以及两分差。

在 φ 中，$\Psi_1\cos\varepsilon^0$ 项代表赤经日月岁差 $\zeta+\zeta_0$ 的一阶项，(127) 式中的二阶项是不明显的。$\Delta\Psi_1\cos\varepsilon^0$ 项如果以瞬时平黄赤交角 ε_0 和瞬时黄道上的章动 $\Delta\Psi$ 来表示，当取与 φ 表

[1] E.W.Woolard, Astr.Pap.Amer.Eph.XV, Pt.1, 163—165.

阶式相同精度时，有[1]

$$\Delta\Psi_1 \cos\varepsilon^0 = (\Delta\Psi + 0.009\,022''T\sin\Omega - 0.001\,399''T\cos\Omega + 0.000\,666''T\sin 2L_{\odot})(\cos\varepsilon_0 - 46.87''T\sin\varepsilon_0)$$
$$= \Delta\Psi\cos\varepsilon_0 + 0.000655^{s}T\sin\Omega - 0.000\ 085^{s}T\cos\Omega + 0.000\,049^{s}T\sin 2L_{\odot},$$

因此它代表了二分差和 a_1 的周期项的一阶项。φ 的其余项代表了二阶效应。取到这一级精度的式子为

$$+0.000\,005^{s}\sin 2\Omega = -\frac{1}{2}\Delta\Psi\Delta\varepsilon\sin\varepsilon_0,$$

这就是二分差的二阶项，长期项 $-0.00027^{s}T$ 与岁差合并在一起，而周期项 $+0.00018^{s}\sin\Omega$ 与二分差合并在一起。

因此，以瞬时地方天球子午圈为参考，利用时间的均匀力学计量单位 t，可将真春分点时角的表达式表示为

$$\tau = \tau_0 + \int\omega\,dt \qquad \text{地球自转}$$
$$+\Psi_1\cos\varepsilon^0 - a \qquad \text{赤经总岁差}$$
$$+\Delta\Psi\cos\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\Delta\Psi\Delta\varepsilon\sin\varepsilon_0 \qquad \text{二分差}$$
$$-\Delta h \qquad \text{极移}$$
$$+\delta h \qquad \text{垂线变化。}$$

由真春分点周日运动定义的时间计量单位称视恒星时，虽则称为视分点时更为合适。视恒星日是春分点连续两次过地方子午圈上中天之间的时间段，一恒星日分为 24 恒星时，自上中天开始计量，以时角每移动15°作为一小时。上中天瞬间称为恒星正午。

视恒星时中主要的不均匀性是二分差。由平春分点的周日运

[1] E.W.Woolard, Astr.Pap.Amer.Eph.XV, Pt.1, 152.

动定义的时间计量单位称平恒星时，它等于视恒星时减去二分差。以前经常不合适地把平恒星时称为均匀恒星时，它仍受地球自转速率变化以及子午圈变化的不均匀性的影响，还受赤经岁差速率中的 $d(0.0929^{s}T^{2})/dT$ 的长期变化造成的长期不均匀性的影响，这种影响每年可达 0.00002^{s}。

恒星日是春分点时角增加360°所需的时间间隔。因为岁差和章动使春分点在天球上运动，即使相对于固定的平子午圈而言，恒星日也不严格等于地球自转周期，因而称为分点日更为适当。由于自转轴方向在空间的变化，甚至固定在天球上的一个点，它连续两次中天之间的时间间隔在这一圈周日轨迹和另一圈周日轨迹之间也在变化。一般来说，即使是恒星日的平均时间长度也不严格等于地球自转的周期。在自转完一周后，自转轴绕着固定黄极就移动了一段弧段。在黄道上或在黄道与天极轨迹之间的任何固定点，当在一周自转开始时子午圈通过该点，而在一周自转结束时子午圈尚未达到该点。在春分点绕天球运转一整周后，子午圈经过该点的次数比地球自转的次数少一项，而两次过子午圈时间间隔的平均值与地球自转周期平均值的比率为1.00000011。由于黄极不因自转轴的运动而改变位置，子午圈连续两次经过固定黄极的时间间隔就等于地球自转周期。而对天极轨迹以内的一点，在岁差周期中有时在一次完整的自转以前过子午圈，在另一些时候则在一次完整的自转以后过子午圈，而在岁差周期中两次过子午圈的平均时间等于自转周期。

由观测确定恒星时

时间测定就是把观测到的时刻与观测瞬间的时钟读数进行比较来确定钟差。从相邻两次观测所得的钟差，可以得到时钟快慢的速率(钟速)，由此可用内插法求得两次测定之间的任一瞬间的钟差，或用外推法求得两次测定以前或以后的钟差。钟速为钟面改正值的变化速率，而钟面改正值符号习惯上这样规定的，即使

得正确时刻等于钟面读数加上钟面改正值。钟差和钟面改正值两者数值相等，而符号相反。当钟慢时钟面改正值取正号，钟快时取负号。正的速率意指时钟走得慢。一具完善的时钟的速率是均匀的，对于任何标准时间或均匀时间来说，它每天快或慢的速率不变，而不管它速率的大小或累计钟差数值是多少。

原则上，地方恒星时可以用恒星在周日弧段上任一点的时角来求得。春分点时角依据它在恒星间的位置而得，后者可以恒星视位置的星历表来得到。观测过子午圈中天来确定恒星时是一种特殊情况，过子午圈时时角为零，这时春分点的时角就是恒星的视赤经。可以用不同方法来测定时刻，特别是对测绘和航海工作，可根据环境及精度要求来选用合适的方法。

从观测恒星在周日轨迹上的位置直接得到的时间计量单位是以瞬时地方子午圈为参考的视恒星时，因为周日运动取决于地球的瞬时自转运动，而仪器则是由地方重力方向来定位的。因为视恒星时的不均匀性，如果用一具绝对均匀运行的时钟来测定恒星时，将会得到或快或慢的钟速。在实际的守时工作中，由于时钟可能具有的一些不规则变化以及观测误差，由此而产生的速率变化再进一步叠加在上述的不均匀性上。为了求得时钟本身的钟差和速率，必须把时钟的不规则性跟观测得到的时间计量的变化分离开来。在视恒星时中任何还没有被确认的并且没有从直接观测到的时钟时刻中消除的不均匀性，将会遗留在钟面改正值和钟速中，而导致错误地把它们归之于时钟的运行质量。

只要恒星时中任何特定的不均匀性与时钟的不规则性以及观测的不可避免误差相比小到可以忽略的程度，那么在计算恒星位置和归算观测以确定钟面改正值时，这项不均匀性就可以不予顾及。由于精确时计的不断发展以及与恒星观测比对的精度不断提高，就能从时钟的不规则性中逐渐分离出愈来愈多的不均匀性来。

在 13 世纪就已发明机械时钟，但直到 17 世纪摆钟出现以前，一直没有得到满意的精确守时工具。大约在 1890 年左右由

里弗勒将摆钟的精度提高到一个新的高度，长期以来天文工作者使用的标准钟都是里氏制造的。里氏钟在1912年被邵特制造的同步自由摆钟所代替。可是在不太长的时间中，石英晶体控制的时钟就开始代替了摆钟。在高精度的守时工作中，石英钟再加上原子振荡器已完全取代了摆钟。现在天文守时用的时钟，由于子午圈以及地球自转速率变化所产生的不均匀性，已可从钟速中区分出来。因为时钟守时的精度已高于一个天文台每夜通过观测确定的时刻的精度，时钟是用来修平夜与夜之间观测的随机误差，以及在连续两次观测之间进行内插。

在两个不同的天文台测定的时刻不能直接进行比较，因为极移和采用的恒星赤经系统中的周期误差引起的效应与地理位置有关。

由于子午圈变化引起的不均匀性 Δh 和 δh，必须根据观测来确定，因为它们依赖于地球与刚体的偏离。Δh 的理论表达式取决于力学理论中的积分常数，可以从对极移的观测来计算出它的数值。由（112）式可以看到，一具均匀运行的时钟看上去每天却走得快了，以恒星秒所表示的走快的值为

$$\Delta\tau=\frac{1}{15}(\gamma)''\tan\Phi\cos\Gamma\frac{d\Gamma/dt}{57.3}$$

$$=(0.0011635^{s}\tan\Phi)(\gamma)''\cos\Gamma(d\Gamma/dt),$$

式中 $d\Gamma/dt$ 为每天的度数；在 $\Phi=40°$ 处，系数为 0.00098^{s}。δh 的理论表达式仅适用于刚体地球。天顶向东的位移（113）式使时角增加，因此使得过子午圈中天的时刻变早，表面上似乎时钟变慢了，视钟面改正值为 $\Delta z\sec\Phi$。作为地球偏离刚体的修正的这种不均匀性，可由分析视钟速来确定。

摆钟钟速受到重力强度的日月引力变化，也受到子午圈变化的影响。根据照相天顶筒测定时刻得到的邵特钟的钟面改正值中[1]，能观测到由月球引起的总效应。这两个分量不能从测时结果

[1] P.Sollenberger and G.M.Clemence, Astr.Jour.48, 78-80(1939).

中分别加以确定，但可从实验室中对邵特钟和石英钟进行比对来检测仅由强度变化产生的效应❶。

由二分差引起的恒星时的不均匀性，可以由理论计算到任何所需的精度量级，并从钟面改正值中加以消除。在子午观测的情况下，实际上影响到计算中天的平恒星时。把中天的钟面时和计算而得的时刻相比较，给出了相应于平恒星时的钟面改正值，而平恒星时的较好的均匀性，有利于从恒星时的变化中分离出钟速的变化。中天时的平恒星时 τ_m 是从视赤经中消去归算章动的(159)式中一些与恒星的坐标无关的项而得到的，但保留了其它项，τ_m 的一阶项为

$$\tau_m = \alpha_0 + t(\mu + m) + A(\sin\alpha_0 \tan\delta_0) + Bb + Cc + Dd + \text{周日光行差},$$

式中 t 为观测日期，以年的小数表示。在（159）式中被略去的那些项代表了二分差，

$$m\frac{\Delta\Psi}{\Psi} + E = \Delta\Psi\cos\varepsilon_0,$$

因而 τ_m 为春分点的时角值减去中天瞬间的二分差，它就是中天时的平恒星时。为了方便起见，可以进一步把它换算成中天时的平太阳时。

由二分差引起的赤经变化对于所有恒星都是相等的，代表了由恒星时不均匀性引起的过子午圈中天的恒星时变化。(159)式中依赖于恒星坐标的项以及遗留在 τ_m 中的项，代表中天时刻附加的变化，这种变化不是由于恒星时的任何不均匀性引起的，而是由于天极在恒星中的章动运动造成的周日圈的变化引起的，它对于每个恒星都不相同。由于这些项，τ_m 不是相应于平春分点的赤经。中天时的平恒星时不是恒星中天时平春分点的时角，因

❶ E.W.Brown and D.Brouwer, Mon.Not.Roy.Astr. Soc. 91, 575-591 (1931).

为这些恒星在由瞬时天极所确定的子午圈上。经过由平极确定的子午圈的中天是观测不到的，所以平恒星时也是不能直接观测的。仅能观测到经过由瞬时极确定的子午圈的中天。平恒星时只能对根据这些中天所确定的视恒星时加上二分差的改正值而得到。

对于子午观测而言，最精确的仪器是照相天顶筒。它是一架较长焦距的固定在铅垂方向的望远镜，因为只能对天顶附近进行观测，不规则的大气折射的影响减到了最小的程度。来自一颗恒星的光线经过物镜从水银盘向上反射并到达焦点，该焦点位于透镜下面的照相底片上。天顶位置由水银表面自动地确定。底片盒沿着水平导轨作直线移动，移动的速率与恒星周日运动的速率相等，这样可以得到一个点象。需要进行四次曝光。在每次曝光期间，闪光灯闪光，照亮了一个旋转的玻璃刻度盘，在度盘上可以把闪光的时钟时刻读到1ms以内，在两次曝光之间物镜及底片绕着铅垂轴旋转180°，把恒星星象移动了恒星天顶距两倍的距离。根据底片上四个星象的相对位置，可以得到过子午圈中天瞬间的时刻以及中天时的天顶距，这样就能同时测定时刻和纬度。不需加水平差、方位差、准直差或镜筒弯曲的改正，恒星的相对位置可以从观测这些恒星本身得到，与星表误差无关。每一晴夜观测两组不同的恒星，一组在子夜前，一组在子夜后。

用丹戎超人差棱镜等高仪作子午圈外的观测来确定时刻，其精度可与照相天顶筒的观测精度相比拟。用这种仪器观测的是高度为60°的恒星。观测每颗恒星可得到时刻、纬度和赤纬的线性关系，每夜观测两组恒星，一组在子夜前，一组在子夜后进行。

子午圈外观测的各种方法，在测绘和航海中用得很多，测量高度是最常用的方法。根据对于任一天体观测的高度角，加上大气折射改正，必要时再加上视差改正，若已知纬度 φ 和赤纬 δ，就可以计算出时角，这样就可按 $\tau=h+\alpha$ 的关系式得到地方视恒星时。这是在使用精确的时钟进行有成效的子午观测以前，测定

时刻的唯一实用方法。从微分关系式：

$$dh = -\frac{dz}{\cos\varphi\sin A} - \frac{d\varphi}{\cos\varphi\tan A}$$

显然可见，当在卯酉圈上观测方位角A为±90°的天体时，φ、z和δ的误差对结果的影响最小。φ的误差对h不产生误差，dz的系数最小。又因为

$$\cos\varphi\sin A = I\cos\delta\sin q,$$

在赤纬愈小纬度愈低时，dz产生的误差影响愈小。这种方法在靠近两极的地方不能应用。

观测高度测定时刻最精确的方法，是观测一天体到达子午圈东西两侧同一高度时的两次时刻。过子午圈时刻就是这两次时刻的平均值，因此钟面改正值是中天时的计算时刻减去这两个钟面读数的平均值。并不需要知道实际的高度值，也不需要知道纬度和赤纬值。但如果测量的是太阳或其它移动的天体，则需加上两次观测中这个天体赤纬变化的改正值。赤纬偏离常数值对观测到的天体在子午圈东西两侧的时刻T_1和T_2的平均值的影响为

$$dh = \left\{\frac{\tan\varphi}{\sin h} - \frac{\tan\delta}{\tan h}\right\}\frac{1}{15}d\delta,$$

因而视正午的钟面时刻为$\frac{1}{2}(T_1+T_2)-\delta h$。在海上观测时，还需要加上两次观测时间内船舶地理位置改变的改正值。

这个方法称为相应高度法或等高法。在卯酉圈上观测时精度最高，因为两个高度之差所引起的h的误差为

$$dh = \frac{1}{2}\ \frac{dz - dz'}{\cos\varphi\sin A'}\cdot$$

两次观测时大气折射的差也会造成误差，因此不要观测高度低的天体。如果δ接近于φ，天体将在近子午圈时过卯酉圈，两次观测之间的时间相差很短，因而仪器和大气变化造成的影响较小，可以提高精确度。

平太阳时

恒星时满足了作为实测标准的需要，能比较及时地高精度测定，但是用太阳的周日运动测定的另一个时间计量单位多少能与昼夜交替近于一致，它对民用守时及许多科学要求都是实际需要的。因此，直接而又实用的时间标准是平太阳时，或更准确地说，是对格林尼治子午圈计量的平太阳时，它称为**世界时**。原则上，它是基于太阳**视**周日运动的平均速率，实用上是通过恒星时为媒介而确定的。

太阳时角运动速率的变化，一部分是由于太阳沿黄道的周年运动的不均匀性，另一部分是由于黄道对赤道的交角造成的。因此，为了得到以太阳周年运动为基础的，同时又与视太阳时的不均匀性无关的时间计量单位，就在瞬时平赤道上定义一个假想点，它沿赤道以均匀的恒星运动运行，运行的速率仅与太阳沿黄道的周年运动平均速率相差一个微小的太阳长期加速度。对于任何经度的子午圈来说，该点的时角的周日运动实质上与太阳平均周日运动相等，仅具有因地方子午圈的变化和地球自转速率变化引起的十分微小的不均匀性。

这个假想点由它的习用赤经公式来定义。过去实用上是选取赤经的表达式与太阳平黄经的表达式几乎相同，尽可能与不变速率的恒星运动一致。这个抽象定义的点子，按传统称为**假想平太阳**，但是没有和它对应的实物，这个名词本质上只是数学公式中的一个名称。假想平太阳的赤经与太阳平黄经仅相差一个微小的逐渐增加的量，在1000年中累积约为2^s。假想平太阳时角与太阳时角相差不大于16^m。

在每一瞬间，假想平太阳的赤经确定了它相对于春分点和恒星之间的位置，它的赤经是把假想平太阳的周日运动定义的平太阳时与观测恒星的周日运动所得的恒星时联系起来的一种手段。从观测所得的恒星时计算平太阳时的数值关系，构成了平太阳时

的严格定义。

假想平太阳

对应于瞬时平春分点的太阳平黄经表达式（包括光行差位移），具有下列形式

$$L=(\lambda_0+\lambda_1 t+\lambda_2 t^2)-k+(h_1 t+h_2 t^2)$$
$$=L_0+L_1 t+L_2 t^2,$$

式中 λ_1 为太阳的恒星平运动，$2\lambda_2$ 为长期加速项，k 为光行差常数，和 $h_1 t+h_2 t^2$ 为自历元开始的黄经总岁差。一个沿赤道具有严格均匀恒星运动 μ 的点的赤经可表示为

$$\alpha=\alpha_0+\mu t+m_1 t+m_2 t^2, \tag{167}$$

它是相对于瞬时平春分点而言的，式中 $m_1 t+m_2 t^2$ 为自历元开始的赤经总岁差。通常用来测定平太阳时的假想平太阳的定义，可取

$$\alpha=L_0=\lambda_0-k,$$
$$\mu+m_1=L_1=\lambda_1+h_1,$$

因此，它的赤经为

$$\alpha=L_0+L_1 t+m_2 t^2.$$

假想平太阳赤经与太阳平黄经间的长期差，一部分是太阳的长期加速引起的，一部分是赤经总岁差的长期变化与黄经总岁差的长期变化之间的差别引起的，即

$$L-\alpha=(L_2-m_2)t^2=(\lambda_2+h_2)t^2-m_2 t^2.$$

假想平太阳赤经的数值公式是利用纽康**太阳表**中的表达式建立的。

$$\alpha=18^h38^m45.836^s+8640184.542^s T+0.0929^s T^2,$$

式中 T 为自 1900 年 1 月 0 日格林尼治平正午起算的儒略世纪数。对太阳平黄经的长期偏离为

$$L-\alpha=-0.0203^s T^2=-0.305'' T^2.$$

世界时

平太阳时是按每天 24 平太阳小时来计算的，从子夜 0^h 开始。平太阳时与恒星时的关系构成了平太阳时的定义，它是以子

夜瞬间在格林尼治子午圈上的恒星时的数值公式来表示的。这个式子是把 12^h 加在假想平太阳的赤经表达式上而得到的，任一日期的世界时 0^h 的平恒星时的数值为

$$6^h38^m45.836^s + 8640184.542^s T + 0.0929^s T^2,$$

T 按 36525 日为一儒略世纪的世纪数来计算，它从 1900 年 1 月 0 日格林尼治平午起算，一天的开始在子夜。用上式计算的恒星时为平春分点的格林尼治时角，是世界时 0^h 的定义。根据这个公式就可以由测定恒星时的观测来确定世界时 0^h 这个瞬间。

要确定世界时 UT，需要根据上式计算相邻各天的世界时 0^h 的格林尼治恒星时，在计算中相邻的 T 值的间隔取均匀的区间 1/36525，这区间表示相邻二天的间隔。这相当于用平太阳日数计算 T。根据参数 T 的每 1/36525 的间隔，计算出相应的时角值，春分点通过两个相应时角值所需的时间就是一个平太阳日。

在认识到地球自转的变化以前，春分点达到表列时角的瞬间被认为是假想平太阳下中天的瞬间，因为当 $\tau = 12^h + \alpha$ 时，平太阳的时角 $\tau - \alpha$ 为 12^h，这是求 0^h 的恒星时的表达式的原始想法。可是这个表达式，虽则在数值上等于假想平太阳赤经 $+12^h$ 的表达式，实际上代表了平春分点的时角运动，因此由于地球自转的变化，这个运动的速率具有少量的变化。同时，假想太阳相对于春分点的运动速率与地球自转无关，从公式结构上说它的赤经表达式代表相对于 T 的严格均匀的恒星运动。因为确定连续子夜瞬间的表列春分点时角，是用约定的 T 的均匀间隔计算的，数值上它们等于假想平太阳在它的均匀恒星运动中等间距的赤经值，就象岁差对春分点时角和对赤经有相同的影响一样，但是在均匀时间的略微不等的时间间隔内，要求春分点描绘出数值上相同的时角间距，而假想太阳的恒星运动量则略微不等，因此它的赤经 $+12^h$ 在同一瞬间并不象春分点时角那样，不能达到 0^h 的恒星时的表列数值。

根据定义春分点到达表列时角的瞬间为世界时 0^h。可是在

此瞬间，假想平太阳赤经 $+12^h$ 与表载时角的数值略有不同，差值是一个变量，取决于地球自转变化的累计效应，因此平太阳不是正好严格地在下子午圈上。世界时 0^h 的恒星时，并不精确地为平太阳赤经加 12^h，这个以前经常用于 0^h 的恒星时的名称，在天文年历中已不用了。

平太阳时的确定

任一瞬间在任一经度的子午圈上地方平太阳时，是利用世界时 0^h 的恒星时的历表以及恒星日长度与平太阳日长度的比率，根据该瞬间观测的地方恒星时来确定的。地方恒星时和地方平太阳时两者都与在同一瞬间它们在格林尼治子午圈上的数值不同，都相差一个经度值(以 $15°=1^h$ 表示)。在任一格林尼治恒星时的瞬间，自世界时 0^h 以后用恒星时单位表示的时间间隔，可以立即从该瞬间测定的恒星时减去表列的世界时 0^h 的恒星时而得到。这个瞬间的世界时与以平太阳时为单位的时间量度是等量的，由恒星时间隔乘以平恒星日与平太阳日的比率而得。

在一个平太阳日中春分点时角的变化，等于 24^h 加上对于一天的 T 的数值增量而言的世界时 12^h 的平恒星时的增量。因此，在一平太阳日中平恒星时的时间间隔为

$$24^h+\frac{8640184.542^s+0.1858^sT}{36525}=86636.5553605^s+0.000005087^sT,$$

如不考虑到微小的长期变化，每 86400 平恒星秒的一恒星日与这个时间间隔的比率为：

$$\frac{\text{平恒星日}}{\text{平太阳日}}=0.997269566414.$$

任一瞬间的世界时可以用自世界时 0^h 以后的恒星时间间隔乘上这个固定的转换因子求得。

反之，平太阳日与平恒星日的比率为

$$86636.5553605/86400=1.002737909265.$$

相应的日长的量度为

$$平太阳日 = 24^h03^m56.55536^s 平恒星时$$

$$\begin{aligned}平恒星日 &= 1-0.0027304336 平太阳日\\ &= 23^h56^m04.09054^s 平太阳时\\ &= 24^h-3^m55.90946^s 平太阳时\\ &= 86164.09054 \quad 平太阳秒\end{aligned}$$

在任一地方子午圈上，以时间表示的向西为正的经度值，在数值上等于在同一瞬间世界时大于地方平太阳时的数值。因此，在地方平时为 0^h 的瞬间，经度值就是从世界时 0^h 以后在格林尼治所经过的平太阳时的间隔的量度，对世界时 0^h 的格林尼治恒星时，加上以恒星时为单位的这个平太阳时的间隔相应的量度，就得到当平太阳时在地方子午圈上为 0^h 这一瞬间的格林尼治恒星时。如同平太阳时一样，格林尼治恒星时大于同一瞬间的地方恒星时的数值为西经的经度值，因此，当地方平太阳时 0^h 时的地方恒星时，可以在前面世界时 0^h 瞬间的表列格林尼治恒星时上加一个改正值而直接得到，应用这个改正值可以把以经度计量的平太阳时的间隔换算到相应的恒星时的间隔。这个归算量对经度每小时为 $+9.8565^s$。同样，格林尼治恒星时 0^h 的世界时，可以归算到任意经度的地方恒星时 0^h 的地方平太阳时，只要加上经度每小时为 -9.8296^s 的改正值即可。

因此，把观测到的地方恒星时化到地方平太阳时，可以按下例的作法来进行。

日期	1964 年 7 月 7 日
经度	5^h41^m 西经
观测的平恒星时	$23^h05^m04.131^s$
7 月 7 日世界时 0^h 的格林尼治平恒星时	$18^h59^m58.112^s$
经度改正	$+56.018$
地方平太阳时 0^h 的平恒星时	19 00 54.130

观测的地方平恒星时	23 05 04.131
自地方平时 0^h 以后的恒星时间隔	4 04 10.001
化到平太阳间隔的改正	−40.001
地方平太阳时	4 03 30.000

如恒星时的间隔小于 $3^m56.5^s$ 则有两个平太阳时与恒星时相对应，一个在上一个 0^h 之后几分钟，另一个在下一个 0^h 以前几分钟，平太阳时的那个。在地方平太阳时 0^h以后小于 $3^m56.5^s$的间隔中的地方恒星时，将在同一平太阳日内出现第二次，从这两个恒星时的任一个中减去 0^h 的地方恒星时，会得出同样的数值结果，可是对于第二个值的实际间隔比第一个值大 24 个恒星时。

反之，从平太阳时换算到平恒星时，可以对 0^h 的地方平恒星时加上以恒星时为单位的地方平太阳时的相应量度而得，例如：

世界时 0^h 的格林尼治平恒星时	$18^h59^m58.112^s$
经度改正	+56.018
地方平太阳时	4 03 30.000
地方平时化为恒星时间隔的改正	+40.001
地方平恒星时	23 05 04.131

平太阳时与地球自转的关系

当加上子午圈变化的改正后，依照地球的自转变化定义的时间计量就跟平太阳时严格一致了。应用一个固定换算因子从恒星的计量换算到平太阳时计量，由它来换算世界时 0^h 以后经过的时间间隔，这种方法所确定的平太阳时，将保持平太阳日与恒星日的比率不变，而不管地球的自转速率变化如何。平恒星日与地球自转周期的比率实质上是常量，平恒星日比自转周期短，相差的量为每天的赤经岁差

$$0.008412^s + 0.000005086^s T,$$

式中 T 为 1900 年以后的世纪数，而由日长变化引起的每天岁差量的长期变化以及进一步的变化完全是微不足道的。因此，相对

于固定子午圈的平恒星时以及由此算得的平太阳时，实质上与地球的自转是具有同样变化的。

若不考虑岁差的长期变化，平恒星日与自转周期的比率为0.99999 99029。自转周期为1.00000 009709平恒星日。利用平太阳日与恒星日的比率，得

$$
\begin{aligned}
\text{平太阳日} &= 1.002\,737\,8119\ \text{自转周期} \\
\text{自转速率} &= 15.041\,067\,18''\ \text{每平太阳秒} \\
&= 0.000\,072\,921\,151\ \text{弧度} \\
\text{自转周期} &= 0.99726\,96632\,4\ \text{平太阳日} \\
&= 23^h56^m04.0989^s\ \text{平太阳时}.
\end{aligned}
$$

因为平太阳时相当于地球自转定义的计量单位，在认识到对于均匀时而言地球自转是变化的以前，曾把它当作均匀的。最初选取假想平太阳的周日运动来表示平太阳时，其目的是为了得到均匀的时间计量单位，而不是假定把实际平太阳搬到赤道上，因为太阳黄经的平运动有长期的加速。对于固定子午圈的假想平太阳时角运动的速率，是严格地与自转速率成比例的，因为周日视运动是它沿赤道的均匀周年运动和地球角运动的合量。在任一瞬间平太阳时是以假想平太阳的时角加12^h来定义的，而从恒星时来计算平太阳时的方法则是想要给出对这个时角的量度。

然而，由于自转的变化，根据上述计算方法所得的平太阳时，并没有给出最初提出这个方法时的精确的几何解释。平太阳时实质上是由抽象数学公式定义的一种形式上的计量单位，便于确定0^h的春分点时角。虽则它是间接地建立在太阳和假想平太阳的周日运动基础上，但它的定义对两者都没有固定关系，而是由实际计算方法所定义的。

为进行时间计量，并不需要使平太阳时严格地与太阳的平均周日运动的任何特定关系相符合。这样就解决了纽康提出的困难，纽康是考虑到假想平太阳对实际平太阳逐渐增加的长期偏离而提出这困难的。最初，在建立精确的时间计量系统以前，并没有

注意到在太阳平黄经与假想平太阳赤经数值之间的差别。纽康强调了这种差别，他认为这是平太阳时计量中的一种不和谐性。

天文时

在1925年以前，在天文实测工作中平太阳时是从正午开始计算的，而不是象民用计时那样从子夜起算。自正午开始的平太阳日称为**天文日**，而自正午起算的时间称为**天文时**，以便与自子夜起算的民用时相区别。国际上一致同意，天文时的应用到1924年底终止。

在这终止前后的年份里，应用天文年历和有关的附表时需要当心以避免由于名词混乱引起错误。自格林尼治**子午圈**平正午起算的平太阳时称为**格林尼治平时**，自地方子午圈的平正午计量的时刻称地方平时。1925年美国天文年历中引入了世界时，但所叫名称仍各不相同。在**英国航海历书**中对于新的计量仍用同一名称——**格林尼治平时**，而在**美国天文与航海年历**中则采用**格林尼治民用时**这个名称。最后以世界时代替了这两个名称。然而，现在英语国家的航海出版物中仍是用**格林尼治平时**，而不用世界时这个名称。

为了区别这两种都称为**格林尼治平时**的不同的计量，对1925年以前的日期，如果当时称为格林尼治平时则应使用**格林尼治平天文时**这个名称。而对1925年内或以后的日期，则只是采用自子夜起算的时间。

航海时

直到19世纪中叶左右，航海者应用的日期与从子夜开始的民用日期相同，但是从子夜**以前**的正午开始，而不是象天文上那样从下一天的正午开始。

因此，航海日相应于天文日以前24小时开始。另外，和天文日不一样，航海日用两个12小时周期计量，第一个12小时用P.M.(下午)表示，第二个用A.M.(上午)表示。

平太阳时系统

平太阳时的计量依据于（a）对于假想平太阳赤经所采用的表达式，由此可以导出从恒星时计算平太阳时的公式；（b）选用的恒星赤经，它们确定了春分点的位置。平太阳时的**定义**仅取决于（a）；而从**观测**所得的数值的精确度则取决于（b）。

恒星的赤经系统是直接根据观测来建立的，随着更精确的观测的积累就需经常加以修订。假想平太阳的赤经是根据约定选取的，它与真太阳的运动相联系，但是强加在假想平太阳上的条件妨碍了它的赤经与间隔约为 $23^h56^m04^s$。根据近似的平太阳时，总是可以确定其中所要的太阳平黄经严格一致的要求，而作为时间计量的基础来说，定义假想平太阳赤经的表达式实质上是任意的。然而，在过去的一般的实际工作中，只要一旦选用改进的太阳表，为了尽可能与太阳的平黄经相符合，就要修改这个表达式。

随着每一次对太阳理论的改进，选用不同的太阳表，就必须修订平太阳时的系统，这就引起了平太阳时计量中的不连续，或者说需要对以前每一个瞬间的时间计量都加上一个改正值。恒星时则不受影响，但在当对基本恒星系统或常数系统的每次修正以及在计算恒星视位置所用的公式改变后，所计算的恒星时和平太阳时也会引入一个类似的不连续性。

各种时间测定，除非是在同一系统内，否则互相之间不能比较。特别是对天文观测进行归算和讨论时，记录的观测时刻必须归算到同一恒星系统和同一太阳表。为此，必须把确定时刻所用的方法搞清楚。在长时期系统观测中，实际上有过许多改变。因为对于时间计量的基本原理和平太阳时的实际意义缺少清楚的了解，过去由于这些改变曾造成混乱及错误。

实质上，在太阳理论中常数 L_0 所代表的，并不是确定在作为历元的某个独立确定的平太阳时瞬间的太阳位置，而是在平太阳时尺度中确定历元瞬间的位置，这是通过该瞬间太阳的观测位置来确定的。在时间测计系统中，任何特定瞬间是由太阳位置来

确认的，因为真太阳与假想平太阳之间具有特定的关系，用其它别的方法都不能在平太阳时尺度中对这个瞬间加以明确的认定。对于实际常规精确测定时刻间而言，观测太阳并不是一种实用的方法，但因为平太阳时尺度是由太阳定义的，需要根据实际的太阳观测在这个尺度上来确定一个参考点。因此，历元（即在$t=0$的瞬间）是由在某些特殊时机测定太阳位置来规定的，但不是直接依赖于任何个别的观测，而是应用非直接测定的一些方法，这是建立在很长的时期的大量观测的基础上的，以获得尽量精确的结果。

这个结果是用假想平太阳在某一指定时刻，如1900年1月0.0^d，在天球赤道上的位置L_0的数值这种形式来表达的，但它的实际意义正好相反。事实上，当假想平太阳位于L_0时的瞬间，规定用数字符号记为0.0^d，在这一特定的周日运行轨迹中，这一瞬间用年代学的符号则记为1900年1月0日。在这前后任何其它的瞬间也可被相应的符号确定下来，它们都和假想平太阳的相应的位置所对应。历元虽则不是由任何实际观测的事件定义的，但借助太阳表为媒介与每次太阳观测相联系，而将历元决定下来，这些太阳的观测正是构成太阳表的基础。通过确定事件发生的平太阳时的瞬间，就可以认为事件发生或观测的瞬间是对应于这个历元的，因此就与这些太阳表所定义的时间计量系统相一致。

然而，把假想平太阳的赤经尽可能接近真太阳的平黄经，逻辑上这是为了实用方便而选取的，并不是必要的。平太阳时的计量如果离开视太阳时的平均计量太远就不方便，而如果太不一致，就不能满足实际需要，可是作为时间计量，它不是一个逻辑错误。

用假想平太阳的不同的赤经表达式所得的不同的时间计量间的分歧不能看作是一种误差，而仅表示采用不同的平太阳时尺度之间的差别，这些不同的尺度与由太阳周日视运动定义的时间有

不同的关系。在这些不同的关系中，太阳的位置是与太阳在这一位置的瞬间的不同数字符号相联系的。为了计量时间，两种平太阳时尺度的相对位移是没有关系的。

此外，太阳运动还受到许多很长周期的不均匀性变化的影响，而在一定范围内把它假设为平运动的变化及在定义太阳平黄经时考虑它的长期变化是有利的。因把假想太阳严格地按同样方式来定义，决不是必需的。例如，在地球运动的各种长周期不均匀性中，汉森发现了一种周期为 1850 年、系数为 7″ 的变化。纽康在讨论这种不均匀性时评论说[1]：

“……汉森和勒威耶导出的这一项，它对于平太阳时的计量已造成一个并非不重要的变化。在天文学中所用的太阳时，是用太阳平黄经来计量的，它是从太阳真黄经中减去所有影响到它的运动观测到的周期不均匀性而得到的。上述不均匀性在我们的时代达到最小值。这个结果可以作为一个发现，自从精确的天文观测开始以来，太阳黄经的观测值在改正了所有以前已知道的不均匀性后，仍有约 7″或近于平时 0.45^s 的变化。这样，通过汉森和勒威耶表的引进，使平正午的恒星时中产生了这个数量的变化，在所有确定的平时中也产生了相应的变化。

“这种变化是否合理是个有争议的问题，唯一的实用目标就是把一千年前太阳时的确定及一千年以后太阳时的确定与现在太阳时的确定统一起来。然而，实际上以前根本没有确定过太阳时，19 世纪确定的和 20 世纪确定的太阳时之间是否有 1 秒的差异，以及在一千年以后确定的太阳时是否存在麻烦，这一点还是有问题的。我们还必须看到……不均匀性的性质，当发现它在一、二千年后仍存在的话，必是十分不确定的。我们自己在测定太阳平运动时可能存在的误差也会影响到结果。如果一千年后的天文学家把我们的时间计量和他们的统一起来的话，他们就很可

[1] S. Newcomb, Astr. Pap. Amer. Eph. V, Pt. I, 54.

能把贝塞尔的平黄经作为我们的时间标准，如同他们把汉森和勒威耶改正后的平黄经作为标准一样”。

当改进的太阳表建立以后，对平太阳时系统进行实际修改并不是重要的。只有当用同样规定的假想平太阳来定义同样形式的时间计量，这样才能永远保留下去的。对于太阳理论的修正，只是改变了任一给定瞬间的太阳理论位置和实际的平太阳位置，而不是去改变时间计量来使它与太阳的理论位置一致，正如现在对太阳外任何天体的理论进行修订一样。过去人们经常提倡使用这种方法❶。此外，只要由纽康表定义的历书时保留作为时间的力学计量单位，将来就不会对假想平太阳作修正。在以历书时作为独立变量的太阳的改进理论中，起始历元的平黄经数值和平运动必须保持与纽康理论一致，它们在这种时间计量中是固定的常量。唯一重新确定的轨道要素是近地点的黄经和偏心率，而平太阳时的定义不需要改变。真太阳的平赤经还依赖于所采用的岁差和光行差常数，但与纽康在定义假想平太阳时所采用的数值中的任何不一致性，对于定义时间计量系统而言，是不重要的。

平太阳时计量的归算

从任何平太阳时系统归算到用不同的太阳表定义的其它系统时，归算值的一般表达式可以从（167）式直接得到，令

$$T = T' + \Delta T',$$

其中T和T'为在**同一瞬间**用假想平太阳赤经的两个不同表达式定义的平太阳时的量度，显然

$$\Delta T' = -\int (\Delta\mu')\, dT + \text{常量} = -\frac{\Delta\alpha}{2\pi}\text{平太阳日}. \qquad (168)$$

例如，把纽康表中假想平太阳的赤经与勒威耶表的表达式相比较，得：

历元　1900年1月0.5^{d}U.T.

❶ 见 Sir John Herchel, “Outlines of Astrometry”, articles 935-939.

纽康： $18^h38^m45.836^s+8640184.542^sT+0.0929^sT^2$

勒威耶： $18^h38^m45.884^s+8640184.597^sT+0.0946^sT^2$

纽康-勒威耶： $-0.048^s-0.055^sT-0.0017^sT^2$

在 1940 年，这个差值达 -0.070^s，因而

$$T(\text{纽康})=T(\text{勒威耶})+0.070^s.$$

因此，对于格林尼治平子夜时的恒星时刻而言，在纽康系统中比勒威耶系统要**早到** 0.070^s。严格地说，这个差值是等于平太阳时 0.070^s 的恒星时间隔，但这两个时间到小数后第三位的数值是相同的。这样，我们从 1940 年天文年历中得：

	0^hU.T.的恒星时
美国天文年历（A.E.）	$6^h38^m01.884^s$（纽康）
法国天文年历（C.T.）	$6^h38^m01.954^s$（勒威耶）
A.E.—C.T.	-0.070^s

从平太阳时到均匀时量度的归算，经常在许多地方要用到。特别是，只有把观测瞬间时刻的实测值归算到用来表示引力运动理论的均匀的力学时间计量，才能把天体的观测位置与理论位置进行比较。在这两种时间尺度上的数值相等的时间计量表示两个不同的时刻，而在把观测与理论进行精确比较时，在平太阳时 T 的观测位置必须与**同一瞬间**的均匀时的理论位置作比较，一般来说，在这一瞬间均匀时将有**不同的数值** $T+\Delta T$。

实际工作中，归算量 ΔT 必须从实测得到，因为地球自转速率的变化不能从理论算得。因此，地球自转确定的平太阳时必须与这个跟自转独立无关的时间计量来比较，它与力学的时间计量 t 有已知的关系。为此，在长时期中用计量时间来确定 ω 变化的唯一实用方法是观测月球和行星的公转运动。原则上，用任何天体的轨道运动来定义和用地球自转来定义时间计量是等价的。例如，用地球公转引起的太阳黄经的**周年**视运动来定义的时间计量，如同用地球自转造成的时角周日运动来定义是一样的。用对于瞬时平春分点的太阳黄经的平运动来定义的时间计量是以回归

年为单位的。

对于已经建立足够精确的力学理论的天体，依据平太阳时对它进行观测，将这种观测与引力运动理论比较，等价于将平太阳时间计量与均匀的力学时间计量进行比较。用任一瞬间天体在恒星中的视位置来**辨别**这一瞬间，它与力学时间度量 t 的值是不同的，后者是引力运动表中相应于天体这个位置的值。t 与天体在这个位置的平太阳时的瞬间 T 所相差的量，就是把 T 归算到均匀时计量的改正值 ΔT。在理论的可靠程度以及对运动的观测精确度所限定的极限内，用平太阳时计量的观测位置与用数值上相等的表载时间所计算的历书位置之间的差异，可归因于这样的事实，即这两个相等的时间计量实际上所表示的是两个间隔不同的瞬间，因此 ΔT 就是天体经过上述观测的位置差异的这段距离所需的时间间隔。

根据在时间间隔 ΔT 中天体角坐标 γ 的改变，位置的差异可表示为 $\Delta\gamma = n\,\Delta T$，其中 n 为每个 T 的单位中 γ 的运动速率，而将平太阳时化到由 γ 运动定义的时间计量的归算量为 $\Delta T = \Delta\gamma/n$。在这个关系式中计量的基本单位是平太阳的日长 P。实际工作中，对于这个关系式来说，不需要将这个单位与 t 的均匀单位加以区分，而可以用与单位无关的比率的形式来表示这个关系式，有时这种形式对于其它方面是有用的。由天体坐标 γ 的运动定义的时间计量，可以用 γ 增加 2π 的时间间隔 Γ 为单位来表示，用这个单位，可以得到 γ 在 T 的每个单位中的运动速率 n 为

$2\pi\Big/\left(\frac{\Gamma}{P}\right) = 2\pi\left(\frac{P}{\Gamma}\right)$，在时间 ΔT 内的运动量为

$$\Delta\gamma = \left(2\pi\frac{P}{\Gamma}\right)\frac{\Delta T}{P}.$$

因此，从任一瞬间 T 的量度值化到同一瞬间 t 的量度值 $T+\Delta T$ 的归算量为

$$\Delta T=\left(\frac{\Gamma}{P}-\frac{\Delta\gamma}{2\pi}\right)P.$$

更一般地说来，这个相同形式的表达式适用于周期为 P_1，角坐标为 θ 的任何天体的运动所定义的在任何瞬间的时间计量 T_1，也适用于周期为 Γ，角坐标为 γ 的任何其它天体的运动所定义的在相同瞬间的时间计量 $T_1+\Delta T_1$，

$$\Delta T_1=\left(\frac{\Gamma}{P_1}-\frac{\Delta\gamma}{2\pi}\right)P_1, \tag{169}$$

式中 $\Delta\gamma$ 为对于两个瞬间的 γ 值的差异，这两个瞬间具有同样的计量数值。

任何其它天体的坐标 γ' 受到的影响，将正比于 T 的每个单位的运动速率 n'，因为：

$$\Delta\gamma'=n'\Delta T,$$

因此

$$\frac{\Delta\gamma'}{\Delta\gamma}=\frac{n'}{n}.$$

这样，地球自转速率变化对太阳、月球和行星用平太阳时观测的黄经值（用弧度来表示）的影响，将与它们的平均运动成正比。

在对观测进行讨论时，平太阳时变化的改正值可采用两种形式，一种是对观测时刻加上 ΔT 的归算量，另一种是对观测位置加上相应的改正。此外，ΔT_1 的一般表达式（169）包括了作为一个特例的（168）式，后者是将平太阳时的一个系统化算到由不同的太阳表定义的另一个系统的归算量。例如，布朗●把在格林尼治对月球的观测与他的月球理论相比较，用来为建立月历表确定轨道常数值。他对月球的观测黄经加上各种春分点位置以及各种平太阳时系统的改正值，这些位置和系统是在整个观测期间内不同时期所采用的。应用这些改正值把观测归算到纽康的太阳表和纽康的基本恒星表系统。把观测时刻归算到这个系统所需要

● E.W.Brown, Mon.Not.Roy.Astr.Soc.73, 697 (1913).

的改正值的形式是利用下列关系式转换为对月球观测位置的改正值的形式：

$$(\Delta L)'' = \frac{-15(\Delta\overline{\alpha}_{\odot})^{s}}{(P_{\mathbb{C}})^{d}} = -0.55(\Delta\overline{\alpha}_{\odot})^{s}.$$

平太阳时观测值的改正值的幅度从 $+0.17^{s}$ 到 -0.96^{s}，对每 1^{s} 来说，月球平黄经 L 所加的改正为 $-0.55''$。

时　差

用真太阳周日运动定义的视太阳时，其计量的数值为太阳时角加 12^{h}，它在目前的计时和天文学应用中已不再是重要的了。在美国天文年历和英国天文年历中，自1965年开始不再刊登时差值，而代之以太阳中天的历书时，而对视太阳时不再给以参考基准。

可是在测绘和航海的应用中，仍旧存在需要确定太阳时角的方法。在英国和美国天文年历办公室准备的航海和测绘历书中，把时差规定为加在 12^{h} + U.T.上的改正值，以求得格林尼治太阳时角。或更普遍地来说，这个改正值是用于 12^{h} 加地方平时，以求得太阳的地方时角。这种计算取决于平太阳时和历书时之差 ΔT，在比较短的时期内，为了计算的需要可以用外推法提前求得 ΔT 的估计值，以使计算达到所需的精确度。视太阳时的定义为 12^{h} 加太阳时角，但应尽量避免使用这个术语。

在精确时钟得到应用以前，视太阳时普遍用在守时和天文年历中。在需要平时的场合，就根据时差由视时来求得，表载的时差值是时差＝平时减视时。绝大多数国家在18世纪末或19世纪初，才在民用计时中应用平时。1830年的德国天文年历中，表列的自变量由视时改为平时。而在英国航海历书中，从1834年开始改变。那时，表列的时差值是视时减平时，用来从平时求视时，可是在太阳的地方中天历表中，刊载的是反号的改正量，便于从观测到的太阳过子午圈的时刻求地方平太阳时。

第十六章　历 书 时

太阳、月球以及行星的星历表，是根据它们的运动的引力理论来加以计算的。在这类星历表中，表列时间是由动力学定律所定义的某种均匀时间计量系统，而不是由地球非均匀自转所定义的平太阳时。但是，在最终证实地球自转速率确实在变化、并且又在实际工作中正式认识到这一点之前，作为星历表引数的则是世界时。因此，星历表理论位置同观测位置之间所存在的差异，并不完全是由观测误差或者理论的不完善所造成的。任何瞬间的平太阳时，在作了有关子午圈变化的改正之后，并不就是一种均匀的时间计量系统，它同后者所相差的就是由地球自转变化所引起的不均匀性的累积量。用平太阳时观测的天体位置，与同一数值的表列时间的星历表位置之差，就是在相当于这两种时间计量系统之间的累积差异的那一段时间间隔内，该天体所运动的量。通过对太阳、月球以及行星的观测位置与表列位置之间所存在的表观偏差的分析，最终证实了地球自转速率存在着某种长期的减速运动，通常把这种现象归因于潮汐摩擦，此外还迭加了由于某些未知的地球物理原因所造成的不规则变化。另外，通过天文测时与石英晶体钟的比较，还发现了一些小的周期性变化。

尽管自转速率的长期变化和不规则变化的量值极其微小，因而不可能直接地探测到，但是由于它们的累积效应，在经过了一段足够长的时间之后，由它们所引起的一些现象还是可以观测得到的。自古以来的日月食和掩星记录，一直是用来确定这种长期减速运动的主要手段。记录下来的时间和事件概况，同根据太阳和月球的引力理论所算得的结果相差很大。确定不规则变化有两个办法，一个是根据近代所作的比较精确、也比较完整的日月食和掩星观测记录，另一个是把月球和内行星的观测结果同它们的

引力理论来进行比较。

人们不断地用各种月球运动理论来表示所观测到的运动情况，但相继都遭到了失败，这种失败为说明自转速率可能不是恒定不变的这一点提供了最初的事实根据。同理论之间的偏差以月球最为明显，这是由于月球离开地球比较近，因而它的运动很快，而同时对不均匀性的观测所能达到的精度也就比较高。这种偏差是很大的，以至在天体力学的历史上从来就没有能用任何一种引力理论来表示所观测到的月球运动。早期月球运动理论之所以失败，部分原因在于理论上的不完善；但是，通过各个研究工作者前赴后继的努力，月球运动理论不断地得到改进，变得越来越完善，而同时随着观测资料的不断累积在其它天体的运动上也检测到了类似的偏差，因而有关地球自转可变性的证据也就逐步随之而增加。

月球同它的历表位置之间的偏离量具有不规则的变化，而同时月球又看起来在逐渐地超前于它的计算位置，就好象是用一只逐渐减慢而速率又在作不规则变化的钟来记录它的运动情况一样。由于天文观测记时用的钟始终是同地球自转相一致的，因而月球对于理论位置的这种偏差便证明了地球速率正在逐渐地减慢，同时还存在着不规则的波动。在太阳和内行星的运动中同样存在着对于理论位置的偏差，而偏差的大小与它们的平均运动成正比，这一点是由斯宾塞.琼斯● 确定的。对于月球来说，在同历表位置的偏离量中，包括了由于实际存在着的某种月球轨道运动的长期变化所造成的一项偏差，月球的这种长期变化是由于动量守恒定律的关系随同潮汐引起的地球自转的减速运动而来的。除此之外，月球和其它天体的偏差则是在同样的时间间隔内，它们各自的平均运动所应当产生的位移量。这后一点实际上就是地球自转存在着长期变化和不规则变化的明证。

大约在1650年之前，观测资料还没有能足以确定不规则变

● H. Spencer Jones, Mon. Not. Roy. Ast. Soc. 99, 541 (1939).

化，在那时只能得到十分粗略的数值。这一点使得确定长期减速运动的精度受到了限制。根据古代的观测资料所确定的减速运动的速率，仅仅是从观测之时起所经过的那段时间内的平均值，它包括了同时存在而又未知的不规则变化的累积效应，而且在一段很长的时间间隔内减速运动速率可能不是恒定不变的。对于因潮汐摩擦引起的日长增长速率的数量级所普遍采用的估计数值为每十万年1秒，但是这个数值有相当大的不确定性。

必须把在任意给定的时期内日长的总增加量，同根据地球自转所得到的时间计量系统中的累积减少最仔细地区别开来。由于存在每十万年1秒的速率，目前日长仅仅比2000年前的日长增长了 $2000/100000=0.02^s$，但是，因自转速率的连续变化所引起的累积钟差是随着所经过的时间的平方而增加的。在上述这段时间间隔内共有730 000天，其平均日长比开始时的长度长了 0.01^s，因此，由于地球自转的减速运动所造成的平太阳时计量系统中的总的累积减少量为 $0.01\times730\,000=7300^s$。地球作为一架钟，它在过去的2000年内大约走慢了2个小时。就每十万年1秒的速率来说，日长的增加量是 2.74×10^{-8} 秒·日$^{-1}$。从开始那天起以后的各天都比第一天来得长，在 n 天后由此造成的日长总增长量为

$$2.74^s\times10^{-8}(1+2+3+\cdots+n)=1.37^s n^2\times10^{-8},$$

上式可以有足够的精度，式中右端已经略去了在对算术级数求和的公式中所含 n 的项，因为它比 n^2 小得多。

地球自转的周期性变化不会造成累积效应，因而仅仅当变化大到足以为某种手段所直接观测到时才有意义。随着天文测时精度有了很大的提高，以及越来越好的时钟的出现，短周期变化已经在测时工作中直接观测到了。造成所观测到的这种周期性变化的原因，部分是由于地球和海洋的潮汐形变所引起的惯性矩的变化，但是，自转速率的主要的周期性变化则是由于气象因素所造成的周年变化。

有关这些短周期变化的证据，首先是由斯多依科在1937年通过对于不同国家在时间服务中所用的各个石英钟速率之间的相互比较而获得的。巴黎、华盛顿和柏林的石英钟看来在春天都走得偏快，在秋天走得偏慢，各个钟快慢的情况彼此间是协调一致的，而且快慢的程度也大致相同。这种情况只要用地球自转速率的季节性变化就可以得到合理的解释。在以后的一些年内，斯多依科的结果又为其他人所证实。在一年中，上半年自转的速率比平均值来得慢，而一台均匀走动的钟就比平太阳时来得快；到了秋天地球转得比较快，因而这台钟看起来就走得慢了。

在不同的年内这种变化的量是相差不大的。日长的周年变化小于0.001^{s}。对平太阳时的不均匀性进行调和分析后得出：周年项的幅度为30ms，这一项主要由气象因素引起；周期为6个月的一项的幅度为10ms，这是由太阳潮S_{sa}波引起的；由月潮Mf波引起的一项的周期为13.6天，幅度1ms；而由月潮Mm波引起的一项的周期是27.6天，辐度为1ms。

从1956年1月1日起，由国家时间服务所确定的世界时，要加上两项改正，一项是由观测到的地极移动而造成的子午圈变化所引起的，另一项为地球自转速率周年变化外推值的改正。从观测直接得到的世界时用符号UT0来表示。对UT0作极移改正后所得到的时间用UT1表示，UT1实质上与地球自转的角速度成正比，因为由潮汐引起的垂线变化所造成的不均匀性实际上可以忽略不计。对UT1进一步作有关季节性不均匀性改正后所得到的时间系统称为UT2，除了观测误差以及恒星位置误差的影响之外，鉴于长期变化是极其微小的。因而在UT2中所包含的就仅仅只是由自转的不规则变化以及由地球的潮汐形变所引起的少量的不均匀性了。

从1947年1月1日起，极移改正首先为格林尼治天文台所采用。由于从观测无法立即知道极移，因而所能加的只是一种近似改正，但是根据华盛顿每天所确定的纬度变化可以来进行某种

估计，因为它和格林尼治的经度差几乎等于90°。从1953年7月1日起格林尼治天文台开始考虑季节性不均匀性改正。在不同的时间内，其它几个天文台也引入了各种不同的改正值。1956年建立了一项协调计划，根据这项计划，由几个互相合作的天文台进行纬度变化的观测，然后将观测结果很快地送交国际纬度服务加以利用，国际时间局根据这些观测，以及由前几年观测所得出的有关季节变化的一项改正，定期出版从UT0归算到UT2的改正值。

根据UT2所发播的时号，及时地为实用部门提供了时间和频率标准，这种标准在大约一年的时间间隔内是**相对地**保持均匀的，但是为了得到严格均匀的时间计量系统，必须确定由世界时归算为历书时的改正值 ΔT。

将平太阳时归算到均匀时计量系统

理论工作中用到的是均匀时，观测工作中采用的是平太阳时，这就引起了理论计算的天体运动和观测所得的天体运动之间的矛盾，原则上说这种矛盾是可以通过把引力理论转化到平太阳时系统，并且以平太阳时作为独立变量来加以克服的。其实，在肯定地球自转速率确实在发生变化之前，而且实用上也还没有看到对平太阳时和均匀时系统有加以区分的必要之时，实际工作中已经不明显地采用了与上面所述的办法相当的处理方法。在根据引力理论所算得的星历表中，作为引数的是世界时，而一旦有必要时，比如在有关日月食和掩星的精密计算工作中，以及有时还在航海历中，就把根据前几年的观测所确定的改正值加在表列位置上，以使改正后的位置同星历表涉及的这段时期内所应当观测到的位置尽可能地取得一致。

但是，对于星历表，特别是对于月历表来说，由于所必须加的改正值越来越大，因此在精度要求很高的时候，确定这些改正值是一件复杂而又困难的事，而且在提前进行计算时，不可避免地

总会有一定的误差。另外一种做法是对观测所用的平太阳时系统进行改正，从而把它归算到一种均匀时系统。这种做法的优点是可以使引力理论和星历表保持不变，而且避免了从动力学均匀时换算为平太阳时所出现的理论上的困难。由于越来越需要对世界时的不均匀性的具体情况进行高精度的测定，采用这第二种做法实际上也是势在必行的了。就目前一般所要求的精度来说，要想通过把理论表达式转换为世界时的途径来建立精密星历表是完全不切实际的，特别对月球来说更是如此。相对于均匀时的变化不可能在事先精确地加以测定，要想精确地加以测定只能依靠持续的观测。此外，对于许多实际工作来说，建立一种均匀时标准已经变得是必不可少的了。

为了建立均匀的时间计量系统，历元以及对世界时的改正值 ΔT 的初值是任意的。过去，不同的作者利用不同的观测资料，或者根据不同的计算系统，已经给出了若干种不同的改正表。国际上一致同意采用的一种改正值是由克莱门斯● 推导的，利用这个改正值可以把世界时归算为由纽康**太阳表**所定义的时间计量系统。根据1950年巴黎天文常数会议的推荐，1952年国际天文学联合会采用由这个改正值所得到的均匀时作为标准，取名为历书时。根据会议的决议，历书时与1900年至1905年间某一瞬间的世界时相一致，而且历书日近似地等于19世纪内平太阳日的平均长度。

这个改正值是根据斯宾塞.琼斯所发现的太阳平黄经的观测值与表列值之差而推导出来的。观测值对表列值的偏差是长期变化和不规则变化两部分之和。不规则偏差部分与月球平黄经观测值中类似出现的不规则变化成正比。太阳平黄经对于表列值的不规则偏离的数值为 $0.0747B$，这里 B 为月球相应的偏差，而 B 的系数为两者的平均运动之比。

● G.M.Clemence, Astr.Jour.53, 169 (1948).

根据琼斯的测定结果，为了得到当观测时间以世界时表示时的观测值，对于纽康表中表列太阳平黄经所需加的改正值为

$$\Delta L_N = +1.00'' + 2.97''T + 1.23''T^2 + 0.0747B,$$

其中T表示世界时，从1900年1月0日格林尼治平正午起算，以儒略世纪为单位，在这个历元时，$B = -15.94''$。然而，在这一改正值中既包括了在ΔT的间隔内太阳的实际运动$(\Delta L)_T$，也包括了纽康公式中的误差$(\Delta L)_e$，后者部分是由推导时所用到的那些观测资料的误差引起的，另一部分原因则在于这些观测结果是采用平太阳时这样一个事实。对于确定平太阳时相对于均匀时的变化这项工作来说，只有$(\Delta L)_T$这部分才是有意义的。纽康的太阳平黄经公式是通过对太阳观测资料的分析推导出来的，并没有把观测时间归算为均匀时系统，因此其形式为

$$L_N = L_0 + L_1 T_M + L_2 T_M^2,$$

正确的公式要用均匀时系统$T_M + \Delta T$来表示，这时需要对公式中的系数作两项改正，一项是转换到动力学公式中固有的独立变量所要加的改正，另一项是有关观测误差的改正，如果略去时间平方项的影响，则正确的公式为

$$\begin{aligned} L &= L_N + \Delta L_N \\ &= (L_0 + \Delta L_0) + (L_1 + \Delta L_1)(T_M + \Delta T) + L_2 T_M^2 \\ &= L_N + [\Delta L_0 + (\Delta L_1) T_M + (L_1 + \Delta L_1)\Delta T], \end{aligned}$$

式中ΔT表示从$(\Delta T)_T$所得到的归算值。

间隔ΔT是地球自转非均匀变化的累积效应。如果T为均匀时，则转自速率为

$$\omega = \omega_0 + cT + \delta\omega,$$

式中第二项表示长期变化，最后一项是不规则变化和周年变化项。平太阳时与下式成正比，

$$\int \omega\, dT = T_0 + \omega_0 T + \frac{1}{2} cT^2 + \int (\delta\omega) dT\ .$$

因此，由平太阳时系统归算为均匀系统的改正值正比于

$$-\frac{1}{2}cT^2-\int(\delta\omega)dT+\Delta T_0,$$

式中积分常数 ΔT_0 表示历元时刻的改正值；系数 c 为负值，因为 ω 是减慢的。

因此，ΔL_N 中代表在间隔 ΔT 内太阳平黄经运动的项为

$$(\Delta L)_T=-(L_1+\Delta L_1)\left[\frac{1}{2}cT^2+\int(\delta\omega)dT\right]$$

$$=+1.23''T^2+0.0747\,B\ .$$

对于表列平黄经的这项改正，是当表列时间按某种均匀时系统计量而观测时间按平太阳时系统计量时，表列值对观测值的表观偏差。ΔL_N 中其余的项所代表的是需要加在纽康表中表列平黄经上的实际改正值，加了这项改正之后表列引数所表示的就是动力学时间系统了。这些项代表了两个方面的内容，一个是对于历元时刻的表列平黄经的改正值，另外一个是对于表列平均运动的改正值，加了这些改正以后各个系数与用动力学时间进行计算的结果就相一致了。由于在历元时刻 $0.0747\,B$ 的数值为 $-1.19''$，对于这些项我们有

$$(\Delta L)_e=\Delta L_0+[(L_1+\Delta L_1)\Delta T_0+(\Delta L_1)T]$$

$$=-0.19''+(1.19''+2.97''T)$$

$$=+1.00''+2.97''T\ .$$

从原则上说，把平太阳时归算到均匀系统的改正值可以按两种方法从 ΔL_N 推算出来。从关于假想平太阳的传统概念的论点出发，对于太阳平黄经的改正值 $(\Delta L)_e$ 代表了对纽康有关假想平太阳的赤经公式的一项改正，因此这就相当于在平太阳时系统中直接改变了一个量 $(\delta T)^s=-(\Delta L)^s_e$。把这个修正了的系统归算为均匀时还要作进一步的改正，这就是太阳在平黄经方向上运动 $(\Delta L)_T$ 所花的时间 ΔT。因为 L 的周期是 365.2422 天，就有

$$(\Delta T)^s=\frac{365.2422\times86400}{1296000}(\Delta L)''_T$$

$$= 24.349^{s}(\Delta L)''_{T} .$$

于是对于由纽康**太阳表**所定义的平太阳时系统的总的改正为：

$$\Delta T^{s} = -\frac{1}{15}(\Delta L)''_{0} + 24.349^{s}(\Delta L)''_{T}$$

$$= -0.066667^{s} - 0.198000^{s}T + 29.949^{s}T^{2} + 1.821B,$$

头两项代表了由于对平太阳的改正 $+1.00'' + 2.97''T$ 而引起的改正值，另外两项则代表了在间隔 ΔT 内平太阳在黄经方向上以每 24.349^{s} 变化 $1''$ 的速率所作的运动，为了得到均匀时系统，观测时间就是用这些量来加以改正的。

但是，为了使得假想平太阳和真平太阳严格取得协调一致并不一定要这样做，我们可以让纽康的表列平太阳保持不变，而同时直接从总的偏差 ΔL_{N} 推算出一项归算改正，这样做更为方便，又可以得到同样的效果。现在的做法不是把 ΔL_{N} 中头两项所要求的改正值表示为对于假想平太阳的一项改正，而是可以把它表示成对于由同一个假想平太阳所定义的平太阳时系统的一项改正，其中所用到的是对假想平太阳在赤经方向上的运动的改正 $24.349^{s}(\Delta L)''_{0}$，这样可以达到同样的效果。总的改正可以表示为对观测的时间一种改正，这种观测的时间是属于使纽康的平太阳保持不变的前提下所定义的时间系统的。这种形式下的改正公式是

$$\Delta T = +24.349^{s} + 72.3165^{s}T + 29.949^{s}T^{2} + 1.821B, \qquad (170)$$

其中 T 是从 1900 年 1 月 0 日格林尼治平正午起算的儒略世纪数。这就是克莱门斯所推导出来的 ΔT 的形式。最早，历书时就是定义为把这个改正值加到世界时上之后所获得的时间系统❶。

公式中的最后两项构成了把世界时改变为均匀的时间计量系

❶ Trans.Int.Astr.Union 8，66 (1952).

统的归算改正，其中的B代表地球自转的不规则变化的影响，它必须通过观测来加以计算。另外两项同推导ΔT时所采用的方法有关，因而实质上是任意的，其中第一项确定了使ΔT为零的历元，第二项确定了均匀太阳日的长度。

历书时

历书时的定义为

$$ET = UT + \Delta T,$$

式中ΔT由(170)式给出，这个公式相当于把历书时定义为由纽康**太阳表**所规定的、有确定数值的均匀的时间计量系统。ΔT的定义是用月球平黄经对于布朗月历表的偏差来表示的，原则上可以根据B的观测值来加以计算，但是实际上ΔT可以直接通过用世界时记录的天体的观测位置同引力星历表位置的比较来加以计算，这里星历表中作为引数的均匀时系统和纽康表所定义的系统是相同的。历表位置同观测位置相同时的表列时间就是观测时的历书时。

由于把历书时定义为使纽康太阳表与观测结果相一致时的时间系统，因而历书时的测定最终取决于对太阳的观测。但是，由于太阳的运动相当慢，加上精确测定太阳的位置又很困难，因而实际用来经常测定历书时的主要方法是观测月球。过了很长的一段时间之后，再用对太阳和行星的观测来对月球观测加以补充。

平太阳时可以随时加以测得，而历书时的情况就不同。它的测定取决于以世界时记录下来的观测结果，以及这些结果同星历表之间的比较，后者的目的是为了确定ΔT。精确的测定工作要求有一些复杂的专用仪器设备和计算设备，并且需要进行一段时期的观测。对于天文观测、导航以及地面测量这些实际应用来说，不能用历书时来作为时间标准。就民用守时以及同实际应用关系最密切的一些工作来说，平太阳时是必不可少的。此外，由于地球自转速率的变化是无法加以预测的，因而为了测量这种变化就

必须进行平太阳时的测定。

历书时的计量

历书时的历元和单位是用太阳的历元平黄经和平均运动来加以确定的，这两个量相当于地球的两个轨道常数。

作为历书时起算点的基本历元就是纽康所选定的历元，即1900年1月0日格林尼治平正午，但是实际上这个历元取的是1900年1月0日历书时12时。特意选定的这个瞬间很靠近公元1900年这个历年的岁首，这时太阳相对于瞬时平春分点的几何平黄经为279°41′48.04″[1]。

历书时的基本单位，是由1900年1月0日历书时12^h这一历元时刻太阳在黄经方向上的平均运动所定义的那个回归年。这个回归年以历书日计量的长度，是根据纽康关于太阳相对于瞬时平春分点的几何平黄经表达式中T的系数来加以确定的。一个历书日等于86400历书秒，历书秒定义为对于1900年1月0日历书时12^h的那个回归年的1/31556925.9747，由国际度量衡委员会正式采用作为不变的基本时间单位[2]。在这之前所用的基本时间单位是平太阳秒，它的定义是平太阳日的1/86400。

历书时的实际测定

对于从观测位置同理论位置之间的表观偏差来确定ΔT这项工作来说，所需要的星历表是根据严格的引力理论来加以计算的，而且其中的时间系统同纽康太阳表中所用的系统相同。由于在这种偏差中不仅包含了平太阳时的不规则性效应，而且还包含了理论上的缺陷，因而所采用的理论必须有很高的精度。对于平太阳时的变化、尤其是它的不规则变化的实际测定工作来说，观测月球是最为行之有效的方法，但是同一本根据布朗的月球理论计算而得的月历表进行直接比较不能立即给出ΔT。布朗的月球理论

---

[1] Trans, Int. Astr. Union X, 72 and 500 (1960).

[2] Procès-Verbaunx des Séances, Ser. 2, XXV, 77 (1957).

并不是一种纯引力理论，这是因为在表列平黄经中包含有一项经验项，它的引入是同力图使所编的表应当同观测取得一致这样一种思想联系在一起的，因而由这个理论所不明显地确定了的时间系统就不会同纽康的太阳表严格相同。所以为了获得一种与纽康太阳表具有同一时间系统的引力理论，就要对布朗的理论加以修正，办法是把经验项扣除掉，再对月球平黄经加上一项改正，以把这个理论归化到由(170)式所定义的时间系统。这时，就可以通过把世界时系统内的观测结果同根据修正后理论计算得到的月历表之间进行直接比较来确定历书时。

布朗表所需要的改正，是由克莱门斯❶利用斯宾塞.琼斯所已经求得的对于月球表列平黄经的改正值推导出来的。布朗利用理论上的引力长期加速度建立了月历表，其中没有考虑潮汐摩擦，对于历元平黄经、平均运动以及经验项的确定是要尽可能满足现代观测的需要。在所略去的潮汐摩擦效应中，包括了由于地球自转减速运动造成的月球表观长期加速度，以及在月球平均角运动上实际存在着的减速运动。经验项不能代表以后的观测结果。用观测时的世界时所表示的月球观测平黄经为

$L_{☽}$ = 表列平黄经

－经验项

$+5.22''T^2$(对观测值的长期加速度归算项)

$+12.96''T+4.65''$(对平均运动和历元的改正)

$+B$(关于自转不均匀变化的改正)。

观测黄经对表列黄经间的偏差 $O—C$ 为以下两项之和：(a)由世界时和历书时之间的差异 ΔT 所引起的表观偏差；(b)由于经验项的缺陷以及表中其它方面缺点所造成的实际偏差。只要在总的观测改正中扣去表观偏差(a)，剩下的就是对月历表所要需加的改正项(b)，利用这项改正可以获得观测世界时瞬间的观测

❶ G. M. Clemence, Astr. Jour 53, 172 (1948).

黄经。把这项改正加到月历表上之后，残差 $O-C$ 就完全是由世界时和历书时之间的差异引起的了，因而从残差就能直接确定 ΔT。

表观偏差(a)是在间隔 ΔT 期间月球在平黄经方向上的运动量。月球的平均运动比太阳的平均运动快 13.37 倍，相当于在 $24.349^s/13.37=1.821^s$ 中运动了 $1''$，或者说是 $1''/1.821^s=0.5490''\cdot s^{-1}$。因此，或者根据 ΔL_N 的表达式，或者根据有关 ΔT 的(170)式，可以得出对于理论的表观偏差为

$$+13.37''+39.71''T+16.44''T^2+B=13.37(\Delta L_N)''$$
$$=(1''/1.821^s)\Delta T^s$$

在琼斯所得到的总改正值中扣去这个量，剩下的就是

$$\Delta L_{☾}=-8.72''-26.75''T-11.22''T^2-\text{经验项。} \quad (171)$$

把改正项(171)式加到表列平黄经上，接着再加上对于月球的黄经、黄纬以及视差中周期项的改正，这样就给出了以历书时为引数的引力月历表。

从 1960 年起，天文年历中的月历表就不是从布朗的月球理论，而是根据这种改进后的理论，直接从关于黄经、黄纬和视差的理论表达式来进行计算的。在1952～1959这些年内，从天文年历的补编本中同样可以取得这种作了改进后的月历表。把月球观测位置的世界时，直接同历表位置与观测位置一致时的表列时间进行比较，便确定了 ΔT。B 的数值可以按(170)式从 ΔT 来加以计算。

对于布朗表的这项改进同定义 ΔT 的(170)式是等价的。改正量 ΔT 是根据 B 来定义的，它是从琼斯关于 $L_{☾}$ 的表达式推导出来的，因此，B 的原始定义是由下列表达式表示的

$$B=L_{obs}-L_{tab}+\text{经验项}-(4.''65+12.''96\,T+5.''22T^2),$$

这里与观测平黄经所对应的是观测时的世界时，而表列平黄经则取自布朗表。因此，ΔT 必须根据 B 这个原始定义严格地来加以确定，具体来说，必须把用来推算出 ΔT 的月球位置同纽康的基

本星表[1]所定义的春分点联系起来。根据改进后的理论所计算出来的月历表就是建立在这个基础之上的，但是，观测所对应的是目前所用的基本系统的春分点，因而在同月历表进行比较之前，必须把观测结果归算到纽康的春分点。

因为长期加速度数值上的不确定性，B 和长期变化之间的实际区分跟布朗表的偏差，可能会和琼斯得出的结果稍有不同，不过这对时间计量不会有什么影响。月球理论的其它一些缺陷对于根据观测所得到的历书时的精度是有影响的，但是不会影响到历书时的定义。

一方面由于有关月球在恒星间位置的照相定位方法的发展，另一方面又有了可以同观测位置直接进行比较的改进后的月历表，这两方面的因素使得我们可以用比以前所能用的方法更为迅速地来求得历书时。以前，ΔT 是根据 B 的数据来进行计算的，而测定 ΔB 的主要方法是月球的中天观测以及掩星观测，并且还要把观测结果同利用布朗表算得的月历表中的表列位置来进行比较，用这种方法求得一个确定数值需要若干年的时间。根据用马柯维茨在 1952 年设计的双速月球照相仪所得到的月球照相位置，并且再把它同改进后的月历表相比，就可以确定 ΔT 的精确值，这种做法要容易得多，速度也要快得多[2]。

利用双速照相仪可以同时拍下月球和它周围的恒星，并且在露光期间相对这些恒星来说月球的象是保持固定不变的。来自月球的光线穿过一块深色的平板玻璃滤光片，滤光片是倾斜放的，在露光过程中绕着位于它自身平面上的一根轴而旋转，从而使月球的象以确定的速率和方向移动，以使得当底片盒随着恒星不断地移动时，月球象在底片上的位置始终保持固定不变。恒星是通过一块固定的黄色滤光片来加以拍摄的。电接触把两块滤光片相

---

[1] Astr. Pap. Amer. Eph. Ⅷ, pt. Ⅰ.

[2] W. Markowitz, Astr. Jour. 59, 69-73 (1954).

平行的时刻在记时仪上记录下来。在这一瞬间，两块滤光片不会使月球相对于恒星产生任何的光学位移，该瞬间的世界时就是当底片上所反映的月球位置正好是月球在恒星间的实际位置时的那一个时间。

星历表换算为世界时

采用专用名词**历书时**来表示基本星历表中的引数，以代替以前所选用的世界时，这对计算这些星历表的方法是毫无影响的。它只不过是术语上的一种修正，表列的数值同以前从同样一些基本用表中所得到的结果是一样的。然而在计算诸如时角和中天这一类同地球自转有关的任何一个量的时候，就必须对早期的处理方法加上有关自转速率变化影响的改正，这种影响在以前是忽略不计的，而对这项工作来说需要有 ΔT 的值。同样，在编制航海或地面测量用的历表时，必须对基本星历表加上一些改正，以把它们从历书时转换为世界时。

一般说来，这些计算必须提前几年进行，因此必然要用到 ΔT 的外推值，但是，这种外推时间间隔相对说来是比较短的，以保证外推的不确定性仍然在计算所要求的精度范围之内。

以世界时为引数来建立星历表和计算天文现象时所需要的方法，主要取决于是否涉及到时角的问题。要是表列的量与地球自转无关，那么以连续各天历书时 0^h 为引数的星历表可以换算为以世界时 0^h 为引数的星历表，方法是对表列值进行内插，以求得历书时 0^h **之后** ΔT 间隔的数值，这是因为在世界时 0^h 这一瞬间，普遍公式 $ET = UT + \Delta T$ 就给出了 $ET = \Delta T$。如果二次差可以忽略不计的话，那么把改正值 $(\Delta T/h)\delta_{1/2}$ 连同符号一起加到历书时 0^h 的每一个表列值上就得到了内插后的值，其中 h 是表列间隔，而 $\delta_{1/2}$ 表示一次差。

对于那些与时角及地理位置有关的现象来说，要是按1960年之前所用的那种方式根据基本星历表来进行计算的话，那么与这些现象相联系的就不是格林尼治子午圈和世界时，而是历书时和

一条这样的子午圈：它的空间位置就是当假定地球自转速率为均匀时格林尼治子午圈应有的位置。这条与格林尼治子午圈略有不同的子午圈称为**历书子午圈**。由于地球自转变化的累积效应，格林尼治子午圈位于历书子午圈位置以西，两者间的角距离就是与 ΔT 相应的恒星时数值，即 $1.002738\Delta T$，因此，在地球表面上，历书子午圈位于格林尼治地理子午圈以东 $1.002738\Delta T$ 处。为了使那些同地球自转有关的现象的实际计算工作简化起见，就用历书子午圈作为一条辅助的参考子午圈。从历书子午圈起算的时角和经度用专用名词**历书时角**和**历书经度**来表示。春分点的历书时角称为**历书恒星时**。

一旦把那些和地球自转有关的现象同历书子午圈联系起来之后，它们就可以根据历书时来进行计算，而计算时所用的方法在形式上与根据世界时进行同格林尼治子午圈联系起来的那种计算时所用到的方法是严格一致的。世界时 0^h 的表列格林尼治恒星时在数值上等于历书时 0^h 的历书恒星时，这个原理就是进行具体计算的基础。确定世界时 0^h 的恒星时的春分点时角，是同格林尼治的实际地理子午圈联系起来的，但是历书时 0^h 的春分点离开历书子午圈的时角，就等于它在世界时 0^h 离开格林尼治子午圈的时角。

只有知道了 ΔT 之后，才能计算对于某一特定地理经度子午圈的地方时角。时角以及同时角有关的那些现象，只能根据历书经度和历书时来加以确定。当 ΔT 已知的时候，通过加上改正值 $-1.002738\Delta T$，就可以把具有任意特定地方时角值的某子午圈的历书经度换算为地理经度，从这一子午圈上时角具有这个数值时的历书时中减去 ΔT 之后，历书时便换算成了世界时。

如果知道了 ΔT，那么为了求得在给定世界时瞬间某个天体从格林尼治地理子午圈起算的时角，就要对赤经 α 进行从历书时到世界时的内插计算，然后计算

$$GHA=\tau-\alpha,$$

（这里GHA表示格林尼治时角），式中τ是直接从世界时0^h的恒星时的历表所取得的格林尼治恒星时，查表时不需考虑ΔT，因为表列值已经是相对于世界时和格林尼治地理子午圈而言的，后者是按世界时0^h的瞬间确定的。

专用名词**历书中天**用来表示前面所给出的格林尼治中天的时间。历书中天是经过**历书**子午圈瞬间的历书时，根据定义这个历书时就是该瞬间**格林尼治**子午圈上的时间。以历书经度为内插因子内插到任意的地方子午圈，就给出了过这一子午圈的地方中天的历书时，对于这项工作来说需要对表列的历书中天组成一次差，这时决不可忘记**日期**就是每个表列时间的组成部分。在历书中天时刻，历书恒星时就等于天体的赤经。

从地理经度为东经$1.002738\Delta T$的历书子午圈，内插到经度$0°$处的历书中天时刻，由此得到格林尼治中天的历书时，在这个历书时中减去ΔT就可以求得太阳、月球或者某个行星过格林尼治子午圈的世界时。格林尼治中天发生在历书中天之后，其间的时间间隔比ΔT来得长，如果考虑到一次近似，则两者所相差的时间就等于ΔT间隔内天体在赤经方向上的运动量。因此，格林尼治中天的世界时大致上就等于表列的历书中天时刻加上$(\Delta T/h)\delta_{1/2}\alpha$，其中$h$是表列间隔。

第十七章　观测星表的编制

组成观测天文学的基本参考系有两方面的内容，这就是由瞬时赤道和瞬时春分点所决定的天球上的地心坐标系，以及由春分点和假想平太阳所确定的对于恒星时和平太阳时的量度方法。观测是通过作为中间过渡的某个**基本星系统**同上述位置和时间的参考系联系起来的，组成这种基本星系统的乃是分布于整个天球上的一大批经过挑选的标准参考星，而天球基本参考圈在这些恒星间的位置则是事先通过观测太阳及行星相对于这些恒星的视运动而直接求得的。这种参考星系统由星表来加以体现，在星表中刊有参考星相对于某个特定历元的赤道和春分点的坐标，以及因岁差和自行所引起的坐标变化，后者可以用来求得任何其它历元时的坐标值。

为了确定所选用的恒星的坐标，并找出天球参考圈在这些恒星间的位置，需要进行和在这之前的任何测定工作无关的观测，有关这方面的观测称为**基本观测**；而由这种方法确定的坐标所表示的恒星位置称为**基本位置**，以别于通过相对于标准星的较差观测所得到的位置。在天文学的历史发展过程中，由于所用观测工具的不同，以及由于所要求的精度的不同，建立基本星系统的实际工作方法在不同的时间是不同的。然而，从古到今，实际上所采用的每一种方法都等价于以下两方面相互独立的工作：（1）测量所选用恒星**彼此间的相对**位置；（2）通过观测**太阳和行星相对于这些恒星的视运动**来确定赤道和春分点在这些恒星间的位置。

确定基本参考星赤经、赤纬的具体过程，同这些坐标通用的正式定义所能预料的步骤恰好相反。严格说来，这是要确定**赤道和春分点相对于这些恒星**的位置，并不是把恒星去同赤道和春分点（它们是无法看到的）联系起来，而是要在这些恒星中间找出

赤道，以及确定春分点相对于这些恒星的位置。

要是为测定赤道和春分点的位置所进行的观测与以前的测定工作无关，那么根据这样的观测所编制的任何一本具体的星表便确定了一个基本参考系。但是，我们只能就观测的特定历元来确定按这种方式所建立的恒星系统，对太阳、行星和恒星的任何一组观测都无法测定由于岁差和自行所引起的变化。还有，任何星表都不可避免要受到观测误差的影响，这种误差是比较大的，其中既有偶然误差又有系统误差，因此，在不同的观测星表之间就会存在显著的差异，而每一本星表便各自确定了一个参考系。由于这些原因，今天，从某一个天文台的一项观测纲要所得到的任何一本基本观测星表，都不可能用来作为实际工作中的标准参考系。

为了建立一个**对任意历元而定义**的参考系，而这个参考系又要尽可能地不受观测误差、特别是不受系统误差的影响，那就要把长时期内不同历元所陆续编制的大量基本观测星表进行综合和平差，从而建立起一个用来作为标准基本参考系的恒星系统，这样，就可以得到一本统一的具有岁差变化和自行的总星表，这对于求得任何时刻赤道和春分点在恒星间的位置来说是必不可少的。

为了这一目的，分布在全世界各地的若干个天文台始终对主要的恒星按各种观测纲要不断进行观测，并且每个天文台把有限年份内所作的观测收集起来，编成一本观测星表。每隔一段时期，把从不同天文台所累积起来的观测星表加以综合，从而成为一本**基本总星表**。不断地累积观测资料，不断地建立基本参考系，这对于改进天体位置的精度、特别是对于测定比较精确的自行以及研究银河系结构和恒星动力学来说是极其重要的，其中测定精确自行的目的在于满足编制精度越来越高的太阳表、月历表、行星星历表以及主要恒星的星历表的需要。通过很长时期内大量观测资料的累积，基本星的位置和自行就知道得很准确了，而这就为编

制基本星以外的大量恒星的高精度较差观测星表提供了基础。

作为基本星的那些特定的恒星是根据约定的方法来加以挑选的，它们和别的恒星并没有太大的区别，但是，一般说来基本星是由有限数目的较为明亮的恒星组成的，对这些恒星已经进行了最广泛、最仔细的观测，并且用几种独立的方法对它们进行精确的测定，这也就是基本星与大多数恒星的区别之所在，后者的观测精度比较低，而且主要是根据以前所作的基本测定用较差方法来进行观测的。原则上说，基本参考系中的星数是无关紧要的，然而在实际工作中却要求有大量的基本星，因为只有这样，无论对目视观测还是照相观测来说，在观测任何一个天体附近时才能有足够数目的比较星。观测中不可避免地存在着误差，为了尽可能减少观测误差的影响，在确定天体位置时，最好要能用到**几个**不同的参考星，在观测时**附近**的比较星是必不可少的：在照相观测中它们可以同待测天体记录在同一张底片上，在目视观测中它们可以同待测天体在尽可能相同的瞬间和尽可能相同的仪器位置上进行观测，便于决定仪器和钟的误差。

过去的两百年内，人们挑选了许多不同的星表来建立基本参考系，并且选用的星表数目一直在不断地增加，这些基本参考系在一定的时期内于不同程度上得到了广泛的应用。在编制符合要求的基本观测星表中所遵循的具体做法，乃是从古希腊时代起历史逐渐发展的产物。这些方法是逐步发展起来的，它们之间在具体过程的形式和细节上或多或少有所不同，但是从本质上讲则是彼此等价的，它们只不过是在确定恒星彼此间的相对位置以及太阳相对恒星的视运动的过程中，为实现有关的基本操作步骤而采用的一些不同的具体做法而已。但是，为了获得目前所需要的精度，人们作了许多的改进，并增添了大量的辅助操作，因而具体过程便变得十分细微，十分复杂。

恒星相对位置的测定仅仅要求用一些适当的角度来表示它们彼此间的相互关系，而且其中必要的测量工作并不存在原则上的

困难。在具体工作中碰到的困难的程度取决于所要求的精确程度。由于目前对精度的要求很高，因而现代的方法要求有精密的仪器，熟练的观测员，并且需要作冗长的计算。**赤道和春分点**的测定是一项远为困难得多的工作。如果精度要求不太高，那么通过观测拱极星来测出天极的位置，便可以确定赤道的位置，但是为了求得高精度的结果，那就还需要观测太阳相对于恒星的位置。困难最大的是确定春分点，根据定义，为了求得春分点的位置，必须通过直接或间接的方法，在太阳周年视运动的过程中不断地观测太阳相对恒星的位置，从而才能求出太阳穿过赤道的那一点的位置。在望远镜发明之前，太阳和恒星是不可能同时看到的，为了把太阳和恒星联系起来需要通过中间天体，在古代是通过月球，后来也用到金星，金星可以和太阳同时进行观测，而当太阳没入地平线下之后，金星又可以同恒星进行比较。在精密时钟出现之前，恒星彼此间的比较，以及中间天体同太阳和恒星之间的比较，都是通过直接角度测量来进行的。有了望远镜以后，就可以在白天观测到比较亮的恒星，并把它们直接同太阳进行比较。现在，恒星和太阳之间的比较以及恒星相互之间的比较，是以钟作为中间媒介来进行的。此外，望远镜还具有比以前所能达到的高得多的瞄准精度。

为了测定春分点在恒星间的位置，仅仅依靠观测太阳是不够的，这是因为以足够的精度进行太阳观测在实际工作中会有不少的困难。原则上说，为了测定春分点也可以观测行星，然后再以行星的引力运动理论为中间过渡把太阳和行星联系起来。为此，通常用到的是对水星和金星的观测，有时也用到别的行星，特别是一些比较亮的小行星。同样，如果要以很高的精度来测定赤道，那么在实际工作中也不能完全依赖于观测拱极星来确定天极位置的途径，还可以利用对太阳和行星的观测。

赤经、赤纬的较差测定是比较简单的，做起来也比较快，与此相反，基本位置的测定则需要花许多时间，要进行大量的工

作。我们不可能直接从任何类型的一次性观测来求得天体的基本赤经和基本赤纬。为了编制基本观测星表，需要在一段相当长的时期内不断观测大量的恒星，加上必要的太阳观测及行星观测。必须在几年的时间内对数以百计的恒星进行数千次观测，然后才能测定其中每一颗恒星的位置，而且这种测定工作还需要对累积起来的各次观测进行严格的分析和复杂的平差，其中所涉及的计算工作量是非常大的。要想成功地完成这些观测，并且从这些观测编制出一部精密的星表，就需要在长期工作经验的基础上达到高度熟练的技巧和敏锐的判断能力。

原则上说，基本参考星系统所确定的几何坐标系同天体视运动所确定的坐标系是等价的，后者则与通常所用的正式定义相一致。但是严格说来，习惯上用来测定观测位置的几何参考圈系统通常并不是先验的、而是根据这些圈相对于选定的一些恒星的采用位置来加以确定的，这里所谓的采用位置则由具体星表中的赤经和赤纬来表示。基本星表是我们所具有的天球坐标系的唯一实际代表，正因为如此，它便成了用途最广的天文学产品。基本星系统是通过确定主参考圈在所选用恒星之间的位置来构成的，而由补充星组成的第二级系统则是通过相对于基本星的较差观测来构成的，对于大量的其它恒星以及太阳系天体的位置和运动来说，这两种系统就是天球上的直接参考系。在高精度观测中，在取得任何一个天体的观测位置的同时，还必须取得有关比较星的资料以及刊载比较星位置的具体星表的资料。

用子午观测方法确定恒星基本位置

确定基本位置最常用的仪器是子午环，利用这种仪器所作的观测完全是在子午圈上进行的，19 世纪的时候这类仪器已经在基本位置测定工作中得到了普遍的应用。

所谓子午环也就是一架只能在子午面上运动的望远镜，因此它被安置在一根东西向的水平轴上，而视线则与这根轴相垂直。

用子午环观测天体包括两部分内容，一个是测定天体中天时的恒星钟读数，另一个是用垂直度盘测出中天的天顶距。在仪器中还包括有物理学装置，用来体现地平坐标系中的一些必要的参考点，这就是一个用来确定垂线方向的水银盘。垂线为子午环提供了一个主基准点，当望远镜指向天顶时，作了仪器误差和大气折射改正后的读数就是子午环的天顶点，而这一读数与瞄准恒星时的读数之差就是该恒星的天顶距。另外，通过对拱极星上下两次中天的观测可以求出天极的位置，从而便确定了子午环的极点。于是，我们便可以得到子午圈的位置，而同时也就求得了观测者的纬度。通过作为中间过渡的地方参考系，就可以推算出天体在赤道坐标系中的坐标值，在方位角为0°或180°这种特殊情况下，这两个坐标系之间有着很简单的几何关系。

赤纬是可以直接测定的，因为天顶和天极提供了两个参考点，我们可以从观测到的中天高度立即求得天体的赤纬，但是对赤经来说则没有任何基准点可用。在定出春分点的位置之前，时钟读数的误差是不知道的，也不可能求得中天的真恒星时，但是我们可以从同一颗恒星连续两次中天的钟面时的变化来确定钟速，因而就可以测出赤经之差。春分点是由太阳的绝对赤经来加以确定的，因此它不可能通过直接观测来求得，我们必须设计出一些方法，以便能通过作为中间过渡的某些可观测量来间接地确定春分点。

确定基本赤经和基本赤纬的原理

天赤道是由周日运动所定义的，只要有了天极便确定了天赤道的位置，但是由于仪器误差和观测误差，要是不把必要的观测同垂线所确定的主基准点联系起来，那么子午环的极点是不可能可靠地加以测定的。同样，天体中天时的子午环读数必须同垂线联系起来，而赤纬必须从子午高度而不是仅仅根据极点来加以求得。因此，在基本赤纬的精确测定工作中，既需要天顶点又需要极点。

原则上说，对于测定恒星的赤纬而言，太阳的赤纬并不是非有不可的，但是在实际工作中，为了获得很高的精度，既要从观测恒星测定赤道，又要独立地从观测太阳以及行星来测定赤道，这样做对于尽可能消除仪器以及观测误差来说是至关紧要的。直接测得的太阳、行星和恒星的赤纬是**视**赤纬，它们所确定的是相对于观测视位置的天赤道的瞬时位置。从中天高度所得到的这些赤纬，再加上从中天钟面时得到的赤经差，便可以用来表示恒星彼此间的相对位置或者恒星相对于太阳的位置，为了求得相对于春分点的位置，就需要有一种实际可行的方法来测定太阳的真赤经。

要想制订出一些方法，以能求得由太阳周年视运动所定义的黄道，以及测定作为春分点定义的黄道与天赤道的交点，这项工作从原理上讲是没有任何重大困难的。但是在实际工作中，要以很高的精度测定春分点在恒星间的位置，这是子午天文学中最为困难的一个问题，原因在于太阳观测具有很大的误差。为了确定太阳在天球上的位置，并求得太阳相对于春分点的位置，除了赤纬外还要求有一个独立坐标。由于没有任何基准点可以用来直接测定赤经，因而我们所要**观测**的这个必不可少的第二坐标乃是黄赤交角，它可以根据二至点时太阳的赤纬来加以求得。有了观测所得的黄赤交角，再观测太阳在周年视运动过程中的赤纬，我们便可以通过三角方法来**计算出**太阳的赤经，这就是为了确定赤经而制订的具体做法。通过这样的途径，我们便可以测定相对于太阳观测位置的春分点瞬时位置，再把太阳位置直接同通过任何实用方法所得到的某个恒星的位置进行比较，就得到了相对于该恒星的春分点位置。

这种基本做法，显然是仿效了过去在根据子午观测编制最早期的星表时所采用过的那些方法。当时，太阳的赤经是从直接观测所得到的赤纬通过计算求得的。计算所得的太阳赤经确定了太阳中天瞬间的钟差，而利用这一钟差就立即可以求得在紧靠着太

阳前后不久经过子午圈的某个恒星的视赤经。按照这种办法，在白天把太阳同附近的亮星进行即时的观测比较，从而直接测出了少数几个恒星的基本赤经，然后再把别的恒星同这些基本星联系起来。但是，作为一种付诸实际应用的具体做法，由于不可避免地存在着观测误差，这种方法在基本形式上是不够的。因此，为了使误差尽可能地减小，并且使确定有关这些误差改正的工作尽可能地简化，后来人们对早期的做法从多方面作了精益求精的提高，其中包括对各个细节的改进和修正，以及不断地添加辅助操作和增加补充性观测，并且不断地用间接处理的做法来代替直接处理的做法。最后，复杂的技术细节，往往使人们看不出这种实际工作的方法同基本原理在本质上是等价的。

从中天高度确定赤纬，以及从中天的钟面时确定赤经差，这就排除了以前用古典方法测定恒星彼此间相对位置时所必须进行的直接角度测量，同时又避免了通过月球或金星作为中间天体来对恒星和太阳作间接的比较——对于确定太阳在恒星间的位置来说这种做法曾经一度是必不可少的。为了找出相对于太阳的春分点位置，从观测所得到的太阳赤纬来计算太阳赤经的做法取代了古典的方法，在古典方法中，太阳的位置是从太阳表取得的，因而春分点便同用来确定太阳理论有关常数的那些观测有关。

由于存在钟速，钟差就不会严格保持不变，即使在把太阳同附近一颗恒星进行比较时所需要的那么一段时间间隔内也是如此。只有通过连续几天内所得到的钟差来确定钟速，才能取得比较高的精度，而且限于在白天对太阳附近的少量非常明亮的恒星进行观测的那种限制也可以取消了。不管中天发生在太阳前后有多大的间隔，也不管它发生在白天还是黑夜，有了这样的钟速，就可以用它来内插出恒星过子午圈的观测瞬间的钟差，从而确定恒星彼此间的相对位置以及相对于太阳的位置。

还有一种能达到同样效果然而精度更高的方法，它不是根据计算所得的太阳赤经来确定钟差和钟速，而只是观测恒星，可以

求得的则仅仅是钟速，但同时还可以测定恒星彼此间的赤经差。这种方法的精度要比观测太阳来得高，不仅如此，它还可以测定钟速可能出现的任何变化。由同一颗恒星在连续各个夜晚中天的钟面时之差就可以求得钟速，这时所观测的是在天赤道附近经过挑选的一组恒星，由于在天赤道附近天体的周日运动速度很快，就能够以最高的精度来测定中天的时刻，钟速变化的影响也包括在其中。按这条途径来确定钟速和恒星的相对位置就与太阳的观测无关，目前这已成为普遍采用的一种方法。春分点的位置和钟差则是由太阳中天来加以测定的，但是在确定钟差以及把恒星同太阳进行比较时，太阳中天的钟面读数就按照恒星观测所得到的钟速来加以改正。

再有一种方法，那就是仅仅用夜晚对恒星的观测来测定钟速，然后紧接着观测太阳和白天的恒星的赤纬，再根据普遍存在的白天观测和夜晚观测之间的系统差的测定，将钟差归算到夜晚观测恒星的系统中去。而且，这里不是把所选定的恒星同太阳作即时的观测比较，以单独地测定春分点，而是把太阳的赤纬观测值同从太阳表查得的赤纬理论值进行比较作为中间过渡，由此所确定的赤道就与恒星没有任何关系，同时把太阳表列黄经和表列黄赤交角的有关改正也测定出来了。根据改正后的黄经和黄赤交角计算出太阳的赤经，从而便确定了春分点。这种方法是把恒星同太阳表列位置进行比较的一种间接的方法，其中首先要通过对太阳的实际观测来对表列位置进行改正。这个方法的优点是既要比直接从太阳表查得太阳位置的方法具有更高的精度，也比从赤纬的即时观测值计算太阳赤经的方法的精度来得高。

另外，通常还要用观测内行星来对观测太阳进行补充。春分点在恒星间位置的测定必然取决于恒星同太阳间的比较，但是这种比较可以用间接方法来进行。特别是行星可以通过有关它们的运动的引力理论作为中间过渡同太阳联系起来，因而在直接观测太阳时所用到的同样的原理可以推广到行星。在过去，春分点的确

定主要靠观测太阳，但是，即使用了最好的观测仪器，对太阳的观测也无法达到很高的精度，因而不管所采用的具体方法如何细致，对春分点不可能作出高精度的测定。因此，不完全依赖于对太阳的观测已成为实际工作的需要。可以预料，随着比较严格的行星理论的不断发展，将会越来越依赖于对行星、特别是对比较明亮的小行星的观测。

在把这些方法的原理付诸于具体实践时，对于不同的天文台以及在不同时期的观测纲要中，就仪器和实际操作步骤的各个细节来说，通常会发现存在着许多变化。实际操作步骤的选择取决于它们相对的优点，这指的是应该根据当时的环境条件以及所可能有的仪器设备，在最大可能的范围内避免或者尽可能减小仪器误差和观测误差。子午环及其附属设备，观测的具体步骤，以及如何把观测结果进行处理而成为一本星表，这些内容在汇集观测结果的各天文台的刊物中通常都有相当完整的介绍。但是，从本质上来说，这些方法都是相同的，而且它们现有的这种形式实质上已经为人们运用多年了。因此，这里就以美国海军天文台所采用的方法为例，来说明通过子午观测确定天体基本位置的具体方法●。

子午环

子午环的设计和制造是专门为了在方位天文学中对所需要的角度进行尽可能高精度的测量，其中又包括基本测量和较差测量两个方面。仪器上所用的是中等口径的目视折射望远镜，其口径通常不超过6到7英寸。方位天文学的仪器中望远镜的主要功能是用于作精确的瞄准；其次一个目的是观测暗天体，但是望远镜

● 有关海军天文台6英寸子午环的详细介绍刊载于 Pub. U. S. Nav. Obs., Ser. 2 XVI, Pt. Ⅰ(1950)。关于编制观测星表的简要说明发表于在1935～1945期间的9英寸子午环观测所编制的星表的序言部分，见 Pub. U.S. Nav. Obs. Ser 2 XV, Pt. V(1948)，业已发表的最详尽的说明是 Pub. U. S. Nav. Obs., Ser., 2 Ⅰ Ⅹ 中关于1903～1911 计划的一项介绍。

越大，由于它的可动部分重量也越大，因而仪器的精度就越差。所以，子午环必然只能限于观测比较明亮的星。至于暗天体，以及在中天时无法加以观测的天体，则必须按较差测量的方法，用其它类型的仪器来进行观测。

望远镜安置在一根轴上，随着这根轴的转动，望远镜就绕着一根固定的东西向的水平轴线而旋转。旋转轴通过其两端的枢轴安放在两根固定支架顶端的Y形轴承之中，用Y形轴承而不用圆形轴承，其目的是为了防止在仪器转动过程中枢轴发生某种摇摆或者晃动。旋转轴可以从Y形轴承上取下并进行掉头。在望远镜的一边，有一个直径通常为2～4英尺的刻度盘同旋转轴牢牢地联结在一起，并且随望远镜而一起转动，度盘面则与旋转轴相垂直，刻度盘是用显微镜来进行读数的，而显微镜则同支架联结在一起。许多仪器有两个刻度盘，可以使用其中的任意一个，也可以两个同时使用。

任何一颗恒星，只要它亮于望远镜的极限星等，那么当它在周日运动过程中靠近子午圈的那段时间内就会从视场中通过，这时我们便可以对这颗恒星进行观测。在恒星穿过视场运动的过程中，它的精确位置是用双导动丝测微器来加以测定的，测微器安装在望远镜的目镜端，其中包括了在物镜焦平面上的一个由竖丝和横丝组成的丝网，这个丝网是由和可动框架粘结在一起的蛛丝做成的。为了确定中天的时刻，需要有一只最高精度的恒星钟，并附以一定的辅助装置，比如确定观测瞬间钟面时所必要的设备。

早期的测微器在丝网上装有5到15根、甚至更多的固定竖丝，以及一到两根可动的横丝，有时候还包括一根可动的竖丝以及一根或多根固定的横丝。当一颗恒星通过视场时，观测员始终用一根横丝来平分它，或者始终把它放在两根紧挨着的横丝的中央，为此需要旋转带动测微导板的一个螺旋，而测微导板又是同横丝固定在一起的，所记录下来的是恒星在通过视场期间穿过各

条竖丝的时间。中央竖丝代表着子午圈，另外再安装若干根竖丝的目的是为了获得较高的精度，因为这时可以对好几次观测取平均，而不是仅仅依赖于单独的一次观测，穿过各根蛛丝的时间的平均数称为过**中丝**的时间。

最早的子午观测是用**“耳目”**法进行的，在观测员附近放一个钟，观测员一边倾听钟的走动声，一边记下恒星通过丝网中每根竖丝的时刻，并且要尽可能准确地估读到秒和秒后一位小数。这种观测方法后来为**“电键-记时仪”**法所代替，在“电键-记时仪”法中，观测员揿下手按电键以使电路闭合，从而把恒星通过各条固定竖丝的时刻借助电的作用记录在计时仪上。随后，手按电键又让位给动丝测微器，这时由测微器带动的可动竖丝取代了固定竖丝丝网，而测微螺旋则可以按任何所要求的速度转动。观测者以恰当的速度使动丝在视场中运动，从而始终保持动丝能平分恒星，当螺旋在每转动一圈中到达某些确定的部位时，动丝就处于与以前所用的定丝相当的一定位置上，这时电接触便自动地闭合，计时仪就把结果记录下来。

动丝测微器由里普索尔德于 1889～1895 年间提出并付诸实用，当时所用的是一种手动机械装置，它的使用把作为定丝观测所固有的人差大大地减小了。随着后来用机械以至用电来驱动动丝所带来的改进，这种形式的测微器最终成为子午环中所使用的标准方法。现在，竖丝通常是由一台马达来驱动的，而这台马达无须调节就会使动丝以和聚焦平面上星象运动速度近乎相同的速度移动，观测者按照需要调整马达的速度，以保持准确地平分星象。美国海军天文台 6 英寸子午环上的测微器的详细情况已由瓦茨作了介绍❶。竖丝是由一台同步马达来加以驱动的，在动丝经过视场的过程中，每隔一定的间隔，通过对测微螺旋分划头进行

❶ C. B. Watts. Astr. Jour. 50, 179—182 (1944), and Pub. U. S. Nav Obs. Ser. 2XVI, Pt. I.

拍照把动丝的位置记录下来，这样一来就把电键和记时仪都省去了。

从望远镜在子午面内的指向，以及在恒星通过视场过程中测微器横丝平分恒星时的位置，便得出了中天的天顶距。横丝又称为**天顶距丝**，移动横丝以使得它与星象相重合的这一动作是通过转动控制测微导板的那个螺旋来实现的，而螺旋分划头上的刻度便指出了螺旋所转动的角度，这里的刻度以螺旋的圈数为计量单位，它可以读出来或者通过照相的方法记录下来。望远镜的指向是由同望远镜轴紧固在一起的垂直度盘上的读数来给出的，而为了精确地对垂直度盘进行读数，在支撑望远镜的一根支架上牢牢地安装了偶数个显微镜（其个数通常为4个或6个）。它们均匀地分布在整个度盘上，每架显微镜上装有一个测微器，或者一卷照相胶卷，后者可以把位于显微镜视场中的那一部分度盘拍摄下来。规定取全部显微镜读数的平均数作为度盘读数，这样就提高了读数的精度，而且也部分地消除了因度盘偏心而引起的任何微小的误差。显微镜测微器的构造情况是这样的：如果稍稍转动望远镜并用天顶距测微器保持平分星象，同时显微镜测微器仍然保持瞄准在度盘的同一刻划线上，那么天顶距测微器读数的增加量就等于显微镜测微器的减小量。因此，只要仪器各个部件保持为理想刚体，那么对于某个确定的天顶距来说，天顶距测微器和显微镜测微器读数之和是恒定不变的。度盘读数和天顶距测微器读数之和就是仪器的赤纬坐标读数。

仪器在任何特定天顶距上的读数数值同度盘以及显微镜的具体安装情况有关，为了得到真正的天顶距就必须确定仪器在某个参考点上的读数，而这个参考点同天顶之间的关系则是已知的。这样一种基准点是由重力的方向来提供的，为了确定这一参考点，把望远镜朝下指向一个水银盘，当天顶距丝同它的水银反射象相重合时，记下测微器的读数之和。这个和数就是仪器的**天顶点**，在观测恒星的仪器读数中减去天顶点，便给出了观测瞬间恒

星的视天顶距。

通常情况下，当恒星经过视场时，至少要在中天前后两根特定的竖丝位置上记下对恒星作天顶距平分的读数，然后把它们的平均数作为中天读数。

对于太阳和其它有明显圆面的天体来说，我们所观测的是它们的边缘；而为了求得圆面中心的天顶距和时刻，必须加上因天体半径通过子午圈所需要的那段恒星时时间间隔而引起的有关的一些改正，而且必要时还得加上因未充分照亮被观测边缘所引起的改正项。

仪器应该进行调整，以使得在测定钟面时和度盘读数时的观测时刻刚好就是天体中天的时刻。这就要求不管望远镜在什么位置上，中丝始终保持与子午圈相重合，而做到这一点的前提条件是望远镜轴处于理想的水平位置，并严格地位于东西方向上，而且中丝所决定的视线必须同望远镜轴严格地相垂直。天顶距丝应该准确地保持水平，而全部蛛丝应该严格地位于焦平面上。然而，任何一架仪器要调整到理想状态是不可能的，而即使一旦做到了这一点也不可能把这种理想状态始终保持下去。还有，仪器和它的附件在制造过程中也不可能做到完美无缺。再进一步说，任何一次观测都要受到通常的观测误差的影响，对观测者来说这也是不可避免的。因此，为了确定中天时的真钟面时和真天顶距，就需要对实际观测到的钟面时和度盘读数加上一些改正，以便对仪器的全部缺陷以及来自观测者方面的误差尽可能地加以修正。然而通过这样的处理还是不可能把误差全部消除掉，观测仍然会受到微小的残余误差的影响，但是，只要在观测过程中选择合理的观测纲要，就能进一步减小这种残余的误差。

为了消除因观测者人差所引起的某些误差，人们采用了几种方法，其中之一是在目镜端加上一块棱镜，只要把这块棱镜旋转90°，就会使恒星通过视场的视运动方向改变180°，同时使视场的上部和下部相互颠倒。每一颗恒星在穿过视场的过程中，一部分

时间用棱镜的一个位置进行观测，剩下的时间用棱镜的另一个位置来进行观测，这样就消除了所谓**平分误差**这一类的人差。

另一种普遍采用的方法是利用放在物镜前端的丝网屏，使被观测恒星的光度降低到大致相同的视星等，其目的是为了消除被称为**星等差**的这一种误差影响。这种误差是存在于从亮星得到的平均位置和从暗星得到的位置之间的一种系统差，它是由仪器光学系统的缺陷和人差所引起的。观测者记下一颗亮星过子午圈的时间，往往要比当它是一颗暗星时所记下的时间稍为提早一些，要是用早期的定丝，则对某些观测者来说这一差数在极端情况下可以大到 0.1^s。动丝使这项误差大大地减小，但仍然可能有相当可观的数值。采用丝网屏还有一个优点就是使星象变小，于是观测的精度就要比大的星象来得高。

还有一种人差，那就是观测者往往把天顶距丝放在比恒星实际位置稍高或稍低的部位上。为了当望远镜镜筒处于任何位置时都能很方便地靠拢目镜，观测者是靠在一只可以调节的观测椅上的。当恒星在天顶以南上中天时，观测者的头部位于仪器支架以北；当中天发生在天顶以北时，他的位置就正好相反，即头部位于支架以南，而这时观测者相对恒星而言的**偏高**和**偏低**这两个方向也正好倒了过来。结果，在某一个天文台所测得的赤纬中，正好在该天文台的天顶位置上会出现有一个不连续点。

由不同类型的人差所引起的系统误差的大小是因不同的观测者而异的，为此必须根据特别拟订的研究步骤对每一个人分别地加以测定，这样才能在对观测结果进行归算和平差的过程中加上有关这些系统误差的改正。同样，也需要对每一架特定的仪器进行专门的系统误差的研究。一部分仪器误差只能通过为了这一特定目的而对恒星所作的观测来加以测定；另一部分则可以利用与天文观测无关的一些方法来加以测定。

在无须依靠观测恒星便能加以测定的仪器误差中，影响到**天顶距**测量的主要误差有：

（1）天顶距测微器和显微镜测微器中精密螺旋的缺陷；

（2）度盘制造和刻度过程中所产生的误差；

（3）弯曲误差，这是当望远镜绕轴旋转时，因仪器不同部分在自身重量作用下的非均匀弯曲所引起的。

影响到观测所得的**中天时刻**的误差有：

（1）准直差，这就是由中丝所决定的视线方向同望远镜旋转轴的垂线方向之间的夹角；

（2）水平差，也就是旋转轴对水平线的倾角；

（3）枢轴误差，这是因为旋转轴两端的枢轴并不是同一个理想几何圆柱体而引起的。

在尽可能准确地测出这些误差并且对观测加以相应的改正之后，仍然不可避免地存在着残余的误差，这些残余误差又可通过以下的方法加以削弱：（1）全部观测都要用各个螺旋的有限而又相同的部分来进行；（2）在每个观测纲要过程中，刻度盘要在它本身所在的平面内绕轴旋转，对于不同的时间段应取不同的位置；（3）有时要把整架仪器从Y形轴承上抬起并绕垂直轴旋转180°，这个操作步骤称为仪器的**掉头**；掉头前后的两种仪器位置是有区别的，它们分别称为盘东或盘西，这是根据赤纬度盘在望远镜的东面还是西面来决定的。有时候还把目镜和物镜加以对换。

有些仪器误差需要用天文观测来加以测定，这方面的工作乃是常规观测工作中的一个组成部分。这些误差包括旋转轴方位的校准误差和天顶距丝对水平面的倾角，前者要影响观测的中天时刻，后者则影响到天顶距的观测值。

准直、水平和方位角的校准误差是不可能始终保持不变的。如果把一架仪器安置在同一个固定位置上，那么由于外界条件的变化，仪器上的读数在不同的日期内、甚至从这一个小时到下一个小时都可能发生变化。例如，温度的变化可能会引起仪器不同部件的非均匀膨胀和收缩，而且这种膨胀和收缩又是可变的。因

此，在观测过程中每隔一定时间要经常性地测定准直差、水平差和方位差，还要经常地测定天顶点，这样才能尽可能用靠近观测瞬间所测定的改正值来对每次观测加以修正。

在仪器最初投入使用时，就要研究测微器螺旋及枢轴在构造上的缺陷以及度盘的刻度误差，而且一旦感到有必要时便随时对它们重新进行研究。有一些固定的仪器常数也是必须加以测定的，具体来说就是各竖丝间间隔所相应的角度值，以及每个测微螺旋旋转一周所相应的角度值。

用于恒星位置基本测定的观测工作

尽管在确定基本赤经和赤纬时没有一颗恒星的位置可以认为是已知的，然而现在总是可以利用以前的测定结果以节省工作量，同时又可以做到最后的结果与以前的测定无关。为了达到这一目的，在实际工作中至少要用到某些恒星的初始位置，并且所采用的做法是确定这些初始坐标采用值的**改正值**，而不是直接去确定这些坐标。但是，确定这些改正值所用的方法同前面介绍过的确定实际坐标值的做法是等价的，而且它严格地保持所得到的结果具有基本测定的性质。最后推算出来的位置同开始时采用的初始位置毫无关系。

为了使这个方法在实际应用时方便起见，初始位置应当有足够的精度，以使其误差的平方项在数学处理过程中可予忽略。现在已经知道了大量的具有足够精度的恒星位置，它们可以满足上面所说的条件。自古以来人们就已知道一些亮星坐标的近似值，以及一些主要天文常数的近似值，最早的一些精度不太高的基本星表是在 19 世纪初期编成的，以后的基本测定采用了更为简捷的形式，那就是通过增加更高精度的观测来求得相应的改正并对星数加以扩充，从而对较老的星表进行不断的改进。

在目前为编制一本基本星表所普遍采用的实际做法中，需要观测的对象有：

（1）均匀分布在赤道带（$-30^\circ<\delta<+30^\circ$）上的一批经过

挑选的恒星，对于这些恒星，开始时采用以前对它们所确定的尽可能好的赤经值。这些恒星专门用来测定基本赤经，称为**时星**。它们是由一批数目比较多的、有初始位置可用的恒星所组成的，而且除了晚上观测的恒星以外，还包括了一些在白天进行观测的恒星。

（2）一批有初始位置可用的、$\delta>80°$ 的拱极星。选入这批恒星的目的是要测定方位差，它们称为**方位星**。

（3）一些经过挑选的、在下中天时天顶距比较大的拱极星，目的是用来测定大气折射和纬度。

（4）太阳和行星，特别是内行星，用于测定春分点和赤道。

（5）分布在整个拱极区内的恒星，用于测定随天顶距而变化的赤纬改正，并从而求得对赤道的改正。

（6）普通一类的恒星，对于这些恒星需要测定它们彼此间的相对位置以及对于时星的相对位置。

子午环观测的恒星是从较亮的恒星中挑取的，一般说来要亮于9等左右。作为一个基本参考系必须以亮星为主要基础，这有几个理由：为了建立基本参考系不仅晚上而且白天也要进行观测；仪器越小，它所能达到的精度就越高，这是因为子午环的弯曲和其它干扰因素比较小；最后，接近望远镜极限星等时子午观测的精度就要降低。对于某些工作，比如象用可携带的仪器所进行的测量工作来说，就特别需要用到亮星；总的说来，比较亮的恒星的数目是不少的，而且在天空中的分布又相当均匀，它们足以构成一个能满足各种实际工作需要的参考坐标系。对基本参考系的要求只是提供足够精确的参考点，以能满足高精度较差测定所使用的那些方法的需要。例如，目前只要在照相底片所能拍到的任何一部分天区内有必要数目的参考星可用，那么通过照相方法便可以十分有效地取得高精度的恒星位置。

只要天气允许，每天的观测纲要大致如下（细节上是有变化

的)：在天刚黑的时候观测两颗方位星和几颗时星，这两颗方位星在赤经上应该彼此相差 12^h 左右，这样，当在观测一颗星上中天的差不多同时，另一颗星正好下中天。接下来，对第（6）类普通恒星进行几小时的中天观测，同时要注意使全部被测恒星沿子午圈均匀分布，对拱极星应既有上中天观测，又有下中天观测。在这些观测中另外还要分散插入几颗时星的观测，这时同样要注意使这些时星均匀分布在时星区域内所涉及的 60° 子午圈弧段范围内。在黎明前的几小时又开始另一组类似的观测，这次集中观测后半夜的那些时星，并且在相反的中天位置上观测前一天傍晚已经观测过的同样两颗方位星。在视正午前两个小时左右开始白天的观测工作。对那些明亮程度足以使我们在中天时看到的全部时星大约进行四小时的观测，并且在视正午时观测太阳。水星和金星也可以列入白天的观测纲要之中。

在这些观测过程中，还要测定准直差、水平差、方位差以及天顶点。为了对观测进行大气折射改正，要经常记下温度计和气压计的读数。还要时而进行一些专门性的观测工作，比如，有时就要对天顶距丝的倾角进行测定。

准直差通常是用水平准直管来加以测定的，所谓水平准直管就是水平地安置在基墩上的两架望远镜，一架朝北，一架朝南，这样当子午环望远镜处于水平位置时便直接瞄准了其中一个准直管，在每个准直管物镜的焦平面上有一对十字丝。通过子午环望远镜物镜光心并且与望远镜旋转轴相垂直的直线称为**准直轴**，当望远镜在转动的时候，准直轴扫描出来的就是准直面，并且在天球上描绘出一个大圆，要是仪器没有方位差和水平差，这个大圆就同子午圈相重合。一般说来，中丝视线（也就是通过中丝和物镜光心的直线）不会严格地位于准直面内，它在天球上描绘出一个平行的小圆。视线和视准轴之间的夹角就是中丝在准直面以东或以西的距离。视线同准直面所交的这个角度称为**准直常数**，当中丝在天球上所描绘出的那个小圆交地平圈于南偏东时，准直常数

取为正值。为了测定这一常数，使子午环瞄准一个准直管，并观测十字丝，然后再瞄准另一个准直管。第二个十字丝与第一个十字丝在位置上的差异所对应的角度就是准直常数的两倍，这是因为方位差消去了，而水平差在这项测定中是可以忽略不计的。

要是不考虑其它的校准误差，那么仅仅由准直差所引起的对中天观测时刻的改正 τ，可以根据过中丝时的恒星位置 S、天极以及地平圈上西点 W 所构成的三角形，并利用余弦定律来加以求得（图 59）。点 W 与中丝在天球上所描绘出的那个小圆上任意一点的角距离为 $90^\circ + c$，这里 c 为准直常数。因为 c 和 τ 是小量，故下式具有足够的精度

$$\tau = c \sec \delta,$$

式中 δ 是恒星的赤纬。

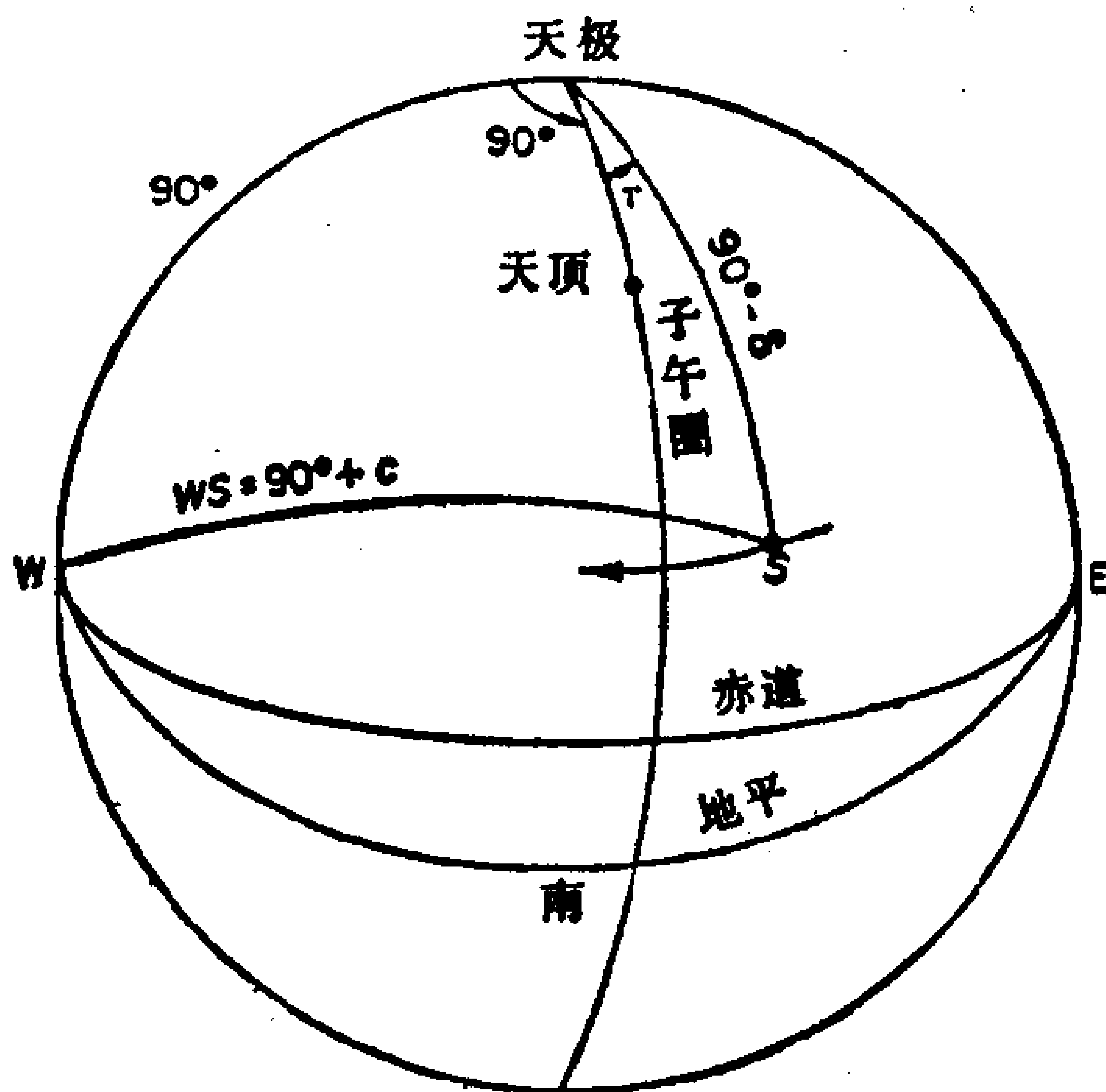


图 59　准直差

求得准直常数之后，只要把望远镜朝下，瞄准安放在正下方的水银盘，并观测测微器中央竖丝同它的反射象之间的角距离，便可以确定水平差。同时，利用天顶距丝来确定天底，这一点在前面已经作了说明。

望远镜旋转轴与水平面之间的交角称为**水平常数**，当旋转轴西端偏高时取为正。要是略去别的校准误差不计，那么可以在由地平圈上南点M、天极和恒星S所构成的三角形中，利用正弦定律来求得仅仅由水平差引起的对中天观测时刻的改正(图 60)。对于上中天情况来说，在这项测定中取MS等于子午圈上的高度$90°-(\varphi-\delta)$可以有足够的精度，这里φ是仪器的纬度。那么，如果用b表示水平常数，因为b和τ都是小量，就有

$$\tau=b\cos(\varphi-\delta)\sec\delta.$$

图 60 水平差

B——旋转轴的西端；SM——准直面

方位差可以通过对方位星的观测来加以测定，但需要先进行准直差和水平差的改正。如果观测在上中天和下中天两个位置上成对的恒星，那么就可以消除钟差以及恒星初始位置误差的影响。但是，旋转轴的方位角是一直在不断地变化着的，其部分原因在于温度变化和其它外界影响所引起的对仪器的不规则干扰，部分原因在于子午圈本身对地球表面的不规则摆动，后者是由于地理极的运动所造成的结果。因此，实际上方位角是利用两颗假星来加以

测定的，这两颗假星安置在子午环南、北方向相隔一定距离处的两个牢固的基墩上，它们称为**子午标**。两个子午标的方位角是通过对方位星的观测来加以测定的，同子午环方位的变化相比，它们的变化比较慢，也比较规则，因而通过对子午标的观测，就可以根据需要经常性地测定任意瞬间仪器的方位差。

在傍晚和清晨，通过一对拱极星中天来测定方位差时，对这两颗星的观测是一颗在上中天，而另一颗在下中天，并且几乎是同时进行的，因而在两次观测之间的钟差可以认为是一个常数。如果轴的西端位于严格的西点之南，那么当望远镜指向天顶以南时，天体经过中丝便发生在子午圈以东，而当望远镜指向天顶以北时，便发生在子午圈以西。方位星的两次中天均发生在天顶以北，于是每颗恒星所观测到的上中天时刻就推迟了，而下中天的时刻则提前了。当方位差取相反的方向时，观测到的上中天时刻提前，而下中天推迟。不管哪一种情况，设以 τ_1 和 τ_2 表示仅仅由方位差引起的对于两颗恒星观测到的中天时刻的改正，以 t_1 和 t_2 表示已经作了其它仪器误差改正后的中天时的钟面时，则我们有

$$t_1+\Delta t+\tau_1=\alpha_1,$$

$$t_2+\Delta t+\tau_2=\alpha_2\ .$$

在由天顶 Z、天极以及过中丝时的恒星位置 S 所构成的三角形中(图 61)，利用正弦定律便可以求得有关方位改正的表达式。旋转轴对卯酉圈的交角称为方位常数 a，当轴的西端偏向南方时取为正。对这项工作来说，取 ZS 为子午圈上的天顶距可以有足够的精度。因此，考虑到 a 和 τ 为小量，上中天的方位差改正为

$$\tau=a\sin(\varphi-\delta)\sec\delta,$$

对下中天有

$$\tau=a\sin(\varphi+\delta)\sec\delta.$$

根据傍晚时对两颗方位星的观测，如果以 A_1 和 A_2 表示 a 的系数，通过两式相减就得到

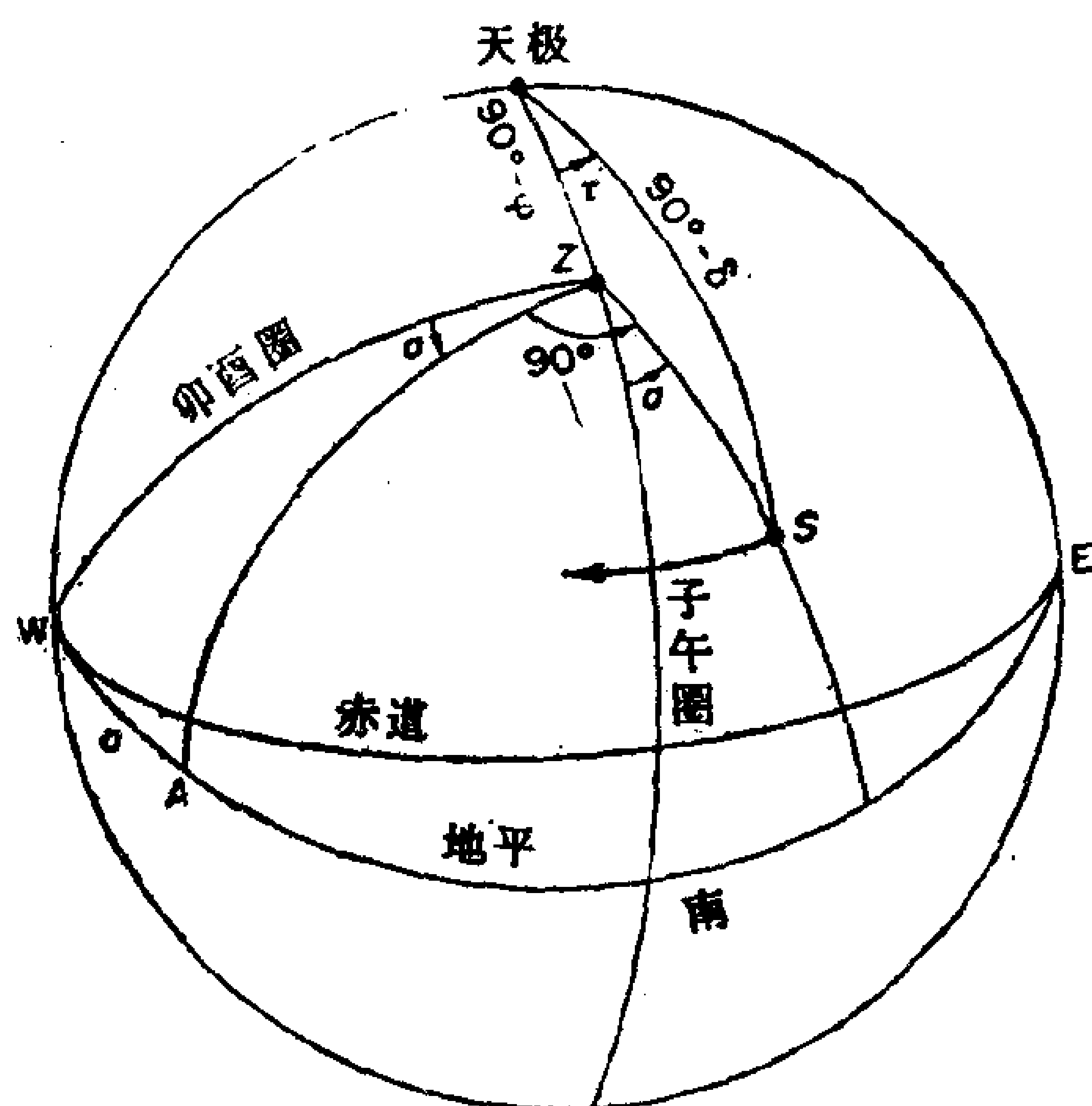


图 61 方位差

A——旋转轴的西端；ZS——准直面

$$(t_1-t_2)-(\alpha_1-\alpha_2)=a(A_1-A_2),$$

从这个式子可以求得 a，所得到的结果是由方位常数和恒星初始位置中的误差两部分组成的，但是，通过在第二天早上对同一对恒星所作的观测也同样可以来确定 a，其中恒星采用位置的误差则以相反的符号出现。因此，对傍晚和早晨两次测定取平均便消去了恒星初始位置的误差，从而就可以看作为子午标的真方位角。

用这种方法测定的方位角通常称为基本方位角，以区别于用其它方法所测定的方位角，后者要受到方位星位置误差的影响。夏天，我们不可能于同一夜晚或很相近的几个夜晚内，在天极上、下方两个位置上对方位星进行观测。夏天所得的方位角不是基本方位角，必须根据改正恒星位置时所用的方法，对仅仅从一次中天观测所确定的子午标方位角改正来进行归算。

有关仪器不同部分的弯曲改正是最难以测定的，而且也是最为不确定的因素。在度盘和望远镜镜筒弯曲所引起的各种影响中，

随天顶距而变化的部分可以用准直仪器来加以研究，而只要把对全部恒星的观测均匀对称地分布在仪器掉头的前后，那就可以使得随天顶距余弦而变化的那部分弯曲影响减少到最小的程度。

在典型的一般观测计划中，普通一类的每颗恒星在每一年内可以观测到两次。对于特殊的观测计划来说，则必须按照任务的要求把观测的周期延长，通常要进行若干年。在观测过程中，每隔一段时间仪器要进行掉头。刻度盘要按照需要转到不同的位置上，这样就能把度盘刻线误差所引起的赤纬残余误差平滑掉，因为在加上了已知的刻线误差后上述误差的影响也是不能完全消除的。把全部累积起来的观测结果作为一个整体来进行归算和平差之后，就完成了观测星表的编制工作。

子午观测的归算

在天体通过视场的过程中，所得到的是该天体在中天时经过一组测微竖丝或等效动丝的观测钟面时，以及测微器和度盘显微镜的一系列读数，由此便可以确定过地方子午圈的中天钟面时以及中天时的天顶距，其中需要知道蛛丝间距及测微器和显微镜螺旋读数所相当的角度值，并要进行仪器误差改正，还要考虑到通常的大气折射归算以及归算到地心的改正。

在因仪器构造缺陷所引起的仪器误差中，必须加以改正的有（1）测微器螺旋误差及显微镜螺旋误差，其中又包括周期误差和齿隙差，以及调节度盘显微镜时所产生的行差（也就是螺旋实际转动一周比所采用的周值所多余的量），由于调节显微镜物镜与度盘间的距离会使成象的大小发生变化，因而行差可以通过调节显微镜与度盘间的距离来加以改变；（2）度盘的刻线误差；（3）枢轴的不规则性；（4）弯曲效应。

有关这些误差的改正可以从对仪器所进行的各项研究的结果来加以确定。为了求得仪器校准误差的改正，需要在观测过程中每隔一段时间测定水平差、准直差、方位差以及天顶距丝的倾角。

为把中丝观测结果归算到子午圈上，需要加上准直差、水平

差、方位差的改正，还有周日光行差的改正。方位差的变化有一部分是由子午圈的变化引起的。在实际工作中，通常约定把周日光行差改正包括在准直差改正之内，而有关水平差、方位差以及包括周日光行差在内的准直差的各项改正，则联合起来成为统一的一项归算。为了求得有关这项归算的表达式，这三种误差可以同时一起考虑，也可以独立地加以处理，因为这些改正值都是很小的，它们可以彼此相加。

把这三项改正加在一起便给出了以下形式的归算公式，通常称为**梅耶公式**：

$$\tau = [a \sin(\varphi - \delta) + b \cos(\varphi - \delta) + c] \sec \delta.$$

如果把这三项误差一并加以考虑，则可以求得一个等价的表达式，而它在实际计算中常常是更为方便(图 62)。由于存在水平差，轴的西端指向天球上高度为 b 的一点 Q，又因方位差，该点的方位角为 $90° + a$，这里方位角从北向西计算。由于存在准直差，中丝所描绘的是一个以 Q 为极的小圆，其角半径为 $90° + c$。如果用 n 表示 Q 点的赤纬，以 $90° - m$ 表示它的时角，则在天极、Q

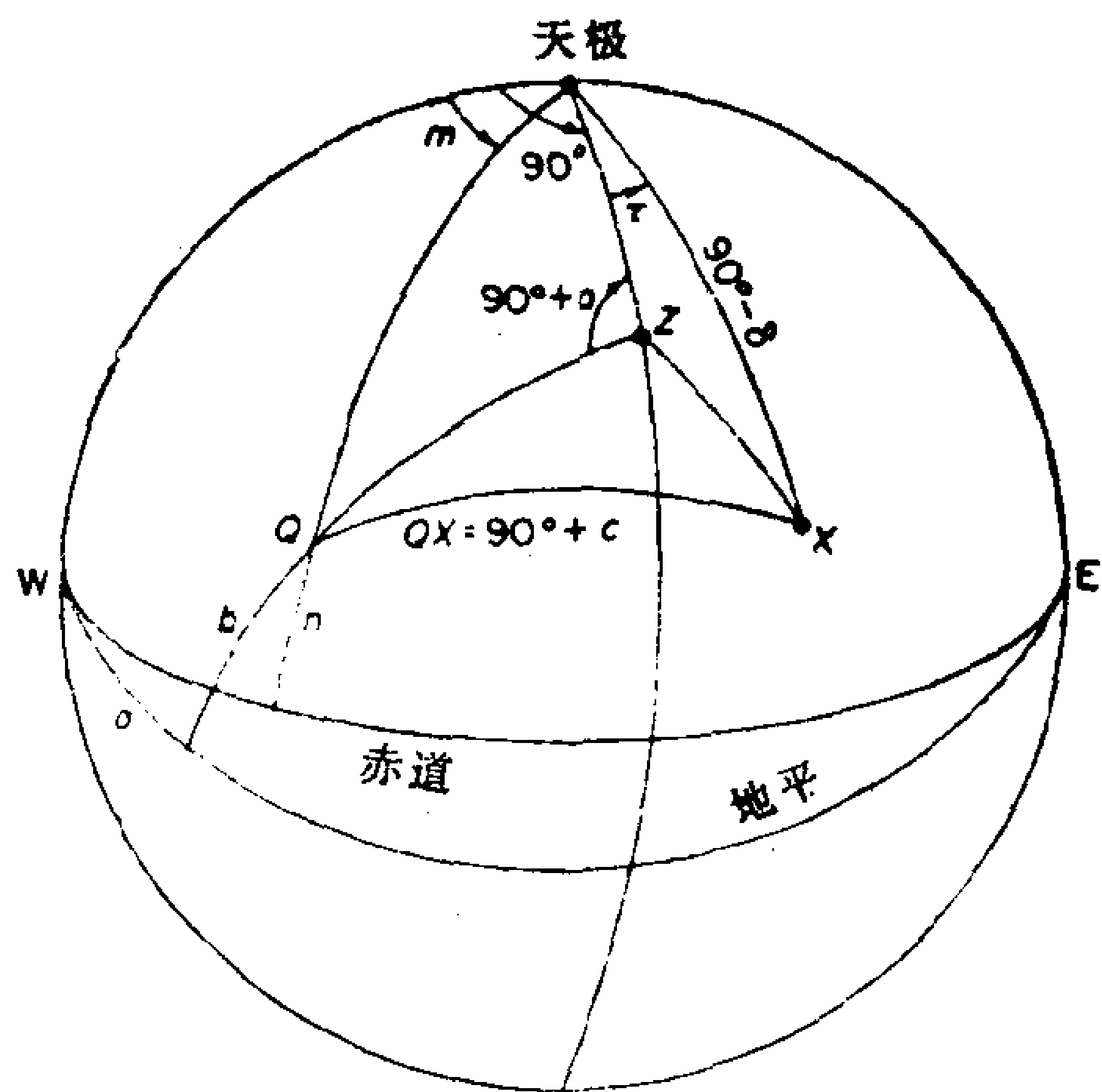


图 62　对于子午圈的归算

P——天极；Z——天顶；$PZ = 90° - \varphi$

点以及恒星过中丝时的位置X所构成的三角形中，由余弦定律有

$$-\sin c=\sin n\sin\delta-\cos n\cos\delta\sin(\tau-m),$$

由天极、天顶和Q点所构成的三角形有

$$\cos a\tan m=\cos\varphi\tan b+\sin\varphi\sin a,$$

$$\sin n=\sin\varphi\sin b-\cos\varphi\cos b\sin a,$$

因此，在保证足够精度的前提下有

$$m=b\cos\varphi+a\sin\varphi,$$

$$n=b\sin\varphi-a\cos\varphi,$$

$$\tau=m+n\tan\delta+c\sec\delta.$$

这种形式的归算公式称为**贝塞尔公式**，它可以从梅耶公式通过代数方法加以求得，其中需要把$\varphi-\delta$的正弦和余弦展开，并且把m和n代入。在实际计算中，周日光行差是同c归并在一起的，因而

$$\tau=m+n\tan\delta+(c-0.021^{s}\cos\varphi)\sec\delta.$$

另一种形式的归算公式就是汉森公式

$$\tau=b\sec\varphi+m(\tan\delta-\tan\varphi)+c\sec\delta,$$

在m和n的表达式中消去a就有

$$m=b\sec\varphi-n\tan\varphi$$

再把这个表达式代替贝塞尔公式中的m，便可以导出汉森公式。

把这一改正加在恒星过各根竖丝时所记录下来的时间的平均数上，再进一步加上有关枢轴误差的改正后，就把中丝观测结果归算为中天的钟面时，因为大气折射和地心视差的作用方向是沿着垂直圈的，所以它们对这里的归算便没有任何影响。要想把仪器误差和观测误差绝对准确地测定出来是不可能的，因而就不可避免地会存在残余误差。如果撇开这种残余误差不谈，那么中天时的钟面恒星时就是**视地心赤经和钟差之和**，这里的恒星时是对于瞬时子午圈计算的。由地理极的运动而引起的子午圈的变化，在子午环观测所得到的方位差中是非常明显的。如果仪器在地球表面的位置不变，而且又严格地固定在**形状子午圈**平面内，那么根据（118）式，任何瞬间的方位常数为

$$a=\gamma\sin(\Gamma+\lambda)\sec\varphi,$$

这里 (γ, Γ) 是瞬时极相对于平极的坐标，λ 是仪器的西经。因此，上中天时有

$$\tau_1=\gamma\sin(\Gamma+\lambda)(\tan\varphi-\tan\delta).$$

对于拱极星来说，这个量可能相当大。由于地极运动存在着14个月的分量，上中天和下中天之间的系统差在周年平均值中是消除不掉的。

通过对时星之间相对位置的观测，以及它们同太阳进行比较，可以确定对这些星所采用的初始赤经的改正，从而便求出了钟差这对于求得恒星的赤经来说是必须的。

为了求得中天时的天顶距，就要把经过螺旋误差改正后的天顶距测微螺旋读数和度盘显微镜测微螺旋读数换算为相应的角度值，为此需要事先测定螺旋的周值。经过度盘刻线误差改正后的显微镜读数的平均数就是度盘的读数，把这个读数同每次在天顶距方向平分恒星所得到的天顶距测微器读数相加，而后者又要经过天顶距丝倾斜改正以及仪器弯曲改正，这样便给出了经过改正后的仪器赤纬坐标读数。在这个读数中减去天顶点就得到各次平分的平均的观测天顶距，但是，由于天顶距方向平分恒星是在子午圈东、西两边进行的，所以从它们的平均所求得的这个数值是对应于某时角 t 处的天顶距，而这里的时角 t 则同各次平分所用到的具体的各根竖丝有关。因此，考虑到恒星在通过视场的过程中所走过的赤纬圈的曲率，就需要作进一步的改正，以便把观测天顶距归算为中天时的天顶距值。

设 P 为天极，S 是时角为 t 的恒星，O 为横丝同子午圈的交点，其交角为 $90^\circ+J$，O 点的极距为 $90^\circ-\delta'$，则从三角形 PSO 可以求得由周日圈曲率对子午圈归算的改正，以及天顶距丝的倾斜改正。在这三角形中(图63)，由 (3) 式有

$$\tan\delta=\tan\delta'\left(\cos t-\sin t\frac{\tan J}{\sin\delta'}\right),$$

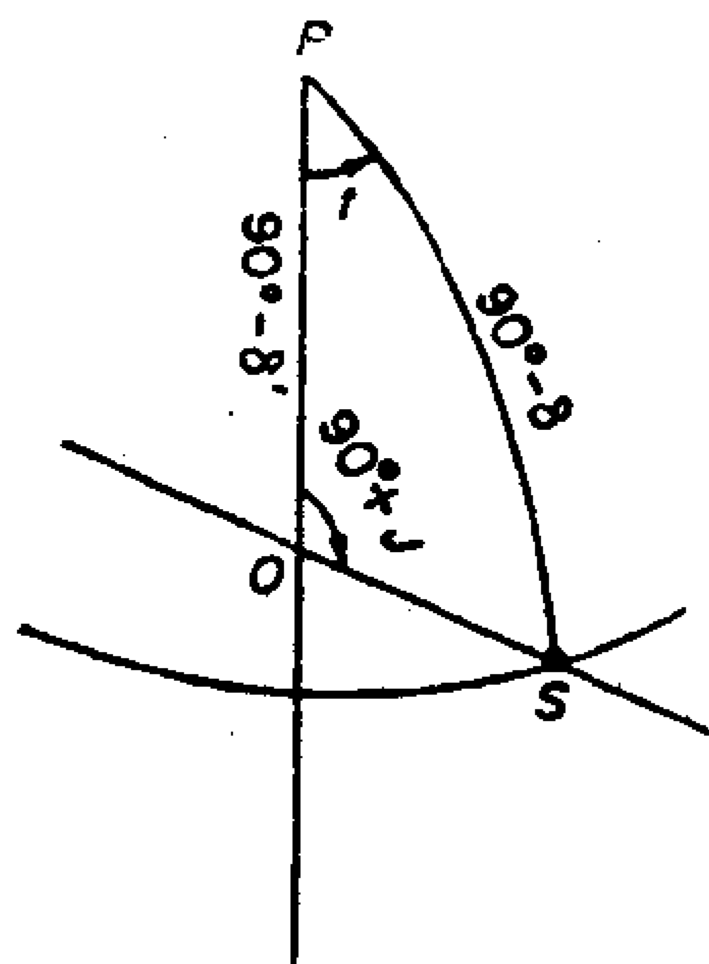


图 63　星径曲率和横丝倾斜的归算

它可以写为如下形式

$$\tan(\delta-\delta')=\frac{\tan\delta'}{1+\tan\delta\tan\delta'}\cdot\left(-2\sin^2\frac{1}{2}t-\sin t\frac{\tan J}{\sin\delta'}\right).$$

由于 t 、J 和 $\delta-\delta'$ 都是小量，在上式右端中可以认为 δ 和 δ' 相等，于是得到

$$\delta-\delta'=-\frac{1}{2}\sin 2\delta\left(2\sin^2\frac{1}{2}t+\sin t\frac{J}{\sin\delta}\right).$$

只要在中央竖丝两边相当距离处观测一颗恒星，并且把观测结果进行比较，这样便可以确定 J 的数值。

如果令 $J=0$，那就只给出对子午圈归算的改正，对此通常可取下式：

$$\delta-\delta'=-\left(\frac{t}{2}\right)^2\sin 2\delta.$$

由于在子午圈上周日光行差对天顶距的影响为零，因而经过大气折射改正后的视观测天顶距就是地心子午天顶距，不过对于太阳、月球和行星来说则还需要加上视差改正。同样，如果不考虑没有被完全消除的残余误差，那么这一改正后的天顶距值就是天体视地心赤纬和仪器纬度之差。

在太阳、月球和行星的观测归算工作中，为了从对边缘的观测结果中推导出圆面中心的位置，除了上面这些改正以外，还要涉及到天体的半径和天体圆面在中天过程中的自身运动所引起的修正，以及需要时还得考虑整个圆面未全部照亮所带来的改正。

为了求得赤纬就需要知道纬度，这或者可以采用预先经过测定所得到的纬度值，或者可以从天顶点中减去观测所得的度盘极点来求出纬度。极点（也就是当瞄准天极时仪器赤纬坐标的读数）是拱极星上中天和下中天的读数的平均值，其中要加上大气折射改正以及两次中天之间恒星视赤纬变化所引起的改正。但是，它要受到仪器误差和观测误差的影响，其中包括两次中天期间显微镜位置的变化，而且就象天顶点一样，极点也不能认为始终是固定不变的，否则，从中天时仪器的读数中减去极点就可以求得赤纬了，而且它与纬度无关，也不需要测定天顶点。在实际工作中，天顶点是至关重要的，这是因为重力为我们提供了在任何时间都可以直接加以测定的唯一的独立参考方向，而这个方向又为仪器读数确立了一个基准点。还有，为了确定极点，我们必须以天顶点为参照点来取得恒星在上中天和下中天时的读数，而且必须对它们的平均数加上天顶点变化的改正。确定极点是基本观测纲要中的一个重要部分，但是，通常在对观测进行归算时，总是习惯采用某个固定纬度值来求出赤纬的初值，然后再对这个初值加以改正，其中首先是因地极运动引起的纬度的连续变化，其次是纬度采用值的固定误差，在下面对观测结果的分析中可以表明这是必须加以考虑的。

由单次观测经过归算所得到的是中天时的钟面时和天顶距，而为了从中天的钟面时和天顶距推导出赤经和赤纬，就需要进一步对全部观测结果进行一次复杂的整体平差，这样才能确定钟差及大气折射误差和纬度，并尽可能减小残余的仪器误差和观测误差，特别是剩余的各种系统误差。对于单星的单次观测来说，即使作了改正和归算，精度一定是不可靠的，因而价值也必然是有

限的；如果在若干年内对大量的恒星进行了多次反复的观测，再加上观测太阳和行星，那么通过对全部观测结果进行一次综合的分析，就可以编制出一部很好的观测星表，其精度要较之单星的单次观测高得多。

观测结果的平差

平差的主要内容在于确定时星和拱极星初始位置的改正值，从而求得钟差并推出赤纬的系统误差改正。

恒星的初始位置是观测时刻的**视**位置，通常取自天文年历。因此，它们就同所采用的岁差常数、章动常数、光行差常数以及原始星表的位置有关。这些常数的采用值总是要进行修正的，但是总的说来目前所知道的这些常数的数值已经是相当精确的，因此，如果要能对它们作出重大的修正，那么这项工作所涉及到的观测序列的长度就要比编制一本星表所需要的时间长得多。视位置的采用值通常也同自行有关，不过平差方法决定了最后结果与自行无关。因此，从前后各本星表中的观测资料来推求自行，以及确定岁差、章动和光行差常数，这两项工作同每本基本观测星表的编制是分别进行、各不相干的。

恒星初始位置所需要的改正有两类：（1）春分点和赤道在恒星间位置的采用值的误差，这种误差不改变恒星彼此间的相对位置；（2）**相对**位置的改正。为了确定春分点位置的改正需要观测太阳和行星；而实际上，这些观测对于确定赤道的改正也是必需的。而只要观测恒星，便可以确定相对位置的改正。

平差的第一步是确定对时星初始赤经的改正值。求得这些改正值的方法在细节上是有某些变化的，从巳出版的各本星表上可以看出这一点，但它的基本出发点是认为对赤经采用值所需要的各项改正，是由分别加以测定的四个部分组成的：(a) 常数部分，也就是全部改正值的算术平均数，称为**春分点改正**；(b)随赤纬而变化的部分，其变化规律必须通过对这些恒星的观测来加以确定；(c)类似地还有随赤经而变化的部分；(d)总改正值的剩余部

分，有时又称为**偶然部分**，因为它是由作为初始位置所依据的那些观测的偶然误差所引起的。之所以能够把改正值分离为四种成份，那是因为我们可以认为初始赤经在一定程度上构成了某种非理想**系统**，这就是说，如果两颗恒星在天球上彼此靠得很近，那么它们的赤经改正大致上是一样的。**理想**系统与**正确**系统不同，在理想系统内应当不存在偶然误差，而且当两颗恒星间的角距离趋于零时，它们位置采用值的改正值将会严格地趋于相等。

对于时星位置的这些改正值必须通过逐次逼近法来加以确定。在作了有关视位置变化的改正之后，同一恒星相邻两次上中天之间的时间间隔就是一个视恒星日，根据这个道理便可以确定钟**速**的初始值；时钟所反映的时间间隔与视恒星日间隔之差便是时钟的周日速率。为了克服人差的影响，可以限制由同一个观测者对同一颗恒星来进行这项测定。如果钟的质量很好，那么这一间隔无须限制为一天，而可以是若干天。为此，我们可以利用实际钟面读数，不过实际工作中最方便的做法是根据每颗时星的每次观测结果，从赤经采用值中减去钟面读数来推出某种假定的钟差。从一颗恒星在连续几个夜晚的观测中所获得的一系列这种钟差，就可以对每颗恒星确定一个周日钟速，这是因为通过对连续各个钟差求差数，就消除了赤经采用值中的误差。

对每一颗时星进行一个星期、或者也许是几个星期的观测，然后对这段时间内所测到的全部结果取平均，这一平均值便给出了一个有足够精度的钟速初值，可以用它来把某一给定夜晚内所观测到的全部中天钟面时归算到某个选定的瞬间，这就是说经过归算以后，在整个这一夜晚内的全部钟面时就具有同样的钟差，而且这一钟差的数值应当就是该选定瞬间（比如说子夜）的钟差值。同样，可以把一个夜晚内全部所观测到的钟差的平均值，取为这一夜晚平均观测瞬间的钟差的初值或暂定值，再把连续几个夜晚的这类平均值进行比较，从而便可以确定钟速。钟速的这些初值同赤经采用值的误差无关，它们具有很高的精度，尽管在对

观测作进一步平差的过程中还会对它们加以少许的改正。

我们可以把每两个观测者之间的钟差之差列成一张表，并且在全部人差之和为零这一条件下求出**每个观测者减去所有观测者的平均值**这一差值。这些便是相对人差，可以把它们加在所有的钟差上，然后再利用这些钟差来进行下一步的讨论。至于绝对人差则可以用人差仪来加以测定。

每一夜晚某特定瞬间的钟差初值是根据赤经采用值来加以测定的，利用这个钟差初值以及钟速的初值，便可以求得这一夜晚每次观测的**钟差初值**。根据这个钟差初值来改正中天的钟面时，这样便给出了赤经观测值。它们与赤经的初始采用值有所不同，而两者之差便代表了对初值的改正值，但是在任何一个夜晚所观测到的全部恒星的经改正后的赤经的平均值，同全部初值的平均值是相同的，因此这些赤经观测值仍然不能算已经作了充分的改正。同钟速的情况不同，在任何一个夜晚所测定的钟差要受到用来确定这一钟差的时星的赤经采用值误差的影响，由此引起的钟差的误差就是全部时星赤经采用值误差的平均值，而且这一平均误差将包含在由具体这一组恒星的观测结果所推算出来的全部赤经值之中。这就是说，赤经观测值不是完全独立的，其原因在于每颗恒星的赤经就是从包括这一颗恒星本身在内的全部所观测恒星的赤经采用值推算出来的。具体来说，如果整个这一组恒星都受到全部恒星所共有的某种固定误差的影响，那么结果仍然同样会受到这种误差的影响。

如果把一年或连续几年内的观测结果综合起来，那么最后所求得的任意一颗恒星的赤经观测值的误差，就等于用来同这颗恒星进行比较的全部恒星的赤经采用值误差的平均值，再加上在进行这一比较时所作的观测的误差的平均值。这些恒星只包含了全体时星的一部分，但是如果在每颗时星的赤经采用值中只包含有偶然误差，彼此之间独立无关，可能为正值，也可能为负值，那么除了固定的春分点改正之外，最后结果将同**系统**误差无关。然

而，一般说来，赤经的初始采用值要受到系统误差的影响，而且必须确定这些误差对钟差初值的影响，并要尽可能地消除这种影响。前面曾经提到过在赤经采用值中存在着一种与赤纬有关的系统误差，这种误差主要是由以下几个方面造成的：（1）在作为编制星表的基础的那些原始观测中，存在着由于仪器误差改正的不完善所引起的残余的准直误差；(2)因不同赤纬的恒星周日运动速度不同所引起的人差随赤纬的变化；（3）其它各种原因。由于总是必须通过对同样的有限赤经范围内的恒星的观测来确定钟差的初值，这就往往会引起同赤经有关的误差，而这种误差是永远存在的。因周日温度变化或者别的周日效应所引起的系统误差，基本上可以通过在一整年内连续不断的观测来加以消除，这是因为具有某一赤经值的恒星在一年不同日期内的上中天时刻相当于是在一天的二十四小时内不断地改变。

如果知道了钟差初值，那么就可以按照下面的步骤来确定同赤纬有关的改正 $\Delta\alpha\delta$。先对由同一个观测者在一个傍晚或者一个清晨进行观测的不同恒星所确定的钟差初值取平均，然后再在各个钟差中减去这一平均值。在减下来的残差中就不会有固定误差的影响，而同赤经有关的误差尽管存在也不过只是一个小量，因为观测所涉及到的赤经范围是很有限的。如果把整个一年内所有观测的恒星用这样的方法求得的残差统统汇集起来，并且按赤纬进行分组，比如说分为五组，再以不同组的平均值为纵坐标、以赤纬为横坐标作图，那么这样做的结果便大大地减少了与赤经有关的误差以及偶然误差的影响，而且我们还可以通过图上画的各点作一条平滑曲线。如果再对另外一些年份中的每一年画出类似的曲线，那么我们就可能会发现，对应于同样仪器位置的那些曲线彼此间非常相象，但是同相反位置的那些曲线相比却可能会出现相当大的差异。这种情况的出现是因为某些仪器误差没有得到完全改正，横向弯曲也可能产生这样的效应，所谓横向弯曲也就是仪器在垂直于子午面方向上所发生的弯曲，对这一效应迄今

还没有找到令人满意的方法来加以改正。

一般而论，如果所有的曲线彼此间都符合得很好，那么就可以认为结果是可信的。如果它们有明显的不一致，那么就可能需要进行一些辅助性的研究，以确定其原因之所在，或者可以根据周围环境的具体情况对观测加以某些特殊的处理。要是一致性相当好，就可以对各条曲线取平均，而每颗恒星在平均曲线上的纵坐标就可以用来作为对赤经初值和钟差初值的改正。

类似的方法也可以用来确定同赤经有关的改正 $\Delta\alpha_{\alpha}$，不过，现在不再是按照几乎在同一个时刻对不同赤纬恒星所作的观测来进行分组，而是必须考虑对不同赤经所进行的那些观测。观测的条件往往总会造成一些随赤经而变化的系统误差，这是因为对于任一颗恒星在某个夜晚的钟差初值，一般说来仅仅是从在这颗恒星前后几个小时内上中天的那些时星推算出来的，因此这一钟差就包含了限制在有限赤经范围内的那些时星的平均误差。所以，如果赤经采用值的误差对于不同赤经的恒星有着系统的差异，那么在钟差初值中往往会产生一项类似的误差，不过后者的数值比较小，这是因为在求取这一夜晚的平均值时，每个赤经采用值的误差都已被除以观测的时星的总数。由于赤经的采用值是在相继的各个观测纲要中重复地加以改正的，因而同时也就对这些系统误差逐次地进行了平滑，它们最后往往大致具有这样的形式

$$\Delta\alpha_{\alpha}=a\cos\alpha+b\sin\alpha.$$

这就是说，在时星的赤经中会存在一种周期性的误差，只有从赤经差尽可能大的那些恒星来推算钟差，并且把所得到的各个钟差进行比较之后才能把这项误差消除掉。

为此，可以对彼此相隔很远的两组时星进行观测，其中一组在天黑之前进行，而另一组在天亮之后观测。在实际工作中，人们根据具体情况采用了多种不同的方法（例如，按赤经进行不同的分组），以及各种不同的处理方法，其中有曲线拟合，调和分析和最小二乘平差。

为了确定赤经采用值偶然误差的改正，要对一个夜晚所作的全部观测取平均，并且事先还要进行有关钟速以及随赤纬、赤经而变化的系统误差的改正，然后再根据这个平均值计算每颗恒星的钟差的残差。也就是说，这个做法同确定 $\Delta\alpha_\delta$ 中所用的处理方法是相似的，但是现在不是按赤纬带来整理残差，而是就某一颗恒星来收集所有的残差，这些残差的平均值便是对那颗恒星的改正值。

在尽可能确定出所有这些改正，并且把它们加在每颗时星的赤经初始采用值上之后，在从全部观测所得到的时星的最后赤经以及改正后的钟差中，仍然还存在着春分点改正这一固定误差的影响。这项误差对于全部恒星都是相同的。用改正后的钟差来代替原始的钟差观测值，并且根据需要重复整个处理过程，便可以得到第二次近似值，进而推算出一个**确定时钟系统**。根据改正后的钟差可以求得确定的钟速，不过它们同初始钟速只有很微小的差异，然后，用确定的钟速来改正每个夜晚的时星观测，便给出了确定的钟差。

现在，对每一夜晚经过钟速改正的普通类恒星的中天时刻是加上这一夜晚钟差的平均值，相加时钟差平均值应给以适当的符号。通过这一步归算就把普通类恒星同基本星置于同一系统之中，原因是在这步归算中已加上了从时星求得的钟差，也加上了通过对基本星观测的分析所求得的赤经和赤纬两个方向上的系统误差改正。

由此得到的结果是所观测的全部恒星的视赤经，但没有考虑春分点改正。它们所构成的系统是同上面介绍过的恒星间赤经差系统等价的，后者在叙述测定基本赤经的原理时已经作了说明。从最早的赤经初始采用值推导出这些视赤经的过程，只不过是一种便于实际使用的方法而已，借助于这一方法可以从观测结果求得赤经差(也就是相对位置)。而且在这种方法中，某一本星表所确定的春分点在消除了相对位置的星表误差之后，便用来作为某

个任意的零点，所观测到的赤经相对位置都要以它作为参考点。

从根本上来说，春分点在恒星间的位置必然同太阳观测有关，但是在能够把春分点改正测定出来之前，必须通过平差计算来推算出改正后的恒星赤纬，在平差中所求得的是在归算天顶距观测时用到的纬度和大气折射改正。纬度的变化通常是从用于特定目的的其它仪器所做的观测结果中求得的（例如，通过国际纬度服务），纬度改正中的常数部分以及大气折射改正，都是从观测纲要中用于这一目的而列入的那些恒星的观测推算出来的，下面就要说明这一点。

对于选定的拱极星来说，把它们初始测定的赤纬值归算到公共春分点，并且加上有关纬度变化的改正。然后就每一颗恒星取平均，上中天和下中天的观测要分开计算；再从每颗恒星的极上赤纬 δ 中减去极下赤纬 δ'。根据这些差值，就可以确定对于初始纬度以及大气折射常数采用值的改正；大气折射常数的误差引起了随天顶距而变化的差值，而纬度采用值中的固定误差对于全部恒星的影响则是一个不变的常量，这是因为存在以下的规律

$$\delta' - \delta = 2\Delta\varphi + \Delta R(\tan z + \tan z').$$

因此，这两种误差可以分别地加以测定，而全部赤纬观测值就可以加上相应的改正。

在大气折射中还可能存在另一项同周围环境有关的系统误差。具体来说，朝北方向观测时的大气折射可能同朝南方向观测时的大气折射量不一致。还有，在进行大气折射的归算时，水蒸汽改正通常是忽略不计的，而这也许会引起一年为周期的明显的系统误差，这种误差同局部条件有关。

当人们第一次确认极移以后，就引入了纬度变化的改正，这将使在此前后的相继各个历元所测定的赤纬中造成了某种突变，在把早期的星表同后来的星表进行比较时必须考虑到这一点。同样，通过太阳的赤纬，又会影响到春分点的测定。这一影响同地理位置有关，因而可以部分地解释在不同天文台的春分点早期测

定结果之间所存在着的某些不一致性。

从原则上说，这就完成了对基本赤纬系统的测定。但是，实际工作中发现，不同天文台所获得的结果表现有明显的系统差。它们的符合程度在天极附近要比其它地方来得好；在赤道上存在的差异可超过半弧秒，有时达到1″或2″。理由是天极在恒星间位置的测定精度较高，因为在观测拱极星时只用到刻度盘上的一小段弧，而短的弧段的测定精度要比长的弧段来得高。从某种非常实际的意义上来说，赤纬系统从天极扩展到赤道是一种外推，它要受到任何外推法所固有的全部误差因素的影响。天极和极距大的地方相比，两者的大气折射和弯曲改正的数值相差很大，又因为对某颗恒星来说各次中天的高度几乎始终是不变的，同天顶距有关的任何系统误差在所有的观测中都重复出现，因而通过对长时间观测序列取平均是消除不掉的。因此就产生了形式为$\Delta\delta_\delta$的系统误差，并且还可能出现形式为$\Delta\delta_\alpha$的误差。弯曲、纬度以及大气折射这三者的残余误差在天极相互抵消，但是在极距很大的地方它们可以迭加起来达到很大的数值。仪器弯曲以及大气折射的局部不规则性特别令人讨厌。

还可以用其它的一些方法来确定赤纬，尽管这些方法是不够令人满意的。在前面所述的方法中，赤纬同赤经的情况不一样，它不是通过推算出对初始采用值的改正值来加以求得的。但是，可以选定一组基本星的赤纬初始采用值，而其它恒星的赤纬就通过相对于这些基本星的较差观测来加以确定。对一颗基本星的每次观测给出了观测瞬间仪器赤道点和极点的两个初值。对一个夜晚内全部观测所得到的赤道点或极点取平均，平均值就用来作为推算这一夜晚所进行观测的普通类恒星赤纬的赤道点或极点的数值。

在这个方法中，通过仅仅对离开天极10°～12°范围内的那些基本星的比较，就可以消除赤纬采用值中系统误差的影响，在上述范围内系统误差是非常小的，而且实际上可以通过上下中天

两次观测确定极点的办法来把它们消除掉。由此可以对赤纬采用值进行改正，使之同拱极星观测本身所确定的结果相一致。

另一方面，也可以只是对位于某一赤纬带内的那些基本星来进行比较，赤纬带的宽度可以是 5° 或 10°。在这样一条赤纬带范围内的系统差可以认为接近于零，如果普通类恒星也位于同一带内，那么它们的赤纬观测值就仅仅只受到这条带内基本赤纬所共有的固定误差的影响。这一固定误差在天极之上和天极之下具有相反的符号，它可以通过在天极上和天极下对同一颗恒星所测得的赤纬之间的系统差来加以确定。

如果把同一架仪器放在两个地理位置上，一个在北半球，一个在南半球，并且又都观测同样的一些恒星，那么这样做还可以把赤道的位置求出来。但是，通过对太阳和行星的观测，可以以很高的精度来确定赤道在恒星间的位置，而且这一方法看来是改正仪器系统在赤纬方向上的系统误差的最好方法。为此，也为了通过恒星和太阳间的比较来确定对于赤经的春分点改正，就需要在白天对恒星进行观测。

春分点和赤道的确定

根据由**夜晚恒星**所测得的**确定的**钟差和**确定的**钟速，来改正太阳和行星中天时所观测到的钟面时，由此得到的便是太阳和行星对于**初始春分点**的赤经的观测值，这里的初始春分点是由时星的赤经采用值所确定的，其中的赤经采用值已经过了除春分点改正这一固定误差外的全部误差的改正。因此，这些赤经观测值就相当于太阳或行星的赤经同恒星赤经之间的**差值**的观测值。实际计算中，太阳**在恒星之间**所处的位置也就是用这种形式来加以表达的，为了确定系统的春分点改正并求得真赤经，就需要进一步测定太阳相对于春分点的绝对位置。还需要对太阳和行星的赤经观测值进行有关观测误差的改正。此外，从太阳和行星的赤纬观测值出发，通过对赤道位置的独立测定，由夜晚恒星观测可推算出初始赤纬系统的改正。

由于在确定赤经的过程中所用的仅仅是从夜晚恒星观测推算出来的钟差，因此太阳和行星的赤经观测值同恒星属于同一系统。对白天恒星的观测，仅仅是用来研究白天观测和夜晚观测之间所存在的系统差。太阳和行星的观测必须在白天进行，我们无法保证这种白天观测同夜晚所作的观测具有系统上的一致性，因为白天阳光要射入子午环观测室，而且也许会照在仪器上。利用白天的恒星来测定钟差（测定的方法和利用夜晚恒星的方法是相同的），而这些钟差则通过各种途径被用来研究白天观测和夜晚观测之间所存在的差异。具体来说，就是把它们同夜间测定的钟差来进行比较，而通过这种比较之后，即使在某些天内不可能观测到白天的恒星，也同样适用于太阳观测。但是，白天的时星并不用于确定赤经，把白天的恒星包括在内的主要目的是要确定太阳和行星的赤纬观测值，使其和夜晚恒星的赤纬系统相同。为此，我们要把白天恒星的赤纬观测值和同样一些恒星夜晚观测的结果仔细地加以比较，如果必要的话还得求出一些经验改正值，一旦把这些改正值加在白天的观测结果上时，白天观测同夜晚的观测就有相同的基础了。把这些改正值加在太阳和行星的观测结果上，就使它们归入由夜晚恒星的赤纬观测值所确定的初始赤纬系统之中。

这样，就可以对太阳、行星以及恒星的赤经、赤纬观测值进行相互比较，而且还得把赤道和春分点纳入这一系统之内，所用的方法是确定它们对于太阳和行星的观测坐标的相对位置。

原则上说，可以从全年内的太阳视赤纬观测值来确定春分点的位置，方法是从下面的关系式来计算赤经

$$\sin\alpha=\cot\varepsilon\tan\delta,$$

式中黄赤交角 ε 是通过二至点附近的观测来加以确定的。对这一关系式求微分有

$$\cos\alpha\Delta\alpha=\cos\varepsilon\sec^2\delta\,\Delta\delta-\tan\delta\,\mathrm{cosec}^2\varepsilon\,\Delta\varepsilon,$$

由此

$$\cot\alpha\Delta\alpha+\frac{2\,\Delta\varepsilon}{\sin 2\varepsilon}=\frac{2\,\Delta\delta}{\sin 2\delta}.$$

因此，实际上在利用这个方法时，只有在二分点时刻附近对赤纬所作的观测才会给出对春分点的高精度测定。在二至点附近，太阳赤经的计算值是不精确的，因为除了太阳观测所特别容易产生的那些误差之外，这时黄赤交角误差的影响为极大。在二分点附近，为了求得精确的赤经，黄赤交角的数值并不需要有很高的精度，而且，少量的误差在不同季节内的影响是相反的。为此，我们可以利用二至点附近的观测来求得有足够精度的黄赤交角，这时黄赤交角是从赤经和赤纬的观测值来计算的，因为这时赤经的误差几乎不会有什么影响。

但是，目前所知道的黄赤交角和春分点的精度，要比为了这一个目的专门在二至点和二分点时刻进行个别几次重新测定所能得到的精度来得高。只有对太阳、行星和恒星进行长期的、连续不断的观测，并通过对这些观测的分析和平差来确定它们的**改正值**，这样才能使测定精度得到进一步的提高。因此，从即时观测得到的太阳的赤纬和观测所得的黄赤交角来计算太阳的赤经，并且同太阳的赤经观测值或者直接同恒星进行比较，从而直接测定春分点的这种做法，已经为另外一种在实际工作中具有更多优点的做法所代替，这后一种做法就是同时把太阳的赤纬观测值和赤经观测值去和某种采用的太阳理论所计算得到的太阳历表进行比较。通过对**残**差(O—C)的分析，推算出对于表列理论坐标值的改正，其中所用到的方法同通过与观测的赤经值进行比较来确定恒星赤经采用值的改正的方法是差不多相同的，对于行星来说情况也是类似的。

春分点的误差只是出现在恒星系统内。太阳理论中是不存在任何春分点误差的，但是太阳和行星的表列位置必然要受到因理论不完善所引起的误差的影响。因为观测位置是相对于恒星系统来加以确定的，所以在残差（O—C）中就包括有：

（a）恒星系统的春分点误差；

（b）太阳和行星的历表位置的误差，这是由表列黄赤交角和表列黄经的误差引起的；

（c）太阳和行星观测中的偶然误差和系统误差；以及

（d）恒星系统中的赤道的误差。

因此，我们必须对这些残差进行分析，以便确定观测误差的改正，求得对于表列黄经和黄赤交角的改正，以及确定春分点和赤道。

赤道的位置是从赤纬残差推算出来的，而且这些残差也确定了对于表列黄赤交角和表列黄经的改正。经过太阳黄纬改正后的太阳的表列赤纬，同根据所采用的理论以及黄赤交角采用值而算得的黄经 λ 有关。对关系式

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin\lambda,$$

进行微分并且代入

$$\cos\lambda=\cos\alpha\cos\delta,$$

$$\cos\varepsilon\sin\lambda=\sin\alpha\cos\delta,$$

于是对每次太阳观测给出一个条件方程

$$\cos\alpha\sin\varepsilon\,\Delta\lambda+\sin\alpha\,\Delta\varepsilon+\Delta_O=\delta_O-\delta_C,$$

式中 Δ_O 是对全部太阳赤纬观测值所共有的固定误差，这是由用来确定观测位置的恒星系统中赤道的误差引起的。在组成残差之前，先要对赤纬观测值进行有关白天误差[1]和太阳黄纬的改正。残差中的周期项以一年为周期；由黄赤交角误差所引起的周期项是和赤纬同相的，而由黄经误差引起的周期项在相位上要超前四分之一周期。

利用最小二乘法解算这些条件方程，求得赤道的改正值 Δ_O 以及对于表列黄经和黄赤交角的改正值 $\Delta\lambda$、$\Delta\varepsilon$。必要时可以把

[1] 白天误差是指白天和夜晚观测之间的系统差。——译者注

$\Delta\lambda$ 表示为理论工作中所用到的地球轨道要素的改正值，并且就这些改正值进行解算。

从最小二乘法解算所求得的 Δ_0的值，就用来作为原先测定的赤道星赤纬的改正值。从本质上来说，这就是下述原理的一种应用，即黄经误差或黄赤交角误差不可能造成某种固定误差，所以，**平均而言**因理论误差引起的对于太阳表列赤纬的改正值必然为零，因为黄道是一个大圆，于是它同赤道相交于严格相差180°的两点。因此，在把太阳的观测结果归算到恒星的赤纬系统之后，赤纬残差的平均值如果不等于零，那么就应该解释为恒星赤纬的误差，而为了求得赤纬的确定值就应该从原先所测定的赤道附近恒星的赤纬中扣去这个平均值。

至于介于赤道和天极之间的那些恒星的赤纬应该怎么办，这一点是不那么容易看清楚的。误差必定会具有某种分布的形式，它是变化的，在赤道上达到最大值，而在天极处则为零，至于具体情况究竟怎么样那是一个需要区别判断的问题。一般说来，由拱极星观测所确定的极点，利用水银地平找到的天底点，以及从太阳推算出来的赤道点，这三者同大气折射采用值以及水平弯曲的观测值是匹配不起来的，必须进行某种平差计算。对大气折射进行新的解算的结果将使极点有所变动，因而可能使得从极点和天底点推算出来的纬度值发生改变，但是，天极附近的较差效应差不多是一样的，因而对赤纬可能没有影响。

由于通过太阳和内行星的观测求得了仪器赤纬的改正，因而全部现代观测星表的赤道点都是非常接近的，但是，由仪器极点以及赤道点所建立的两个系统中，任何一个都不可能保持在度盘上90°范围内有同样的精度，因而介于天极和赤道中点处的赤纬就必然是最差的。

如果确定了赤道在恒星间的位置，那么也就完成了对于恒星基本赤纬的测定，这时我们就可以确定春分点改正。为此，要用到从赤纬残差求得对于表列黄经和表列黄赤交角的改正值。

对下式

$$\tan\alpha=\cos\varepsilon\tan\lambda$$

进行微分，并且利用这一关系式本身以及关系式

$$\cos\lambda=\cos\alpha\cos\delta,$$

$$\tan\varepsilon\sin\alpha=\tan\delta,$$

来消去微分关系式中的 λ，这样便得出

$$\Delta\alpha=\cos\varepsilon\sec^2\delta\,\Delta\lambda-\cos\alpha\tan\delta\Delta\varepsilon,$$

由此给出太阳的真赤经

$$\alpha=\alpha_C+\Delta\alpha.$$

对于每次太阳观测来说，就利用这个公式把根据赤纬残差求得的太阳黄经改正转换为对表列太阳赤经的改正。由于对表列赤经的改正$\Delta\alpha$是根据太阳赤纬的观测值来加以确定的，因而这种做法相当于从赤纬观测值来计算赤经，但是首先要把直接观测所得到的赤纬值归算到恒星的确定的赤纬系统。如果观测在一年的各个月份内大致是均匀分布的话，那么 $\cos\alpha\tan\delta$ 的年平均值实际上等于零，而 $\cos\varepsilon\sec^2\delta$ 的年平均值接近于1，所以对于年平均值来说，取 $\Delta\alpha=\Delta\lambda$ 就足够了。

由于太阳赤经的观测值要归算到确定的时钟系统，它同真赤经所相差的仅仅就是该恒星系统的春分点改正E。因此，真赤经为

$$\alpha=\alpha_O+E,$$

而令这个 α 与上面通过计算求得的 α 值相等就给出春分点改正

$$E=\Delta\alpha-(\alpha_O-\alpha_C).$$

对全部观测值所得到的E值取算术平均值，就可作为春分点改正，把它加在每一颗恒星的赤经上，就完成了基本赤经的确定工作。

利用行星的观测也可以求得对于赤道以及黄赤交角和春分点的改正，其所用的基本原理同太阳观测是一样的。把根据太阳和每一颗行星所确定的各个改正值进行加权平均，这样便求得了一

个确定的改正值。行星的平均日心轨道在天球上的投影是一个大圆，因此由于理论轨道运动误差所造成的表列赤纬误差的平均值必然为零，这和太阳的情况是一样的。观测位置对于计算位置的任何系统偏差，不管是偏北还是偏南，都可以归因于赤道点的系统误差，因此除了行星观测中的系统误差之外，由（$O-C$）的平均值所给出的表列赤纬中的观测的固定误差就代表了恒星赤纬系统中的某种误差。行星赤纬的观测值是相对于基本赤道星的赤纬来加以测定的，可以预料在基本赤道星的赤纬中会带有这样的一种系统误差，它沿着赤纬圈几乎是固定不变的，而且在黄道带范围内的不同赤纬处也没有太大的变化。因此，只要在条件方程式中对行星的表列赤纬加上一项常数改正，就可以确定对于赤道星赤纬改正的平均值。同样，时星赤经中的春分点改正使行星赤经的观测值产生一个固定误差，但是，无论是地球还是行星的轨道要素误差都不可能产生任何固定误差，因而平均而言对于表列赤经的改正值为零。所以，如果观测均匀地分布在行星的整个轨道上，而且不受观测系统误差的影响，那么就应该把（$O-C$）的平均值解释为赤经系统的春分点的某种误差。

纽康首先从实际上广泛地利用行星的观测来确定赤道和春分点。在早期，人们完全依赖于太阳的观测，因而在结果中表现出由于这些观测不可避免地存在着的误差而引起的严重的系统性影响。现在，在实际工作中通常还包括观测明亮的内行星，以及有时候也包括观测其它的一些天体，从而使太阳观测结果得到了进一步的补充。全部观测必须均匀地分布在行星的整个轨道上，这样，轨道要素的误差以及春分点误差就不致于给赤经带来一项固定的误差。对这项工作来说内行星最为适宜。外行星只能在冲附近进行观测，因而就不太有利。迄今已经获得的适用于这项工作的观测系列是很少的，而木星以远的那些行星实际上完全不能予以利用，其原因在于对它们在整个轨道上进行观测需要很长的时间。

原则上说，仅仅依靠行星来解决问题应该是有可能的，这样就避免了观测太阳和白天恒星带来的困难。但是，行星有一定大小的圆面，内行星的位相是在不断变化的，再加上必须在大白天观测内行星，这一切所引起的困难同样是很大的，因而在实际工作中，赤道和春分点的确定原则上只是依靠观测太阳。太阳、水星以及金星的观测位置的或然误差大约是晚间观测恒星时误差的四倍，因此必须进行大量的观测，而且要是不观测白天的恒星，那么对太阳、水星以及金星的这些观测就不可能很好地同夜晚恒星的观测联系起来。

理论上说，利用小行星可以避免传统方法的主要困难，小行星的外貌酷似恒星，并且可以在夜晚进行观测。但是其亮度足以为子午环所观测到的小行星为数甚少，而且为了取得足够数量的高精度子午观测需要非常好的观测条件。此外，对于这项工作必须有高度精确的日心运动理论，但是在过去还不具备这样的理论。因此，只是在最近人们才能系统地考虑在实际观测中用小行星来取代太阳和明亮的内行星。1928 年，戴森提议通过观测灶神星来确定赤道和春分点，而实际观测方法则由特尼普鲁夫斯基，努曼罗夫等人提出并作了推广。1935年，耶鲁大学天文台的布劳威尔开始了一项对 16 颗小行星进行广泛照相观测的计划，其目的不仅在于要确定赤道和春分点，而且还要确定恒星基本位置中的其它系统误差。1948 年克莱门斯建议对比较明亮的小行星进行系统的子午观测。通过对于子午环所能观测到的那些小行星进行足够数量的、均匀分布的观测，就可能在赤道和春分点的测定工作中取得很高的精度，而且同时还能够很好地确定地球的轨道要素。为了在子午环的有限视场范围内识别出一颗小行星，以及为了对观测结果进行分析，就需要有精确的星历表，而有了高速计算机就可以利用数值积分技术来具体地实现这一点，从 1949 年来对于谷神星、智神星、婚神星和灶神星已经有了这样的星历表可用。随着长期观测系列的积累，以及精度越来越高的引力理论

的发展，也许就有可能免去对太阳的观测，并且只要每隔一段比较长的时间间隔对水星和金星进行一次观测以便改进它们的轨道就够了。

通过小行星作为中间天体，从而把恒星和太阳进行间接比较的这种做法，从原理上说，可以同过去所用的确定恒星位置的方法相比——这种方法从古代最早期测定工作的时代起，一直用到18世纪初，它是以月球为中间天体来对恒星和太阳进行比较，或者在近代早期则是以金星作为中间天体。但是，为了确定中间天体同太阳之间的关系，并不是通过古代做法中所用的直接观测，而是通过数学计算，因而这一方法的实际应用必须期待于高精度行星运动理论的发展，这正象要做到把恒星和太阳进行直接比较以改变古代的方法，那就必须期待于精密时钟的发展一样。

星表位置的确定

从观测所确定的每一个位置，都是对于具体观测瞬间的瞬时春分点和瞬时赤道的位置，而在观测纲要所涉及的整个时期内，通常对每颗恒星要取得若干次观测。为了使结果可以互相进行比较，所有的赤经和赤纬都要归算到同一个平春分点和平赤道，它们应该是离开全部观测平均历元不远的某贝塞尔年岁首的春分点和赤道。然后，对每颗恒星各次测定的结果取平均，这个平均结果便用来作为恒星的位置。

我们可以把由此所得到的位置，看作为在**全部观测日期平均时刻所实际观测到的恒星的位置**，而在这一历元，恒星的位置同任何有关自行的假定无关，不管在归算和计算工作中有没有用到任何自行都没有关系，观测纲要就是按照无需用到任何恒星的自行这样一种方法特意制订出来的，不过对时星和方位星来说，可以用自行的近似值来计算它们的视赤经采用值，因为这样一来钟差和方位角的测定精度就提高了。但是，在任何情况下，相对于**观测平均历元附近的某平春分点和平春道**的坐标就给出了**这一历元时**的恒星位置，它同自行无关，这也就是在星表中所列出的坐

标值。

除了对应于星表历元和星表春分点的这些平均赤经和平均赤纬之外，为了便于推算出同星表春分点相隔不太远的任意日期的恒星位置，习惯上还要包括岁差及其长期变化(计算时假定自行为零)。此外，通常还可以给出自行的近似值，这样就大大增加了星表的价值，尤其当星表中某些恒星的自行在其它地方不可能找到时就更是如此。

较差星表

在实际工作中，基本参考系必然只能限于为数不太多的比较明亮的恒星。要想把这个系统中的星数扩大，增加为数众多的暗星，那就必然要损失一些精度，而且只能通过较差测量的方法来做到这一点。照相观测是目前用于这方面工作的主要手段。但是，为了能使在天空中任意区域所拍摄的任何一张底片上可以出现有足够数量的参考星，那就还需要用子午环来进行较差测定。标准基本星太亮，不能直接用来作为照相底片上的参考星，而且也需要有数目比标准基本星多得多的参考星。

如果为了要以实际上所能达到的最高精度来确定尽可能多的恒星的位置，则观测工作需按赤纬来分带进行。因此，从这一次观测到下一次观测之间，观测者不必使望远镜在赤纬方向有很大的变动，而是在几个小时之内使望远镜始终保持在近于相同的方向上。每组观测所涉及的赤纬带的宽度取决于作为观测对象的恒星的数量，通常这一宽度大约只有5°或者5°以下。度盘上的赤道点以及钟差，是根据这条带内所出现的基本星来加以确定的。

第十八章　基本星系统

在 19 世纪初期之前，人们一向是直接用当时已经取得 的 最好的基本观测星表来作为参考系。然而，对于一个完整的参考系来说，自行是其必不可少的一个组成部分，而我们只有通过对前后不同历元所编制的不同星表间的比较才能求得天体的自行。还有，对于每一本观测星表来说，它不可避免地会带有比较大的误差，这是因为在实际工作中要想绝对准确地测出仪器误差和观测误差那是不可能的，而且也不可能在建立星表的过程中通过对观测结果加以改正和进行平差的办法把这些误差完全消除掉。不同的天文台在前后不同历元时刻编制了大量的星表，对这些星表进行内部比较，可以求出每个星表所特有的误差的改正，同时把这些不同时间的星表位置，通过对上述改正进行平差，就可以推算出满足尽可能消除各别星表的误差、特别是消除其中的系统误差这一要求的天体的位置和自行。把不同天文台的若干本星表综合起来进行平差后所建立的星表称为**总星表**。根据基本观测星表建立起来的星表就是**基本总星表**，目前就是用这种方法来建立一个标准的基本星系统。

基本参考系的建立

在用来建立基本星系统的各本观测星表中，包含了一大堆各种各样属于不同系统的资料，这是因为在建立这些观测星表时所用到的仪器和方法是五花八门的。要把这些各种形式的星表归算到一个均匀的系统，并且从它们推算出天体的最佳位置和自行，那是很困难而又很花费时间的工作。就目前所采用的常规做法来说，其基本轮廓始终是相同的，但是当它应用于各种 特 定 场 合时，所需要的详细过程则同具体情况有很大的关系，特别是同有

待于加以综合的各本星表的性质有关，因而实际上对于建立每一本总星表的工作来说，其本身在很大程度上已构成一个专门性的问题。还有，对不同的星表进行平差并组合成一个最佳的综合系统的工作，一方面需要依靠由长期工作经验所积累起来的高度熟练的技巧和正确的判断能力，另一方面也同具体做法中所用的技术有关。因此，我们所能给出的只是一般性的概况介绍。我们可以在每本星表的出版说明中，找到为建立不同的专门星表而采用的具体做法的各种细节。

星表的比较以及将它们归算到均匀系统

在观测星表中，任何一颗恒星的表列赤经和表列赤纬，就是该恒星在观测历元所观测到的、相对于靠近这一观测时刻的平春分点和平赤道的位置，这里所谓的观测历元就是对于这颗恒星所作的各次观测的平均时间。从不同的星表得到的对应于前后不同历元的同一颗恒星的一系列位置，如果不存在任何的观测误差，那么造成不同位置彼此间差异的就只有岁差和自行这两个原因，只要把它们归算到某个公共的春分点和赤道就可以推算出恒星的自行。然而，造成同一颗恒星在不同星表中坐标位置间实际差异的部分原因，还在于观测结果中既有系统误差，又有偶然误差，必需首先对这些差异进行分析，以确定这些误差并尽可能将其削弱，然后才能推算出可靠的自行和确定的位置。

如果把某一本星表中大量恒星的位置同另一本星表中同样这些恒星的位置进行比较，并且就每一颗恒星求其差值，那么在总体上就会发现若干规律性的东西，而这就说明存在着系统误差。如果观测误差完全是偶然误差，那么随着被比较恒星星数的增加这些差值的平均值就应该趋近于零。但情况却并非如此，这个平均值通常收敛于某个确定的正数或者负数，至于具体数值则随被选来进行比较的星群的不同而异——例如，在宽为 5° 的各条赤纬带内，平均来说，同样一些恒星在两本星表中的表列赤纬之差是很显著的，而且这一差值随着赤纬带的不同作有规律的变化。

同样，我们可以按每一小时赤经范围，每一星等或者其他某种方式来对恒星进行分组，这时，平均来说，每一组恒星之间可能是有差别的，这种差别就是它们在不同星表中的位置间存在着的系统性差异。

星表间的这种系统差是许多不同的因素综合影响的结果，这些因素常常是不清楚的，它们对各组恒星的位置的影响程度也是不同的。产生差异的原因可能在于对时星选择的不同以及时星位置采用值的不同，此外，严格说来某些观测星表中的赤经并不是基本赤经，没有测定对于时星赤经的任何改正。有时，没有用丝网屏来消除星等差。不同时期在对观测结果进行归算时，所采用的章动、光行差及大气折射常数是各不相同的，而仪器纬度的采用值也可能一直是有误差的。最为重要的是，由不同仪器和不同观测员的固有特性所产生的系统差——例如，度盘的刻线误差，时钟及仪器本身的周日温度效应，以及各种各样的人差，前者可能没有予以重视，或者不能以很高的精度来加以测定，时钟的周日效应对于比较早的一些星表的影响尤为突出。系统误差的出现往往看不出可以用任何明显的原因来加以解释。

通过对不同的观测星表进行恰当的相互比较，可以推出每本星表中不同的星群的平均改正，于是就可以把不同星表中全部恒星的位置归算到统一的系统中去，剩下的只是因偶然误差所造成的差异。为了发现许多可能存在着的系统误差，并估计出误差的性质和大小，上面所说的乃是唯一可行的方法。对各本星表引入有关星表之间系统差的改正，这主要是由 1865 年奥韦尔斯做的工作所提出的。在很大程度上来说，对这些系统差的平差工作必然取决于实际经验。采用的方法多半是试验性的，随具体情况的不同而有所不同，而且从这一问题本身的性质来看，要想完全严格地求得改正值的准确数值必然是不可能的。必须对每一本星表进行详尽的研究，这就是说要研究观测和归算方法的各个微小的细节，彻底地研究每架仪器的特性和不同观测员的人差，以及分

析这一本星表同其它比较星表间差异的特有性质。做这项研究工作需要有对观测方法完全熟悉、而且能全面掌握有关误差理论各方面知识的素有经验的天文学家。

在编制一本观测星表时，对于采用星表中表列位置的改正是通过观测而不是通过同其它星表的比较来求得的，这里有春分点改正，同赤经本身有关的赤经改正和同赤纬有关的赤经改正，以及同赤经有关和同赤纬有关的两类赤纬改正。在星表比较时通常所要加以确定的各项系统改正，也包括了上述这些系统改正，而且所用的方法也差不多是一样的。例如，在确定同赤纬有关的赤经改正和赤纬改正的过程中，将不同星表中同样一些恒星的位置差异按赤纬带进行分组，然后通过作图来表示各带的平均值与赤纬之间的关系，并用一条平滑曲线来进行拟合。在实际工作中可以有两种做法：一种是选取某一本星表，并把它同所有其它星表进行比较；另一种做法是在相同历元的各本星表之间进行比较。不管哪一种情况，都要确定每两本星表之间的平均差异，对于所有这些平均值进行适当的加权平均之后，就可以推出加在每本星表全部恒星上的系统改正。

星表的综合和基本系统的建立

对于一系列历元为 t_i 的观测星表进行有关各星表间的系统差改正之后，我们就可以认为最终所得到的每一颗恒星在各本星表中的位置间的差异，仅仅是由岁差、自行以及观测中的偶然误差这些因素引起的。当把所有这些位置归算到某个公共的春分点和赤道之后，就可以通过最小二乘法平差来推出对于某选用历元 T_0 的自行 μ_α、μ_δ 和位置(α_0, δ_0)。

除了那些高赤纬、大自行的恒星之外，在一般情况下，可以把相对于同一春分点和赤道的赤经、赤纬方向的自行看作为常数。设以历元 T_i 的春分点和赤道为参考时，每本星表相对于观测历元 t_i 的坐标为 α_i、δ_i，如果仅仅相对于标准历元 T_0 的春分点和赤道进行岁差归算到 $(\alpha_i)_0$、$(\delta_i)_0$，那么就给出了如下

形式的条件方程

$$(\alpha_i)_0=\alpha_0+\mu_\alpha t_i, \qquad (\delta_i)_0=\delta_0+\mu_\delta t_i.$$

在用最小二乘法解算这些方程时，可以根据每本星表的估算精度对其中的恒星位置进行适当的加权。

严格说来，由此所获得的自行，是相对于 T_0 历元的天极而言的全部历元平均时刻的自行值。观测位置（α_i，δ_i）与自行无关，但是在把它们经岁差归算到某个公共历元 T_0 的过程中，岁差变化的数值同这些坐标值有关，因此严格说来也就同自行有关。

如果不是把每个观测位置都归算到历元 T_0，那还有另外一种办法可以得到同样的结果，而且做起来也比较方便；那就是先采用一个对应于 T_0 或其他某个历元的初始位置，然后再利用自行的某个初值把这个初始位置归算到每个观测位置的日期，并且再把结果同实际星表位置来进行比较。根据比较所得到的差值，就可以推算出对于所采用的那些初始值的改正值；一般情况下，可以假定坐标所需要的改正值随时间而线性地增加，而且从形式上说这个过程同前面的方法是相同的。

对于那些具有大自行或高赤纬的恒星来说，可以采用同样性质的处理方法，但是需要用比较严格的公式。

推算所得的位置（α_0，δ_0）确定了一个对应于历元 T_0 的坐标系，而自行则提供了把这个坐标系投影到其他历元去的一种手段。在用恒星作为参考点时，自行和星表位置同样都是必不可少的，而且在有关恒星动力学和银河系结构的问题中，更有它本身的直接重要性。然而，即使在最现代的星表中，自行的精度也要比历元位置的精度差得多。由于自行的系统误差和偶然误差，就使得外推所得到的位置的误差会随着时间而增大，以至最后它们终于完全不适用于高精度的研究。基本星表的有效使用期限不超过 25 年，过了这段时间之后就必须进行一次彻底的订正。为此，需要用子午环对基本恒星进行连续不断的观测，以进一步提高基

本系统的精度，特别是自行的精度。

在业已确定的具体做法中，光行差椭圆是包括在平位置内的，这不会给视位置带来任何显著的误差。但是，自行是从平位置推算而来的，其中就包含有光行差椭圆长期变化的影响，如果在有关自行的统计研究中，一旦对大量自行的测定工作达到足够高的精度，那么最终可能有必要把这一效应考虑进去[1]。

主要的基本系统

自 19 世纪初期以来人们编制了一系列的基本星表，其中用到的最早期的观测工作是由詹姆斯.布拉德雷在 1732～1762 年间于格林尼治天文台所做的。在这之前的那些观测对于这项工作、特别对于确定自行来说其精度是不够的。贝塞尔首次对布拉德雷的观测进行了完整的归算，并且同以后的观测综合起来编成了一本星表[2]。

在这 19 世纪后半叶所编制的星表中，由纽康和奥韦尔斯建立的基本系统是特别重要的。1872 年，纽康发表了一本包含有 32 颗基本赤道星的赤经星表，数据来自 12 本独立观测星表的测定结果，其中用到了自布拉德雷以来到 1870 年为止的观测资料。这本星表后来扩展成为一本有 1098 颗标准星的完整星表。最后，纽康应 1896 年巴黎会议的要求在 1898 年发表了一本有 1257 颗星的基本星表[3]，这是在对 1755～1895 年间 43 本独立的观测星表进行详尽分析的基础上编纂而成的。1925 年之前，天文年历所采用的就是取自这本星表的恒星位置，纽康、希尔和布朗的行星表和月历表，是在对太阳、月球和行星的观测结果进行分析的基础上编成的，而在这些工作中用到的也是纽康系统。

---

[1] 参见A.Danjon, “Astronomie Générale” 2nd.ed.p.108, J.and R. Sennec, Paris, 1959.

[2] Bessel, “Fundamenta Astronomiae” (1818).

[3] S.Newcomb, Astr.Pap.Amer.Eph.Ⅷ (1898).

1879年，奥韦尔斯发表了一本北天基本星表，这是根据几本观测星表编制而成的，其中起主要作用的是普尔科沃和格林尼治的观测星表，星表中的自行是通过1861年格林尼治的观测同经过重新归算后的布拉德雷观测之间的比较来加以确定的。后来，奥韦尔斯还进一步编制了一本南天星表。经过几次修订之后，吉.彼得斯把这些星表作了扩展，编成了"柏林天文年历新基本星表"这一系统被称为NFK，其中包含了925颗恒星，它是在从布拉德雷起到1900年左右的观测星表的基础上编成的。

1937年出版了NFK的修订本，名称叫做"柏林天文年历第三基本星表"。这一系列称为FK3，其中包含有1535颗恒星，是在1820～1930年间80本独立星表的基础上编成的。自行完全依靠了1850～1925年间所作的观测。现代基本星表中的系统误差主要是自行误差所造成的结果，而这里所说的自行误差则又是由大约1850年之前所编制的观测星表中的系统误差所产生的。FK3系统在1940～1964年● 间为世界各国所采用，在这之后又被另一个称之为FK4的修正系统所取代。

GC系统

包括星数最多的系统是"历元1950年33342颗恒星总星表"●，称为奥尔巴尼总星表或GC（博斯）星表。这本星表是根据1755～1932年间将近250本星表编制而成的。另外，全部恒星都重新作了观测。

博斯星表是由更早期的"6188颗恒星初期总星表"修订和补充而成，后者是由纽约，奥尔巴尼的达德利天文台的刘易斯.博斯编制的，发表于1910年。直至刘易斯.博斯在1912年去世之前，博斯星表的编制工作一直是在他的指导之下进行的，后来由他的儿子本杰明.博斯完成了这项工作。北天恒星的观测是1907～

● 国际上FK3使用到1961年底为止，从1962年初起正式使用FK4。——译者注

● Carnegie Instituion of Washington Publ.No.468, 5 vols.Washington. D.C., 1937.

1918年间在奥尔巴尼进行的，这项工作在1909～1910年间有所中断，这是因为需要在阿根廷的圣.路易斯安置子午环并观测南天的恒星。

赤道的位置是通过对南北半球各天文台编制的星表进行平差后加以确定的，赤道附近大范围内的恒星为南北两个半球的天文台重新进行了观测。这里没有用到对太阳和行星的观测。

N30 系统

作为一种参考系的基本恒星系统，它的建立是行星理论和行星表的发展工作的主要组成部分之一。航海历书局、耶鲁大学天文台和沃森计算科学研究室在海军研究部的支持下，于1947年起开始着手重新编制一些行星表，根据一项有关的协作计划，美国海军天文台的摩根负责承担对基本星的位置和自行进行修订。主要目的是要为日积月累的行星观测资料的分析提供一个基础，但是，改进后的自行同样也为岁差、太阳运动以及银河自转的进一步研究提供一个基础。

在建立FK3和GC系统以及更早期的一些系统（它们是构成FK3和GC系统的部分依据）的过程中，对于过去的观测资料已相继地进行了极其细致的归算和分析，所以看来已不再需要对这些观测作更进一步的分析。因此，可以根据最近的观测资料建立了一个完全独立的位置系统，不必利用以前星表中的任何自行资料。同以前历次测定无关的基本标准位置是根据大约30本基本观测星表编制而成的，历元在1930年附近，一共包括有几百颗恒星。这个标准系统命名为N30。该系统中的春分点和赤道是根据对太阳、月球以及行星的基本观测来加以确定的，这项工作主要由格林尼治天文台、华盛顿天文台和好望角天文台所承担。从GC星表取得1900年前后的位置，或者从经过系统改正归算到GC系统的其它星表中取得1900年前后的位置，再把N30系统的位置同1900年前后的位置进行比较，这样便求得了与以前历次测定独立无关的恒星自行。

在这个系统的基础上，根据平均历元为1920～1950年的70多本星表编制了一本包含有5268颗标准星的星表，其中的恒星在天球上的分布是相当均匀的❶。

---

❶ H.R.Morgan, Catalog of 5268 standard stars, 1950.0, based on the nomal system N30. Astr. Pap. Amer. Eph. Ⅶ, pt. Ⅰ (1952).

第十九章　惯性参考系

直接观测到的天文现象由时间和位置参考系中的空间和时间坐标来加以表示，而这个参考系则是通过实测的方法用一个基本星系统来确定的。对天体位置的直接观测，是该天体在天球上相对于选定恒星的视位置的一种量度。利用天文观测所确定的时间，是地方地面子午面在周日运动过程中对于恒星的相对位置的某种量度。恒星本身就是一些实际的参考点，观测结果通常要同天球上的一些几何坐标系联系起来，而这种几何坐标系就是用具体某一本星表中恒星的表列赤经、赤纬来加以确定的。

人们总是用一个基本星系统来表示由地球的自转和公转运动所确定的参考系。这个基本星系统是通过观测地球的自转和公转运动在恒星周日视运动中的反映，以及它们在太阳和行星位于恒星间的视运动中的反映来加以确定的。赤道和春分点在恒星间的位置，是通过**实测方法**根据这些视运动来加以确定的，但是具体的做法是先根据地球运动理论用**动力学方法**定义赤道和黄道，然后再随时确定赤道和春分点相对于选定的一些标准星的位置。

天文现象的数学表达方式是在引力理论的基础上建立起来的，其中，天体的运动用一些独立变量来加以描述（这些变量归根结底又是根据在位置的惯性参考系中的坐标以及均匀时间尺度推导出来的），而天文现象则通过与某些动力学定律（这些定律实质上也就确定了上述位置和时间的参考系）相一致的一些关系式来加以表示。因此，原则上说，基本星系统确定了由行星系运动、特别是由地球运动所决定的惯性参考系。仅仅根据恒星还无法确定动力学参考系，这是因为我们对恒星系统动力学的了解是很不完善的。

但是，在实际工作中，由于可以用于建立基本星系统的方法

上的限制，参考坐标系是利用直接观测到的现象来确定的，它的建立则通过实测的方法根据对这些现象的观测来加以实现，并且再利用选定的一些恒星的星表坐标以及它们随时间的变化正式地把这个坐标系决定下来，但是实际上我们还不能肯定地说这样得到的参考系就是严格地相当于一个惯性系。从本质上来说，这仅仅是一种用于实际工作的中间媒介，观测结果以它为参考系来加以表示，又在这个参考系中对观测结果给以动力学的解释。

子午天文学的目的不仅在于为实际观测工作提供常规的实测参考系，而且还在于不断地改善天体的位置和自行，以尽力消除不同基本星系统之间仍然存在着的不一致性，并确定由直接观测所得到的参考系同合理的动力学惯性参考系之间的严格关系。

观测的参考系

在确定基本星系统同根据地球运动由动力学方法所决定的惯性系之间的关系时，恒星系统不可避免地要受到用来推求这一系统的那些观测中的偶然误差和系统误差的影响，这个问题是次要的。对大部分情况来说，在长时期连续观测的基础上作了反复的修正之后，仍然还残留下来少量这类误差，这主要是属于实际工作的不完善，而不是本质上的缺陷。基本星系统是一个**运动参考系**，这个事实才是最为重要的。它是由历元星表位置，以及因岁差和自行**两者共同**引起的位置的**变化**来加以确定的。这些量实际上是在建立系统过程中，通过观测来进行测定的，直接观测不可能把恒星的运动同参考圈的运动分离开来。从星表所得到的恒星坐标，实质上就代表了**运动赤道和运动春分点**在按规定加以挑选的一组**运动恒星**间的位置，这是通过实测的方法来加以确定的，也就是要根据前后不同历元所作的重复观测来推算出这种**相对运动**。惯性系同由星表所决定的几何坐标系之间的关系只取决于参考圈的运动，而且只有在把岁差独立地测定出来之后才能确定这两个系统之间的关系。

自行通常是星表的内容之一，为了测定自行就需要有一个岁差采用值，所以人们往往认为岁差采用值是定义基本星系统的一个组成部分。但是，严格说来，岁差并不表现参考系的定义特征，应该说它是确定观测参考系和惯性系之间关系的一个附加的量；岁差代表了几何坐标系的一种旋转运动。它并不直接地对观测位置本身发生影响，而仅仅是影响到它们的**内插值**。任何天体的坐标，或者对任何瞬间的时间量度，都是通过直接同基本星联系在一起的观测工作来加以测定的，而基本星又确定了由实测得到的运动参考圈。因此，其它恒星以及太阳系天体的瞬时观测位置和运动，就是**直接在这个旋转系统中**得到的。在确定这些位置和运动时，通常并不直接运用岁差的采用值；而如果用的话，也一定要同基本星的自行联合起来一并使用，但是自行的定义是百年变化减去岁差，因而在实际工作中直接采用的是百年变化。所以，观测所得到的坐标与岁差的采用值同样也是没有关系的，要是没有在进一步的基本观测的基础上对基本系统加以修正的话，百年变化是不会改变的。

但是，从动力学上来解释观测得到的行星运动和恒星运动的问题却直接同岁差的数值有关。在由基本星系统所确定的旋转坐标系内，牛顿运动定律是不成立的。为了在这些定律的基础上为观测到的运动情况建立一个理论表达式，必须把观测参考系与动力学的惯性系联系起来，这里不管直接还是间接地总要用到某个岁差值，岁差采用值中的误差相当于动力学理论的参考系的某种剩余旋转。

在恒星动力学中，为了求得恒星的自行要把岁差直接从百年变化中扣去，而对于恒星系统的动力学来说，在所观测到的恒星运动中只有自行才是唯一有意义的分量。在行星理论中，并不需要从直接观测到的运动中除去参考系的运动；相反，在实际工作中，是通过从惯性系到运动着的观测参考系之间进行抽象的数学变换，把参考系的运动同相对于某个惯性系计算所得到的引力运

动理论联系在一起的。各个常数纯粹是通过观测直接在运动坐标系内加以计算的，其中并没有明显地用到岁差的数值，但是必然间接地用到了这个数值，因此在理论运动和观测运动之间可能会出现偏差，而这种偏差同岁差采用值的某种误差所造成的结果是等价的。

因此，要把观测和理论恰到好处地协调起来，特别是对于研究那些用观测误差或者用理论计算上的缺陷无法合理地加以解释的偏差来说，就得依赖于有一个精确的岁差值。

从原则上说，根据基本星系统通过实测方法所决定的参考圈，代表了由地球的自转和轨道公转所确定的赤道和黄道，正因为如此我们也许会以为可以根据地球运动的理论来计算赤道和黄道的运动。但是在实际上用这种方法所能求得的只是黄道的运动，以及赤道运动理论表达式中一些小项的数值。日月岁差和章动的主项只能通过观测来加以测定，这是因为就理论计算来说，我们对地球内部结构的认识程度是不够的。章动的测定是容易的，因为由它所产生的可观测天象具有周期性的特征，而且章动的周期比较短，所以少量的误差对于建立惯性坐标系来说不会有很显著的影响，但是，同恒星的自行分开来单独地测定岁差那是特别困难的，这是因为两者都是累进运动，而且实际上能够观测到的百年变化所代表的只是**相对运动**。

对于克服这个困难来说，并不存在任何绝对的参考标准。参考系本身必须通过对一些天体的观测来加以建立，而同样这些天体相对于这一参考系的位置又正是需要加以测定的内容。严格说来，要想找到一种绝对的标准，用来肯定地把参考圈相对于恒星的观测到的运动中任何特定的部分，解释为由坐标系统旋转引起，而不是由恒星运动的系统分量引起，那是不可能的。在古代，人们把观测所得到的春分点在恒星间的位移全部归因于**固定恒星天球**的实际旋转。要象解释恒星的周日旋转或者太阳的周年运动那样，用另一种方式来进行解释时，除了直接观测所仅能得到的相

对运动之外，还必须求助于进一步的证据。从现有的证据看来，也许要对通常采用的岁差值加上一项适当的改正，以完全消除恒星系统的整体旋转运动。春分点沿黄道运动速率的不确定性为每世纪略小于1″。标准天文常数系统中黄经百年总岁差的采用值为5025.64″，该值由纽康在1897年所确定，历元为1900年。后来用其他方法独立测定的结果表明这个数值偏小了一些，但是改正的范围大约在 +0.3″～+1″ 之间，而且对这种不一致性还不能给出确切的解释。

同时，在累积了有关地球自转速率变化的证据的基础上，人们已经认识到需要对根据这种自转所求得的时间计量系统加以改正，以把它归算到由动力学定律所确定的时间系统中去。对于岁差采用值和天文时间计量系统作了改正后的常数系统，就会把观测同引力理论之间的全部偏差统统都消除掉，根据定义，这种常数系统代表了从实测的观测参考系到动力学惯性系之间在空间和时间坐标上的一种变换。如果用这种方法不能很好地消除所有显著的偏差，那么这也许就表明可能需要对引力理论或运动定律进行某种修正。

行星理论的参考系

一般来说，在行星理论和行星表中所用的参考系是瞬时运动黄道和平春分点，这样，一旦转换为赤道坐标时，理论位置所代表的天象同观测到的情况就是一样的了。经过章动归算后的观测位置是同瞬时赤道和平春分点联系在一起的。用来确定观测位置的运动赤道和春分点，是直接由基本星系统所确定的，但是，行星表中的春分点和黄道部分地依赖于在建立理论及根据观测来计算常数和轨道要素时所采用的具体的方法，而且这种依赖关系是不明显的。行星理论的参考系是由建立理论的方法确定的，观测参考系是通过实测的方法由恒星系统来加以确定的，在这两类系统中，相对于惯性系统的旋转速率都是通过建立参考系的方法间接

地加以确定的，而不是直接地采用某个特定的岁差值。嗣后，又必须通过有关的专门研究来求出在任何一个系统中所隐含的岁差值。这两个参考系不仅可以用来近似地表示由地球运动所决定的运动着的动力学框架，而且它们同惯性系之间的关系可能也不是严格相同的，对于两个系统的两个春分点来说，不论是它们在恒星间的运动速率或是在历元时的位置，都并不一定要取得一致。

行星的轨道要素以及其它常数是根据它们的观测位置来加以确定的，这些观测位置同任何特定的岁差值都没有关系，它们只同恒星的星表位置和百年变化有关。理论位置只依赖于轨道要素和常数，而且实际上与岁差无关。在理论推导中要用到的是平均恒星运动❶，它是在观测所得到的平均回归运动中扣去某个岁差采用值后求得的，但是，对其它方面来说在行星理论中并不明显地采用岁差的某个数值。岁差的误差可能会引起平均运动的误差，而除了这种平均运动误差的高阶效应之外，行星表同岁差值就没有什么关系了。但是，在通过数学方法把基本动力学方程的惯性参考系同观测参考系联系起来的过程中，同样会间接地牵涉到岁差的问题。理论推导中所用的具体方法规定了行星表的参考系，而且也间接地确定了参考系岁差运动的某个数值。这个数值同实际动力学数值之间的差异可能以两种形式出现，或者表现为理论和观测间的直接差异，或者表现为隐含在观测所确定的那些常数中的某种误差。在行星理论中由这个原因所造成的误差，可以通过独立地测定岁差采用值的改正，并由此推出合理的误差改正来加以消除；或者相反，也可能通过行星理论同观测的比较来求得岁差改正。

在行星理论中，一般是用黄道面作为基本参考面。这个平面相对于惯性系的运动是根据行星的质量用引力理论来求得的，因

---

❶ 行星的恒星运动指的是行星相对于恒星背景的运动，以别于行星的回归运动，后者指的是行星相对于春分点的运动。——译者注

此，这个参考面是用动力学方法决定的。如果黄经从固定在运动黄道面上的一个起算点（例如，从历元固定春分点）起进行计算，那么由此所得到的参考系就完全是动力学的系统。行星相对于瞬时动力学黄道的理论视位置，是由根据日心坐标表达式所算得的地心黄经和地心黄纬来表示的，而日心坐标又是动力学时间、行星质量和一些积分常数的函数。在实际工作中，常数和参数的数值是通过观测来求得的，所用的方法是把长时间以来的观测结果同利用它们的初值从理论所算得的历表位置进行比较，通过这种比较可以确定对于初值的改正。与此同时，还可以求得对于用来确定观测位置的基本星系统的改正，就象在建立基本星系统的过程中可以求得对于行星理论的改正一样。

不论把观测赤经、赤纬换算为对于动力学参考系的黄经、黄纬，还是把理论黄经、黄纬换算为对于实测基本系统的赤经、赤纬，都必须进行数学变换，而从原则上说，在这些变换中必须确定三个量的数值：实测春分点到动力学黄道与实测赤道交点间的角距离，瞬时动力学黄道对于实测赤道的倾角，以及动力学黄道上的起算点到动力学黄道与实测赤道交点间的角距离，后者是用来规定理论黄经起算原点的位置，而倾角则用来规定理论参考面的位置。这些参数确定了理论动力学参考系相对于实测观测系统的位置，因而也就确定了实测参考系对于惯性系之间的关系。对于不同时间所建立的不同的行星理论来说，实际上用来确定这些参数的具体做法在某些细节上是有所不同的。

列弗里埃略去了在实测春分点和动力学春分点之间可能存在的差异。他首先根据诸行星的质量求得有关黄道面相对于某个惯性系运动的理论表达式[1]，再根据质量和交角的日月岁差推导出交角长期变化的理论表达式[2]，并利用过去几百年内所积累起来

[1] Leverrier, Ann.de l'Obs.Imp.de.Paris. I, 103-105.

[2] Leverrier, Par.Ann. I, 170-175.

的、在二至点附近对太阳所作的赤纬观测结果算出这个变化的数值，然后令最终的理论表达式同根据观测计算的数值相等。根据这个表示质量间关系的条件方程式[1]，以及从地球受到的周期摄动所求得的另外一些条件方程式，就确定了各行星质量的数值[2]，然后，把这些数值用在有关交角变化的理论表达式中，便得到了交角作为时间函数的一个数字表达式[3]。

在列弗里埃的做法中不明显地作了两个假设，这就是实测赤道与动力学赤道相重合，以及用实测方法根据恒星系统所确定的春分点位于赤道与动力学黄道的交点处，在纽康后来所采用的方法中这两个假设就弃而不用了。在把黄道坐标转换为赤道坐标的过程中，考虑到动力学赤道和恒星系统所决定的赤道间的交角，以及在实测春分点和动力学黄道与赤道的实际交点之间的差异，纽康引入了两项改正。通过理论同观测之间的比较，对于春分点和交角的这两项改正以及长期变化，就同轨道要素和质量同时测定出来了。

利用这种做法，可以求得动力学参考系的运动基本平面相对于观测参考系的位置，但是不可能直接确定在这个平面上作为黄经理论计算所用的起算点，其原因是这个起算点相对于可观测的参考点的位置同岁差有关。实际上所观测到的量是行星本身在黄经方向上相对于运动春分点的运动，它是春分点岁差和行星的恒星运动两者合成的结果。因此，实际工作中行星表是直接以轨道黄经方向所观测到的平均回归运动为基础建立起来的，这就相当于用运动着的实测春分点作为基本参考平面上的基点，而不是采用理论上所规定的起算点。

因此，实际上用于行星理论的参考系部分是动力学的，而又有部分是实测性的。它的建立与岁差无关，建立的方法是通过观

---

[1] Leverrier, Par. Ann. Ⅳ, 49-52.

[2] Leverrier, Par. Ann Ⅳ, 92-97 and 102.

[3] Leverrier, Par. Ann. Ⅳ, 104.

测确定一个平面，一方面用动力学方法根据引力理论决定该平面与某个惯性坐标系的相对关系，另一方面又根据基本星系统通过实测的方法来决定这个平面上的某个参考点。引力运动理论是用这个系统中的坐标来表示的，尽管它并不严格地等价于纯粹用行星理论所决定的动力学框架。这个参考系与惯性系的实际关系同具体建立这一系统时所间接用到的岁差值有关，除了轨道要素和常数的误差以及时间计量中的不均匀性之外，这也是理论和观测之间存在显著差异的一个可能的误差源。

惯性系的确定

无论在观测参考系还是在行星理论参考系中，作为基本参考点的都是春分点，而春分点则是由基本星的星表赤经所决定的。原则上说，只要确定春分点岁差运动的数值，就可以从其中任何一种参考系推导出某个惯性系来。在观测参考系中，通过对观测到的百年变化进行统计分析，就可以把岁差和自行分离开来，而一个惯性系也就通过实测的方法建立起来了。在行星理论参考系中，从观测到的行星运动同引力理论之间的比较，就可以按动力学方法来确定岁差。但是，实际上这两种方法都会碰到严重的困难，惯性参考系的建立乃是方位天文学中最为困难的问题之一。

通过对恒星运动的统计分析来确定岁差的这种运动学方法是很容易引起系统误差的。在实际求得的自行中，包含有在分析了相对于基本系统的观测运动之后所没有消除的系统误差部分，任何这种系统误差都会带到所求得的岁差值中去，因而我们就不能确有把握地认为这个岁差值和用动力学方法确定的岁差的数值是相同的。实际上，恒星除了用来直接确定瞬时观测参考系外，还用来确定一个在实用上被认为是惯性系的参考框架，但是，为了估算同实际动力学框架之间可能存在的差异，还必须用独立的方法来进行测定。

可以预料，以后将通过两种方法来改进岁差的数值，而这两

种方法在过去是不可能做到的。在经过足够长的时间间隔完成了必要的观测工作之后，再把基本星系统与河外星系联系起来，就可以用运动学的方法来测定岁差。与此同时，在对行星理论进行某些改进，特别是对行星质量的数值作了改进之后，就可以根据行星轨道交点和近日点的变化来对岁差进行动力学的测定。

岁差的动力学测定

根据太阳系天体的运动来测定岁差时，主要利用的是岁差对行星运动的二阶效应，因为对一阶项来说，受到影响的是作为积分常数之一的平均运动。实际上，恒星运动是在观测到的回归运动中扣去岁差采用值后求得的，而通过定义平均距离 a 的动力学关系式 $n^2a^3=$ 常数，就把恒星运动同 a 联系起来了。如果直接测量以天文单位表示的 a 值，就可以推出 n 的数值，并且可以用这个 n 值从一阶效应来确定岁差。

原则上说，可以通过对太阳系内动力学现象的观测来建立一个惯性系，这一点是基于下面这样的事实：由于观测参考系的岁差旋转，在直接所观测到的行星运动中，有一部分并非是由力的作用而产生的加速度所造成的结果。如果我们可以准确无误地测出作为作用力的引力的大小，那么就可以从下面两种加速度之差来推算出参考系的旋转：一种是相对于这个非惯性系的实际加速度，另一种是如果参考系为惯性系时、在服从运动定律的力的作用下所应当产生的加速度。但是，要想有效应地应用这一点以取得有意义的结果，那就需要更为准确的行星质量。

参考系旋转对某颗行星的视运动的影响，可以根据该系统的角速度，用有关轨道要素变化的表达式的形式来加以表示，其中特别重要的是近日点和交点的长期运动。我们所观测到的这些长期变化的量是和运动春分点联系在一起的，因而就要受到岁差的影响，这一点同观测到的行星平均运动的情况是相类似的。但是，它们的恒星运动分量是可以根据引力理论来加以计算的，这一点则同平均运动中的恒星运动分量不同。通过理论来计算由于力

的作用而产生的行星近日点和交点的运动（其中包括了相对论效应），所得到的是相对于某个惯性系的运动。把这个结果同观测到的相对于运动春分点的运动（春分点是由恒星系统确定的）进行比较，便是测定岁差的一种方法，因为比较所得到的差异就代表了由于参考系旋转所引起的变化。

但是，近日点和交点本身是无法加以观测的。必须根据长时间内对于行星视运动的观测，来推算它们的空间位置和运动情况。通过与理论运动的比较原则上可以求得岁差，并建立起一个动力学参考系，而这种比较是间接地通过对行星的观测位置和理论位置间的偏差（$O—C$）的分析来进行的。例如，轨道黄经方向的中心差的主项为 $2e\sin(L-\pi)$，式中 L 是从瞬时春分点起算的平黄经，π 为从该春分点量起的近日点黄经。π 采用值的误差 $\Delta\pi$ 会给行星的表列黄经带来一项周期性的误差 $-2e\Delta\pi\cos(L-\pi)$，这项误差将会引起观测黄经和计算黄经之间的偏差，因而可以通过对偏差（$O—C$）的适当分析把它测定出来。因为 $\pi=\pi_0+bt$（这里 b 为长期运动）及 $\Delta\pi=\Delta\pi_0+(\Delta b)t$，在残差（$O—C$）中就会有一项以行星的公转周期为周期，而幅度随时间按比例增大的周期项；系数 Δb 可以解释为岁差值的误差，在确定表列近日点黄经时，岁差的作用就是用来求得 b 的数值。

同样，也可以利用交点的长期运动。原则上说，根据理论和观测间的不一致性可以确定参考系的旋转，其中需要对这一旋转运动在以下三个方向上的分量进行最小二乘解算，这就是二分点联线的方向，黄道平面上与二分线相垂直的方向，以及与黄道面垂直的方向。纽康❶发现了四个内行星轨道要素长期变化的观测值和理论值之间的差异，其中的理论值是根据同这些变化无关的、独立测定的行星质量计算得到的。安丁在1905年曾经企图利用纽康所发现的这个差异并应用上述的原理来测定岁差改正，

❶ S.Newcomb, "Astronomical Constants," pp.109-110, 1895.

另外在20世纪初还有一些人也做了这样的工作，但是当时还不知道要考虑相对论效应，因而他们所取得的结果是不确定的，得不到一致的公认。后来，鲍辛格做了一次尝试❶，并略取得了某些成功。但是，在实际工作中，利用这一方法还不能获得任何肯定的岁差改正。引起理论和观测间偏差的原因不仅在于恒星系统的整体旋转运动——这种运动可能会给岁差带来误差，还在于观测误差以及引力理论的缺陷，特别是由于行星质量的不确定性所带来的问题。

岁差的实际测定

实际测定岁差的方法取决于对大量恒星百年变化的观测结果的分析，为此需要对这些恒星整体运动的一般特征作出某种假设，并且在这种假设的基础上进行统计处理。在岁差常数的早期测定工作中，通常是假设恒星的空间运动是随机的，因此在所观测到的百年自行中，对于全部恒星所共有的任何系统误差，都是由于岁差以及太阳相对于恒星的运动效应而引起的。但是，随着银河系自转以及别的系统性恒星运动的发现，这个假设就不再成立了。为了根据经典的运动学方法从所观测到的恒星运动来确定岁差，需要对以下几个方面提出一些经验的假设：（1）作为一个整体来看，恒星系统的总体结构和运动情况；（2）太阳在宇宙空间中的渐进运动；（3）单个恒星所特有的运动。要以很高的精度来测定总岁差常数那是特别困难的，原因在于很难消除诸如太阳运动、星流、银河系自转以及观测位置中的系统误差这样一些系统性的效应。岁差的数值同所采用的具体的假设有关，也同测定工作中所用到的具体恒星有关。

测定岁差的常用方法是通过对分布在整个天球上的大量恒星自行的分析，来求出对于岁差采用值的改正值。利用岁差常数的某个采用值计算赤经和赤纬的总岁差，然后在相对于某个选用的

---

❶ J. Bauschinger, Naturwissenschaften 10, 1005-1010(1922).

春分点和赤纬系统的百年变化中把它们扣除掉，这样便求得了恒星的自行。因此，用这样的方法求得的自行，实际上是由以下几个方面所共同造成的赤经和赤纬的变化：（1）春分点相对于惯性系统的剩余岁差运动，这是由岁差采用值中的误差引起的；（2）因太阳运动造成的恒星视差动；（3）由于恒星系统总体旋转所引起的系统运动；（4）单颗恒星所特有的其它的空间系统运动和随机运动。

此外，在所求得的自行值中，还包括了由于恒星系统中观测的系统误差所引起的视变化。我们可以推导出关于由岁差误差、视差动以及银河系自转所产生的赤经和赤纬变化的理论表达式。假定单颗恒星的运动是足够随机的，从总体上来说认为它们具有和偶然误差相同的性质，于是就可以令这些理论表达式同自行的具体数值相等，并且用最小二乘法从最后得到的方程组中把各个分量解算出来。

赤经和赤纬的总岁差是

$$P_\alpha = m + n\sin\alpha\tan\delta,$$
$$P_\delta = n\cos\alpha,$$

式中

$$m = \psi\cos\varepsilon - \lambda,$$
$$n = \psi\sin\varepsilon,$$

Ψ 表示黄经日月岁差，λ 表示行星岁差，ε 为黄赤交角。由于岁差运动所要求的改正 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\lambda$ 或 Δm 和 Δn 所引起的赤经和赤纬的变化，是由 P_α 和 P_δ 对于 ψ 和 λ 的偏导数来表示的：

$$\cos\delta(\Delta\alpha) = (\cos\varepsilon\cos\delta + \sin\varepsilon\sin\alpha\sin\delta)\Delta\psi - \cos\delta\Delta\lambda$$
$$= \cos\delta(\Delta m - \Delta\lambda) + \sin\alpha\sin\delta\Delta n,$$
$$(\Delta\delta) = \sin\varepsilon\cos\alpha\Delta\psi = \cos\alpha\Delta n.$$

因此，利用赤纬可以确定天极朝春分点的周年运动 n 的数值，利用赤经则可以确定春分点沿赤道的周年运动 m 的数值。

把这些表达式同有关太阳运动和银河系自转效应的表达式联

合起来，组成条件方程，然后用最小二乘法解这些方程，就可以确定岁差采用值的改正，同时可以求得太阳向点以及银河系自转常数。但是，百年变化的观测误差可能会给自行带来系统性的影响，而这些影响将会带到对于自行的这种分析的结果中去。实际上，赤经自行可能会有一项固定的误差 $-\Delta e$，这是由于观测技术的改变或者是由于在观测和计算方面的其它一些因素所造成的。因为这个原因，在上面有关 $\Delta\alpha$ 的方程中，通常把右端 $\cos\delta$ 的系数（这个系数是需要加以确定的）取为

$$k=\Delta m-\Delta e-\Delta\lambda.$$

改正值 Δe 为经过其它改正之后赤经自行的平均值，它通常称为**春分点运动**，不过这个名称的含义不太明确，因为也可以通过别的途径来求得同样形式的改正值，这时对于所得到的改正值的解释也许就不同了。

例如，通过对子午观测结果的分析，可以确定形式为 $a+bT$ 的一项对于春分点的改正，这里 a 是星表的零点改正（也就是对星表中所有赤经的固定的改正），b 是这项改正的百年变化（也就是对于赤经百年变化的固定的改正）。bT 这一项一定不可同岁差混淆起来。百年变化的改正 b 也称为**春分点运动**，但是它的数值未必就同通过自行分析所得到的改正值 Δe 相同。Δe 的数值同利用百年变化求得自行以及把自行分解为两个分量时所用的方法和假设有关。

在通过实测手段、根据常用的统计方法来建立惯性系时，固有的困难是所得到的结果同作为建立条件方程的依据的具体假设有关，而且也同所用到的具体观测资料有关。要想把各种系统误差完全分离开来那是毫无把握的。作为避免这种缺陷的一种方法，计划在将来用河外星系作为参考框架。这些星系在同视线正交方向上的速度是未知的，但是即使这个速度可以达到退行速度同样的量级，那么由于距离太远，角速度实际上还是等于零，因而对于任何实际问题来说，可以认为这些天体的视位置提供了

一个惯性参考框架。如果测得了大量遥远星系相对于基本星的位置，那么我们就取得了一种方法，它不仅可以用来改正和控制基本星系统，而且可以更精确地测定岁差常数。这样就有可能把百年变化恰当地分解为两部分，即岁差引起的部分和由恒星实际运动引起的部分。

用河外星系作为惯性参考系的设想首先由赖特[1]提出。夏恩于1947年在立克天文台开始进行了观测。1954年完成了覆盖立克天文台可见天区的一系列照相底片。预计未来的第二期底片将于1985年左右完成。实际工作中的主要困难在于制订出一些有足够精度的方法，以把象河外星系那样的暗天体同用子午环观测的比较明亮的恒星联系起来。原则上说，这种联系可以直接通过对天极位置的照相[2]，以及通过照相巡天的方法建立起来，但是，要制造一架用于这一目的而又具有足够稳定度的仪器那是有困难的。

天文常数系统

除了岁差之外，在时间和位置的天文参考系内还涉及到许多其它的常数以及数字参数。它们的数值对于具体地体现这个参考系，以及从理论上来表示天体的位置和运动来说都是至关重要的。因此，可以认为这些常数和参数是由各个天文参考系所共同体现的时空框架的一个组成部分。我们不能自然地认为常数系统、行星表以及基本星系统这三者是彼此独立的。严格说来，所有这三个方面应该构成一个均匀的、一致的系统，但是这一理想至今还没有实现。

一般说来，可以通过若干种不同途径的观测——通常是利用两种或两种以上完全不同的方法，来求得有关基本天文常数以及行星系统主要素的数值。如果用不同方法或者在不同的时间测定

[1] 参见 W.H.Wright, Proc.Amer.Phil Soc, 94, 1-12(1950).

[2] 参见 H.N.Russell, Mon.Not.Roy.Astr.Soc.73, 735-742(1913).

同一常数，那么不可避免地会给出略为不同的数值。这种不一致性只是物理学基本原理的一种反映而已，这就是说，任何测量工作都不可能完美无缺，不同的测定自然可能会给出不同的结果。

根据观测确定天文常数所用的方法有两种：（1）对各个量分别进行直接的测量，其中对每一个量的测定都要用到几种特定的观测，它们是专门为测定这个具体的量而特意安排的；（2）间接测定，通常所确定的是对于初始采用值的改正，需要对一段时间内所完成的大量日常观测结果进行一次平差。一般说来，对于这些累积起来的观测资料的分析和平差，可以同时求得几个不同的量。

当已经知道了某个量的相当精确的数值之后，为了求得具有更高精度的数值，用第二种方法进行重新测定最为方便，而且可以得到最为令人满意的结果，目前人们所普遍采用的也正是这种做法。但是，在天文学的历史发展过程中，直到较近的年代为止，第一种方法在实际工作上却占有主要的地位。我们可以通过一些非常简单的方法来确定大部分的主要常数和基本参数，并取得比较好的结果，这从古代起就已经为人们所知道了。经过过去几个世纪内的逐次测定，目前所知道的一些主要天文常数的数值已经比任何一次专门观测所能测得的结果要精确得多，要想通过观测使测定精度有进一步的提高，只能用确定对于以前数值的改正的方法，而不是用对这个量进行直接测定的方法来做到这一点。高精度坐标系的建立是一个逐次逼近的过程，它依赖于长时间内的连续观测，以及对于累积起来的观测资料所作的定期分析。

但是，从观测所确定的若干个不同的量中每一个量的精确数值出发，通过对测得的这些数值进行平差，以同联系各个真值的已知的理论关系取得一致，则往往可以求得更为精确的数值。在基本天文常数之间存在着许多这样的关系式；但是所测得的数值通常并不严格地满足这些关系，因此它们彼此之间不是完全没有矛盾的。国际上为用于天文年历而采用的标准基本常数系统就是

部分地建筑在对于观测所得的数值进行平差的基础上，但是迄今为止还没有能做到下面这一点：那就是建立一个完全自洽的系统，同时又满足其中每一个量的数值与所能取得的最好测量结果，在观测误差的范围之内是相一致的。

对于任何常数所作的单独一次测定来说，即使它是最近所进行的测量，而且又使用了好的仪器和方法，相对而言这样一次测定的本身仍然是没有什么多大意义的。真值不可能绝对准确地加以求得，任何单独的一次测定仅仅给出一个数值范围，而真值或多或少可能落在这一范围之内。各次测定之间的差异，特别是采用彼此独立的方法所得到的结果之间的差异，往往要比在这些测定工作中应该存在的已知偶然误差和系统误差源所能解释的差异来得大。任何一次具体的测定都不能认为是带有决定性的，只有通过对累积起来的全部已有测定结果进行极其严格的比较和分析，才有可能得到一个可以被认为是目前最为可靠的数值，或者说最或然值。

此外，最合理地选择某个常数的具体数值的问题，取决于打算应用这一常数的目的。对于不同的问题来说，往往要选用同一个量的不同数值。太阳、月球、行星以及主要恒星的精密星历表的主要用处在于同高精度的观测结果进行比较，以便对作为计算这些星历表的依据的那些理论和星表加以改进。为此，约定采用一个标准的数据系统并且始终如一地应用这些数值，就要比不断地改变这些数值重要得多，后一种做法的目的则在于尽量使每一个量与当时所能取得的最好数值相一致。因为并不要求任何采用值都保证绝对地正确，所以我们可以预料在天体的观测位置和利用常数采用值算得的位置之间会出现少量的差异，而这些差异正是确定采用值或然改正的最有价值的资料之一。对于星历表的基础进行频繁的或非系统性的改变，将会引起无穷的麻烦和困难，并往往容易产生错误。实际工作中普遍采用的做法是，在许多不同的天文台进行了长期的观测，并且明确无疑地表明必需加以重大

的改正之前，应当始终采用同样的常数和同样的星表，而且即使有了改正的需要，在可以对整个系统加以系统性的修正并为人们普遍采用之前，仍然不要作出任何的改变。

天文年历中所列出的常数，并不是象人们有时候错误地认为的那样是一些“最好的”或最近测定的数值，而是要反映出为国际上天文学家们所一致同意采用的标准系统——建立这一系统的目的就是专门用来计算基本星历表。在用于其它目的的某种特殊计算工作中，有时候对于某个量必须使用当时所能取得的最可靠的数值，而不是采用规定的标准值，但是，只是在每经过一段很长的时间之后，才能合理地对作为计算基本星历表的依据的标准常数系统作出修正，而且也只有这个时候才能在实际上做到这一点。

第二十章 球面天文学术语的历史演变

球面天文学的基础概念和基本原理在古代就已形成了，主要应归功于希腊人。在公元二世纪，这些概念和原理就已经相当完善，在托勒密所著的**“古代天文观测集”**（Almagest）中对这些情况有过广泛的论述。今天所使用的描述球面天文学基本概念的学术用语大部分就是从古代传下来的。将日常所用的词语用来表示与这些词语的字面意义多少相适合的科学意义，这就是这些术语当时的起源情况。因此，作为一种历史的记录，球面天文学的名词学就隐约地体现了这些基本概念的产生和发展，以及体现了当初的思想方法。但是现在这一些东西已变得含糊不清了，一方面是由于从我们不熟悉的古代语言中又衍生出了许多派生词，另一方面从这些术语产生到现在已经过了许多世纪，在这样长的时期内有些词在形式和应用上都发生了变化。

地平(圈)(horizon)这个词就是从古代术语中保存下来的一个例子，并且在形式和意义上都没有发生过实际的变化。这个在科学上有着重要意义的概念，被这个词的原始字面意义形象地勾划出来了。把古希腊表示天球上地平圈的这个词改写成拉丁文，就形成了 horizon 这个词。这是个描述得很确当的名词，因为它的希腊文字面意义是“边界”，显而易见这个术语表示的是天球上可见部分和不可见部分的边界。除了在拼写及发音方面有些少量的变化外，这个词几乎原封不动地保存在许多种现代语言中。比如在法语中为 horizon，德语为 Horizont，西班牙语为 horizonte，意大利语为 orizzonte。这个词本来是一个希腊动词的分词形式，意义是用一个边界来分离，隔开。象许多术语的来源一样，通过对一个描述性的短语进行省略简化就得到了一

个科学术语。在最早的论述天球的希腊著作中，地平圈的思想是由“分隔可见及不可见的两个半球的大圈”这样的一个短语来表达的，也就是说它是天球的可见部分的分界。以后就慢慢地被简称为**“天球上的分界圈”**，最后就干脆只用“分隔”这个动词的分词来表示，而实际指的是**“圈”**也就不言而喻了。几何学家欧几里德在它的天文著作中，就已经把这个动词分词形式作为一个单词来用了，并正式定义了它的学术意义，虽然他常常还同时使用更完整的短语来表达同一个意义。

从古代传到现在的学术名词中大部分起源于希腊的天文学，但它们却是从以后的阿拉伯文和拉丁文著作中再引进到现代语言中来的，希腊的文化就是这样传布到西欧的。因此在天文学名词中可以找到其它语种的这些痕迹。例如，**地平经度**（azimuth）和**天顶**（zenith）两个词就都是从意为“方向”“道路”的阿拉伯词 samt 演变而来。天顶是短语 samt al-ra′s 的省略形式，短语意思是“头顶的方向”（希腊人用的也是同样的名称），而在许多早期的阿拉伯文著作的西班牙译文中，由于常见的笔误，把其中的 *m* 写成了 *ni*，于是 *samt* 就变成了 *cenit*（当然也还有别的误写形式）。这种改写变形的词又从西班牙文和中古式的拉丁文引进到古法语和中世纪英语中。天顶这个词在现代西班牙文中仍为 *cenit*，但在英国16世纪后就演变成了“zenith”。同样，“地平经度”是从 *al-samt*（复数为 *al*-sumūt）来的，它是阿拉伯短语“地平圈内的方向（用角度表示，从东点或西点起算）”的省略形式。改写后的“azimuth”这个词与阿拉伯文 *as-samt* 的发音相应，这里词首定冠词中的辅音与词首辅音相似发咝音。有些词处于所有格地位，如演变成 zenith 的那个词 *samt*，对这种词来说，第一个词前面的定冠词就省掉了。“天底点”（nadir）这个词基本上是阿拉伯文“对面”的意思，现在所用的词是“天顶对面的点”的省略形，但早先它还表示天穹上沿天球直径方向与任一个点相对的另一个点，特别是与太阳相对的一点，当然这

种用法现已陈腐过时。

地平圈上的主要参考点是根据周日运动现象想出来的，正如古代的术语所表明的那样，这些基本点原来是想象为朝向太阳升起点的方向，朝向太阳的最高点或周日运动中间点的方向等等。古希腊语言中表示“东”和“西”的词是从表示上升和下落的两个动词演变来的，这些词用来特别强调太阳，而不是别的东西的升和落。把这些词翻译成为拉丁文就是 oriens 及 occidens。作为方向的名称，在现代英语中这两个名词就被起源于盎格鲁-萨克逊语言的名词“east”和“west”所代替（这两个词同样体现黎明和傍晚这两个基本意思）。但是在拉丁语言中，还把 oriens 及 occidens 作为位于希腊和罗马以东及以西的国家的总称，这种用法现在被保留了下来，仍常被用来表示地球上东、西方国家。可是在德国却不用这两个拉丁词，而用 Morgenland 及 Abendland 来表示。

“赤道”圈（equator）这个词原是希腊用语，它已翻译成拉丁文，但原意不变。拉丁文 aequator diei 是短语（circulus）aequator diei et noctis 的省略形，意即“昼夜相等”，它是由希腊文中表达赤道圈这个意思的短语意译而来，在两种语言中都只取了短语中的第一个词作为简略形。

现代英语中，通常用二分点（equinox）来表示，当赤道上昼和夜处处相等时太阳所在的那个点，这个词既表示位置，又表示太阳穿过赤道的时刻（分点时刻）。但在古代用语中，这两种意思是用不同的术语来表示的。“equinox”这个词实际上就是拉丁词 aequinoctium（aequus + nox），这个词以及与它等价的希腊词都只表示太阳正好位于赤道上的那个时刻，而赤道上的相应点位则直接用 punctum aequinoctialis 表示。用来表示二分点的拉丁词在法、意文字中基本保留下来了，但在德语中，却用字面意义相同的德文词 Nachtgleiche 来代替了，在俄文中也相似。

赤道由所有天体的公共的规则和均匀的周日运动来定义，它是天球上最最基本的一个圈。因为黄道与这个基本周日圈有一个倾角，因此希腊人曾把黄道称为slanting或oblique circle（相对赤道倾斜的圈）。有时也常称它为“过黄道十二宫中心的大圈”，偶而也称为“太阳圈”。在后罗马时期的拉丁著作中，才把意思为“与食有关”的希腊词译为拉丁词ecliptica，用来代替原来的希腊短语。但早期的用语却反映了最早时期人们对有关这个圈的性质的认识。

有关赤道坐标系术语使用的起源、变化和发展历史是特别有趣的，因为这些术语含蓄地体现了天文学一些最基本概念的演变，此外在这些术语中还保留了某些最早的观念和想法。有些术语从古代传到今天已与原始的意义发生了某些显著的变化，但字面上却基本没变，因此还留下原来思想的烙印，特别是**赤经**和**赤纬**就是其中的两例。在希腊天文学中，赤道坐标曾是如此不值一提，以至没有什么专门的术语用来表示它们，当时几乎什么都是用黄道坐标来表示的。如果实在需要表示相对赤道的位置时，它们或者用“相对赤道的经度和纬度”表示，或者干脆用“离赤道的距离”这类描述性的语言来表示。而术语right ascension以及declination原来是为相当专门的需要才引入的，它们并不是普遍地用来表示天体的坐标，其意义要狭得多。这两个术语表达了当时的观点，因此很难一下子看出，为什么要用这两个词表示现在定义下的赤道坐标。

计量离开赤道角距离大小的术语开始只对黄道上的一些点才适用，并且开始是用它们来表征太阳运动的。许多重要的天文现象与这两个基本圈之间的倾角、交点和其它关系有关，黄道上的点相对赤道的位置自然就应引起特别的注意。特别是，太阳在恒星间的视运动的最重要的特征之一就是太阳在其周年轨迹中相对赤道的偏离大小。因此自然而然就选择这个太阳对赤道的偏离量以及太阳在黄道上的位置量来标定太阳在任意瞬间的位置。托勒密

在“古代天文观测集”第I册第15章中给出了一个表，这个表对黄道上每1°的间隔给出了黄、赤道之间在沿子午圈方向上距离的弧长，托勒密称之为倾角表（κανόνιον λοξώσεως）。在拉丁文中这个概念由“declinati”这个词所表达，意为“弯离”或“偏离”（它是从declinó这个词来的，表示转向一边，或偏离标准的意思），而英语中就使用了declination这个词。其原来的字面意义就是黄道上任一给定点相对赤道偏离的角距离的量度（与现在地磁学中同样这个术语的用法可比拟）。穆斯林天文学家把这个术语直译成阿拉伯文（他们在翻译黄经、黄纬时也是这样直译的），也即用表示倾斜或偏离意思的阿拉伯词来表示太阳或黄道上任意点对赤道的角偏离。但对黄道外其它地方的点，则常用“离赤道的**距离**”这种表达法。

以后，declination这个词就扩大到用来表示天球上任意天体或点到赤道的角距离，也即不再限于黄道上的点和太阳。可是，在现代用法完全确立之前，有些作者却往往把declination和latitude两个词同时既用来表示离赤道的距离，又用来表示离黄道的距离，因此造成了混淆。例如乔叟写道：“任何天体的declination或latitude❶可以从赤道向南北计量……与此相似，任何一个天体，除了太阳以外，其latitude或diclination❷也可以从黄道起计量”（“星盘”（Astrolabe）Ⅱ17，约公元1390年）。某些穆斯林作者还曾用“first declination”和“second declination”来分别表示离开赤道和黄道的距离。

与**赤纬**这个词一样，**赤经**（right ascension）这个词在古希腊天文学中原来只用于专门的目的，与现在的定义是有点差别的。它是几个密切有关的术语中的一个，用来阐明球面现象的系统几何理论。因为日、月、行星在恒星间运动过程中离黄道是不

---

❶ 这里实际指的是赤纬——译者注
❷ 这里实际指的是黄纬——译者注

远的，因此研究它们在黄道上的升点和降点是一个重要的问题。为此目的，早期希腊作者引进了所谓的“上升”和“下降”（即ascension及descension）两个词。字面上讲，用“上升”（希腊文为ἀναφορά，拉丁文为ascension）表示黄道上的一个给定弧段（即黄道十二宫中的某一个）的上升，或者说从地平升起。黄道的这一弧段穿过地面圈所需要的时间是反映上升情况的一个重要因素。标志这个上升时间的特性所用的方法是：以赤道上点的运动为基准，定出与黄道这段弧同时上升的赤道弧段的长度，就以这个赤道弧段上升所需的时间作为黄道弧段上升所需时间的计量。在天文学中就开始用ascension这个术语来表示赤道上这段弧本身的长度，其意义是给定黄道弧段的“上升时间”。在垂直球上，周日运动与地平圈垂直，这一个垂直上升，或者说在垂直球上的上升，就被称为right ascension（即现在意义下的赤经）（ascensio recta），而在倾斜球上的倾斜上升就称为oblique ascension。

于是，在球的任何特定位置，黄道弧段的上升时间就正式用同一时间段内相应上升的赤道弧段的长度来定义。从这个意义上讲，ascension就等价于给定弧段上升所需要的时间，它是由天球周日自转来量度，用赤道上的弧长（度）来表示。从春分点到黄道上另外任意一个点之间的弧段的上升时间就称为这个点的ascension。几何学上讲，这个ascension就等于在赤道上从春分点量到与黄道上该点同时升起的赤道上相应点之间的那段弧的长度。在垂直球上，这个“垂直上升”就等价于现代所定义的赤经。在任何特定斜球上给定弧段的倾斜上升与同一弧段垂直上升之间的差异就称为这个球的**上升差**。在考虑黄道上点的下降时，与上面完全一样，引入了“下降”、“垂直下降”、“倾斜下降”和“下降差”等术语。

在古代天文实测工作中，上升和下降是用来解决许多球面天文问题的手段。首先在垂直球上求解，然后把方法推广，根据同

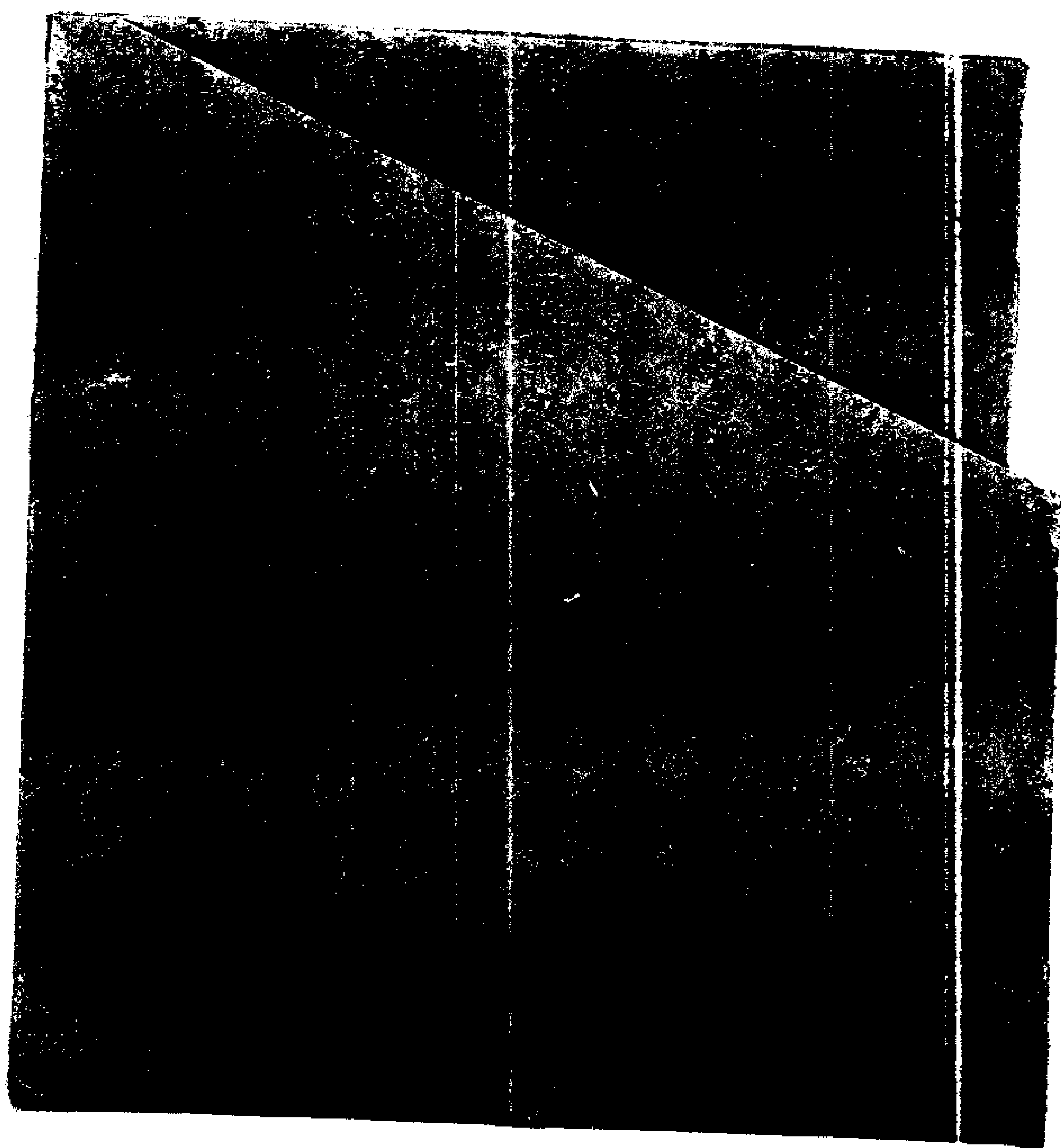
一个问题在垂直球上的求解结果去导出任何给定斜球上相应的结果。从古代天文观测集起一直到近代为止，在许多天文论著中常给出不同地理纬度处黄道的上升和上升差的数字表，这是当时天文论著的特色，上述这些术语一直到19世纪初还一直在许多书刊中被采用，特别是在论及天球仪和地球仪使用的文章中，其定义形式仍与古代相同，只是象declination等一样，它们已不再限于只指黄道上的点，而是指天球上所有的点了。例如一颗星的垂直上升（right ascension）通常就定义为“随着垂直球上的恒星一起升起的赤道相应点到二分点的弧长（度）”。

在16世纪以后的几个世纪中，随着仪器设备和观测方法的发展，使子午观测的实测工作得以广泛的应用，并由此而使赤道坐标系的应用更为广泛。这就导至古代术语right ascension和declination的意义更一般化，直到最后就如现代定义的意思一样用它们来表示天球上任意点的赤道坐标。这两个词的近代定义在18世纪中叶就已确认了，当时它们的古代定义和观点还没有消声匿迹。同时，地平现象不再象古代那样在天文学中占主导地位了，有些术语因为在子午天文中用不到于是就渐渐被淘汰。到19世纪中叶前，除了right ascension外，其它与上升和下降有关的术语就很少被用到了，只有right ascension这个词被保留了下来，而它原来的定义也从教科书上消失了。

直到18世纪初以前，星表中使用的大多数是黄道坐标系，只有个别情况例外。黄经则用黄道十二宫内的度数来表示。以后，在18世纪的一些星表中，就既给出了天体在黄道坐标中的位置，又给出了赤道坐标中的位置。到18世纪末，黄道坐标就很少再用了。直到1833年在英国航海年历和法国历书中，以及1829年前的柏林天文年历中，太阳、月球和行星的黄经都是用黄道十二宫中的度数来表示的，而在以后出版的刊物中，黄经就从0°到360°连续计量了。

英文中所采用的黄道坐标的名称 **黄经** 和 **黄纬** 两个词是由

拉丁文来的，拉丁词是 longitudo（字面意义为“长度”）和 latitudo（“宽度”），这两个拉丁词又是从表示这两个坐标的希腊词译过来的，古希腊文的这两词的字面意义也是长度和宽度。这种称法是很确当的，因为原来它们就是主要用来表示黄道带上位置的量度，黄经是沿黄道长度方向，而黄纬是沿其宽度方向。它们与地理学中同一术语的用法相应。古代人们认为世界（或者说可以栖居的地方）是长方形的，他们就用这两个词的字面意义来表示这块长方形世界的“长度”和“宽度”，其中长度指的是沿东-西方向。



［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝球面天文学
作者＝（美）Ｅ．Ｗ．伍拉德　Ｇ．Ｍ．克莱门斯
页数＝４９８
ＳＳ号＝１０１２３０３４
出版日期＝１９８４年０９月第１版